

Matematyka III
– WEEK 6 –
AGH BIS-2-101-OZ-s

Wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja

Uwaga: W poniższych zadaniach zakładamy, że rozważane zmienne losowe są całkowalne, to znaczy, że mają one wartości oczekiwane. Gdy mówimy o wariancjach także zakładamy ich istnienie.

1. Niech X będzie zmienną losową. Wykaż, że dla $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ mamy:

- (a) $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$,
- (b) $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$,
- (c) $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Uwaga: $\mathbb{E}(X)$ można równie dobrze zapisać jako $\mathbb{E}X$, zamiast $\mathbb{E}(X^2)$ można pisać $\mathbb{E}X^2$, z kolei zamiast $[\mathbb{E}(X)]^2$ możemy pisać \mathbb{E}^2X , ale trzeba niezwykle uważać (przy tych dwóch ostatnich), ponieważ przy alternatywnych oznaczeniach łatwo o błędy.

2. Niech X będzie zmienną losową. Wykaż, że dla $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ mamy:

- (a) $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$,
- (b) $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$,
- (c) $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$,
- (d) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi. Wykaż, że $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

4. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi. Wykaż, że $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$. Jak można rozpisać $\text{Var}(X - Y)$?

Zmienne losowe o rozkładzie dyskretnym

5. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

x	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	1/4	1/2

Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X .

6. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

i	0	1	2	3
x_i	0	41	76	2015
p_i	8/10	3/20	2/50	1/100

gdzie $p_i = P(X = x_i)$. Oblicz $P(X \in (40; 77))$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = X + 5$, a następnie oblicz $P(Y \in (35; 72))$ wartość oczekiwaną zmiennej losowej Y oraz jej wariancję.

7. Zmienna losowa Z przyjmuje wartości -3 , -4 i -12 z prawdopodobieństwem odpowiednio $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{12}$. Oblicz: $\mathbb{E}Z$, $\mathbb{E}(Z - 1)$, $\mathbb{E}(Z^2)$, $(\mathbb{E}Z)^2$ oraz $\text{Var}(Z - 1)$.

8. O zmiennej losowej X wiemy, że $P(X = 0) = \frac{1}{3}$, $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 8) = \frac{1}{2}$. Sporządź tabelkę z rozkładem zmiennej losowej X . Oblicz prawdopodobieństwo $P(X > \mathbb{E}X)$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = X^2 + 2X + 1$ i oblicz $\mathbb{E}Y$ oraz $\text{Var}Y$.

9. Dana jest dystrybuanta $G(x)$ zmiennej losowej X

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -2, \\ \frac{1}{3} & \text{dla } -2 < x \leq 4, \\ \frac{2}{3} & \text{dla } 4 < x \leq 6, \\ \frac{5}{6} & \text{dla } 6 < x \leq 8, \\ 1 & \text{dla } x > 8, \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{E}(X\mathbb{E}X)$, $\mathbb{E}(2X - 2\mathbb{E}X)^2$ oraz $\text{Var}X$.

Popularne rozkłady dyskretne

10. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie jednopunktowym.
11. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym.
12. Review Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie Bernoulliego z parametrami $n > 0$ i $p \in [0, 1]$.
13. Review Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda > 0$.

Zmienne losowe o rozkładzie ciągłym

14. Funkcja gęstości zmiennej losowej X o rozkładzie ? z parametrem ? ma postać $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$. Oblicz $\mathbb{E}X$, \mathbb{E}^2X oraz $\mathbb{E}X^2$.
15. Funkcja gęstości $f(x)$ zmiennej losowej X dana jest równaniem $f(x) = m \cdot \sin x \cdot \mathbb{1}_{[0, \pi]}(x)$. Wyznacz $\mathbb{E}(X - 1)$ oraz $\text{Var}(X - 3)$. Ponadto wyznacz $k \in \mathbb{R}$, dla którego $P(X < k) = 3/4$.
16. Funkcja $f(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{E}(X^5 + 4X^4)$ oraz $\mathbb{E}(X - 1)$.

17. Dobierz parametr $m \in \mathbb{R}$ tak, by funkcja $f(x)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -\pi), \\ \pi \cdot \sin^2 x & \text{dla } x \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, \infty). \end{cases}$$

Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .

Popularne rozkłady ciągłe

18. Review Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem. Piszemy $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
19. Review Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z parametrami μ oraz σ .

Rozkład ciąгло-dyskretny*

20. Funkcja $F(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{1}{9} \cdot x^3 & \text{dla } x \in (0, 2], \\ \frac{17}{18} & \text{dla } x \in (2, 3], \\ 1 & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$

Naszkiuj $F(x)$. Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\text{Var}X$.