Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska
Kierunek: Inżynieria Środowiska
Specjalność: Odnawialne Źródła Energii
Semestr letni 2014/2015

Matematyka III
– WEEK 7 –
AGH BIS-2-101-OZ-s

Dwuwymiarowe zmienne losowe

1. Łączny rozkład zmiennych losowych X i Y dany jest w tabeli

	$Y = 0$	$Y = 3$
$X = 1$	0,3	0,4
$X = 2$		0,2

Uzupełnij tabelkę i wyznacz brzegowy rozkład zmiennych zmiennych losowych X i Y. Oblicz $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

2. Rozkład (X, Y) dany jest w tabeli

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	1/4	1/4	1/4
$X = 2$	1/8		1/8

Uzupełnij tabelę i wyznacz brzegowy rozkład zmiennych losowych X oraz Y. Oblicz $\mathbb{E}(Y)$ oraz $\mathrm{Var}(Y)$.

3. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Znajdź rozkład (X, Y), gdzie X - wynik pierwszego rzutu, Y - wynik drugiego rzutu. Znajdź rozkłady brzegowe.

4. Łączny rozkład zmiennych losowych X i Y dany w tabeli

	$Y = -5$	$Y = 0$	$Y = 5$	$Y = 10$
$X = 3$	1/10		1/10	$3/10 - \varepsilon$
$X = 6$		$1/5 - \varepsilon$		

Uzupełnij tabelę tak, by rozkłady brzegowe nie zależały od ε (ε dostatecznie małego, z otoczenia zera) i wyznacz brzegowy rozkład zmiennych losowych X i Y. Oblicz $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5. Niech (X, Y) ma rozkład zadany tabelą

	$X = 0$	$X = 2$
$Y = 1$	1/6	1/3
$Y = 2$	1/4	1/4

Oblicz $\mathbb{E}(X + Y + XY^2)$.

Centralne twierdzenie graniczne

1. Sale wykładowe AGH często wyposażone są w system nagłaśniający pozwalający korzystać z bezprzewodowego mikrofonu. Aby mikrofon działał potrzebna jest bateria. Czasy życia baterii są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Przeciętna długość życia baterii obsługującej mikrofon wynosi 10 godzin, z kolei odchylenie standardowe czasu pracy baterii to 4 godziny. Rozważmy salę wykładową 103 w łączniku A3–A4 (Wydział Matematyki Stosowanej AGH) w której w czasie semestru letniego zaplanowano 1000 godzin wykładów. Każdy wykładowca używa zestawu nagłaśniającego, by oszczędzać swój głos. Ile baterii należy kupić, by z prawdopodobieństwem $0,95$ mikrofon działał przez co najmniej 1000 godzin wykładów?

2. Na poczcie pojawia się 400 klientów dziennie. Każdy z nich dokonuje wpłaty, bądź wypłaty X_i, $i = 1, \ldots, 400$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o zerowej średniej i wariancji równej 100^2. Ile gotówki w kasie powinna mieć rano poczta, by z prawdopodobieństwem $0,99$ na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy? Zakładamy, że w ciągu dnia braki uzupełnia naczelnik placówki ze swojej kieszeni, ale wieczorem chce odzyskać pieniądze.
   Czy odpowiedź się zmieni, gdy rozważać będziemy nie jeden, a 100 urzędów pocztowych, pracujących w tych samych warunkach i mogących sobie pożyczać nawzajem gotówkę?

3. Towarzystwo ubezpieczeniowe pobiera od klienta składkę w wysokości 35 złotych miesięcznie, a w zamian klient otrzymuje od towarzystwa zwrot kosztów leczenia w razie nieszczęśliwego wypadku. Prawdopodobieństwo, że w danym miesiącu klient otrzyma wypłatę w wysokości 500, 1000 i 2000 złotych wynosi odpowiednio $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{400}$. Towarzystwo zawarło 1000 takich umów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że towarzystwo w danym miesiącu:
   (a) (4 pkt) wykaże zysk,
   (b) (4 pkt) poniesie stratę w wysokości co najmniej 1000 złotych,

   Jaka powinna być minimalna liczba klientów, by prawdopodobieństwo, że towarzystwo poniesie stratę było równe $0,05$?

4. Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje, po 105 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonają losowo - rzucając symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc powinno być przygotowanych w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,005?