

Matematyka III
– WEEK 5 –
AGH BIS-2-101-OZ-s

Uwaga: Zadania należy rozważać przy definicji dystrybuanty z warunkiem **lewostronnej ciągłości**, tak jak zdefiniowano ją na wykładzie (podejście rosyjskie). Dystrybuantę można również rozważać stawiając w definicji warunek prawostronnej ciągłości (nurt atlantycki).

Zmienne losowe o rozkładzie dyskretnym

1. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

x	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	1/4	1/2

Znajdź dystrybuantę $F(x)$ dla zmiennej losowej X i naszkicuj jej wykres. Wyznacz $P(\{\omega : X(\omega) = 1\})$, $F(0)$, $F(\frac{1}{2})$, $F(\frac{1001}{1000})$, $F(1)$, $F(\frac{7}{5})$, $F(2)$, $F(2015)$, $P(X \in [\frac{7}{5}, 2))$ oraz $P(X \in [\frac{7}{5}, 2])$.

2. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

i	1	2	3	4
x_i	0	41	76	2015
p_i	8/10	3/20	p	1/100

gdzie $p_i = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = P(X = x_i)$. Wyznacz p , jeżeli wiadomo, że zmienna losowa X przyjmuje jedynie wartości ze zbioru $\{0, 41, 76, 2015\}$. Znajdź dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicuj jej wykres.

3. Jan rozwiązywał zadanie, w którym dany był rozkład pewnej zmiennej losowej Y . W rozwiązywaniu zadania towarzyszył mu kot, który przewrócił kubek z kawą zalewając treść zadania. Ocalała jedynie część tabelki. Co mogło znajdować się w kolejnych wierszach?

?	?	1/2	?
?	1/4	?	-1/2

Jan zapamiętał, że zmienna losowa, którą rozważał przyjmowała wartości, których suma wynosiła 2. Które z pustych pól w tabeli jesteśmy w stanie jednoznacznie wyznaczyć?

4. Zmienna losowa Z przyjmuje wartości -1 , 4 i 10 z prawdopodobieństwem odpowiednio $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{12}$. Naszkicuj wykres dystrybuanty zmiennej losowej Z .
5. Czy można podpisać kolejne wiersze w poniższej tabelce tak, by określała ona rozkład pewnej dyskretnej zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij.

?	-3	5/2	1/2
?	1/4	5/4	-1/2

6. O zmiennej losowej X wiemy, że $P(X = 0) = \frac{1}{3}$, $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 8) = \frac{1}{2}$. Sporządź tabelkę dla zmiennej losowej X . Oblicz prawdopodobieństwo $P(X < 0)$, $P(X \leq 0)$, $P(X > 0)$, $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X > 2)$ i $P(2 \leq X < 10)$. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X oraz naszkicuj jej wykres.
7. Zmienna losowa Y przyjmuje wartości -10 , -1 , $-\frac{1}{2}$ i 0 . Wiadomo, że $P(Y < -1) = \frac{1}{2}$, $F_Y(-0,99) = \frac{3}{4}$, $P(Y = 0) = \frac{1}{48}$. Wyznacz wartość dystrybuanty zmiennej losowej Y w punkcie $y = -\frac{1}{3}$.

8. Czy funkcja $G(x)$

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq -2, \\ \frac{1}{8} & \text{dla } -2 < z \leq 4, \\ \frac{3}{8} & \text{dla } 4 < z \leq 6, \\ \frac{3}{5} & \text{dla } 6 < z \leq 8, \\ 1 & \text{dla } z > 8, \end{cases}$$

może być dystrybuantą pewnej zmiennej losowej? Jeżeli tak, to zmienną tą nazwij Z i wyznacz jej rozkład. Ponadto naszkicuj funkcję $G(z)$ i zapisz $G(z)$ wykorzystując do tego celu indykatory zbiorów.

Popularne rozkłady dyskretne

9. Review Jak wygląda dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej X o rozkładzie Bernoulliego z parametrami $n > 0$ i $p \in [0, 1]$? Oblicz $F(0)$, $F(0,99)$, $F(1)$ oraz $F(5)$ przyjmując $n = 10$. Zinterpretuj wyniki.
10. Review Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Jak wygląda jej dystrybuanta $F(x)$? Przyjmując $\lambda = 4$ oblicz $F(2)$, $F(4)$ i $P(2 \leq X < 4)$. Zinterpretuj wyniki.

Zmienne losowe o rozkładzie ciągłym

11. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ jest dobrą kandydatką na gęstość dla pewnej zmiennej losowej.
12. Czy istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, by funkcja $f(x)$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} m \cdot \sin x & \text{dla } x \in [0, 3\pi], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 3\pi], \end{cases}$$

była gęstością pewnej zmiennej losowej?

13. Sprawdź, czy funkcja $f(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{dla } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

14. Dobierz parametr $m \in \mathbb{R}$ tak, by funkcja $f(x)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -\pi), \\ m \cdot \sin^2 x & \text{dla } x \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, \infty). \end{cases}$$

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia "zmienna losowa X przyjmuje wartość zero" oraz $P(X < 0)$ i $P(\{\omega : X(\omega) \leq 0\})$.

15. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ będziemy mieć $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, jeżeli gęstością zmiennej losowej X jest funkcja $f(x) = \frac{1}{k}\mathbb{1}_{[0,k]}(x)$?
16. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja $F(x)$ będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X ?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ a \cdot x^2 & \text{dla } x \in (0, 4], \\ 1 & \text{dla } x > 4. \end{cases}$$

Wyznacz $F(-1)$, $F(1)$, $F(3)$ oraz $F(5)$. Jakie musiałyby być a , by X była zmienną losową ciągłą?

17. Czy funkcja $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a, \\ c \cdot x & \text{dla } x \in (a, b], \\ 1 & \text{dla } x > b, \end{cases}$$

może być dystrybuantą pewnej zmiennej losowej, jeżeli przyjmiemy że:

- (a) $a = 1, b = 2, c = 1,$
- (b) $a = 0, b = 2, c = \frac{1}{2},$
- (c) $a = 0, b = 2, c = \frac{1}{4}?$

Popularne rozkłady ciągłe

18. Review Jak wygląda dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$? Dla $\lambda = 3$ wyznacz $F(-10)$ oraz $F(5)$. Zinterpretuj wyniki.

19. Review Zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ, σ^2 . Jak wygląda dystrybuanta $\Phi(x)$ tej zmiennej losowej? Wyznacz $\Phi(0), \Phi(1,96), \Phi(-1,96), \Phi(5)$ i oblicz $P(0 \leq X < \infty)$ mając dane $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Zinterpretuj wyniki.