

Modelowanie i symulacje w finansach
– WEEK 7 –
AGH AMA-2-303-MF-s

Dywidenda

Dynamikę cen instrumentu bazowego S w N -krokowym modelu dwumianowym można przedstawić na drzewie dwumianowym. Pytanie, co dzieje się z drzewem, gdy chcemy rozważyć model, w którym wypłacana jest dywidenda. W zestawie tym opisane i zilustrowane zostały dwa przykłady. Przedstawiono zachowanie cen instrumentu bazowego, gdy wypłata dywidendy następuje w chwili 2 (dla uproszczenia zakładamy chwila to numer kroku) w modelu $N = 4$ krokowym. Uogólniono również te przypadki, jako zadanie zostaje zaimplementowanie tych rozwiązań w VBE.

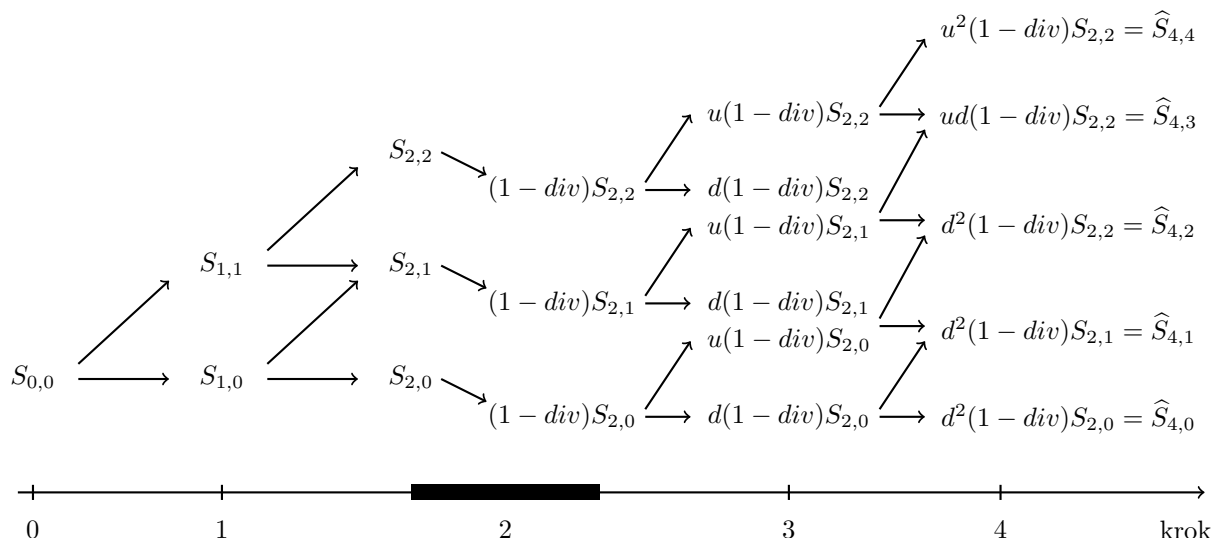
Ustalony procent wartości

W przykładzie pierwszym, w chwili 2 następuje wypłata dywidendy, która określona jest jako procent ceny instrumentu bazowego z chwili 2 (przed jej wypłatą). Warto zadać sobie pytanie co stanie się po wypłacie dywidendy, czy drzewo będzie się rekombinowało, czy jego gałęzie będą się sklejały. Wystarczy w tym celu przeanalizować zachowanie cen instrumentu bazowego po wypłacie dywidendy. Przyjmujemy oznaczenie $\widehat{S}_{i,j}$ na wartość instrumentu bazowego po wypłacie dywidendy (naturalnie w naszym przypadku $i \geq 2, 0 \leq j \leq i$).

$$d(1 - div)S_{2,2} = (1 - div) \cdot d \cdot S_{2,2} = (1 - div) \cdot d \cdot u^2 \cdot S_{0,0} = (1 - div)S_{3,2} = \widehat{S}_{3,2},$$

$$u(1 - div)S_{2,1} = (1 - div) \cdot u \cdot S_{2,1} = (1 - div) \cdot u \cdot ud \cdot S_{0,0} = (1 - div)S_{3,2} = \widehat{S}_{3,2}.$$

Wobec powyższego w naszym przykładzie drzewo będzie się dalej rekombinowało. Mamy tutaj do czynienia z takim samym procentowym spadkiem cen instrumentu bazowego w chwili 2 w każdym ze scenariuszy, a skoro drzewo wcześniej się rekombinowało, to i po przeskalowaniu cen instrumentu bazowego własność ta zachowa się.



Ogólnie moglibyśmy rozważyć przypadek, w którym dywidenda wypłacana jest w chwili I jako ustalony procent wartości instrumentu bazowego $div \cdot S_{I,j}$ ($0 \leq j \leq I$), tym samym wartość instrumentu bazowego w chwili I maleje o $div \cdot S_{I,j}$ w każdym ze scenariuszy. Po wypłacie dywidendy wartość instrumentu bazowego wynosi $(1 - div)S_{I,j} = \widehat{S}_{I,j}$. Zauważ, że wypłacane dywidendy mogą być różne w różnych scenariuszach.

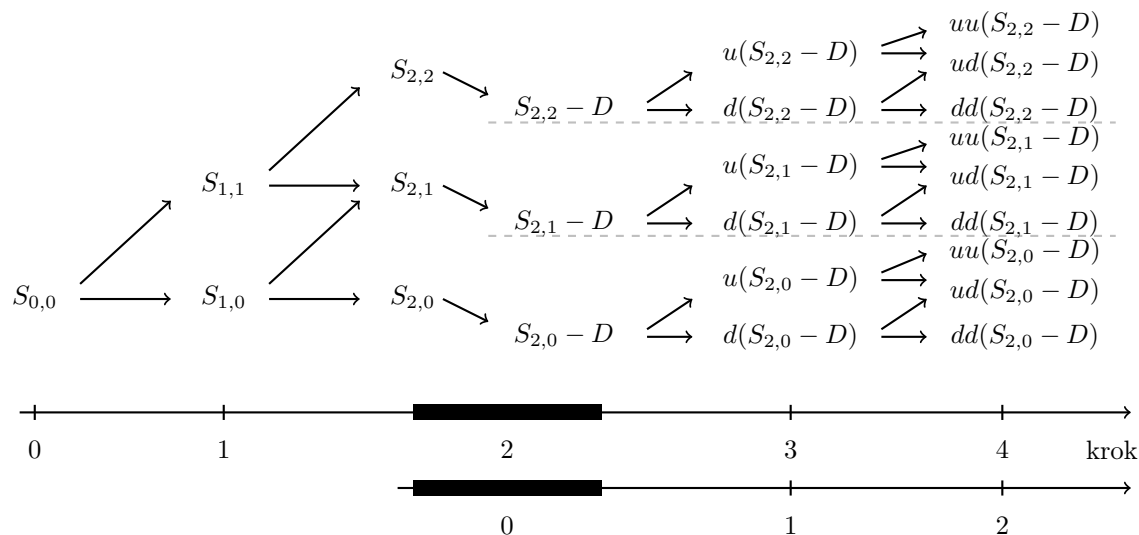
Jeżeli chodzi o rekombinowanie drzewa po wypłacie dywidendy w ogólnym przypadku, to nadal je mamy, gdyż wypłata dywidendy powoduje jedynie przeskalowanie ceny instrumentu bazowego (mnożenie jest przemienne) i nie ma ono wpływu na łączenie się gałęzi drzewa po wypłacie dywidendy.

Ustalona stała

W przykładzie drugim natomiast wartość dywidendy wypłacanej w chwili 2 jest niezależna od scenariusza, który się zrealizował i w każdym przypadku wynosi D . Przyjmujemy oznaczenie $D_{i,j} = u^j d^{i-j} D$, przy czym $0 \leq i \leq N - I$, $0 \leq j \leq i$ wartość instrumentu bazowego po wypłacie dywidendy (naturalnie w naszym przypadku $1 \leq i \leq 2$, $0 \leq j \leq i$). Wtedy mamy:

$$\begin{aligned} d(S_{2,2} - D) &= d(u^2 \cdot S_{0,0} - D) = u^2 d \cdot S_{0,0} - dD = S_{3,2} - dD = S_{3,2} - D_{1,0}, \\ u(S_{2,1} - D) &= u(ud \cdot S_{0,0} - D) = u^2 d \cdot S_{0,0} - uD = S_{3,2} - uD = S_{3,2} - D_{1,1}, \\ d(S_{2,1} - D) &= d(ud \cdot S_{0,0} - D) = ud^2 \cdot S_{0,0} - dD = S_{3,1} - dD = S_{3,2} - D_{1,0}, \\ du(S_{2,1} - D) &= ud(S_{2,1} - D) = ud \cdot S_{2,1} - udD = S_{4,2} - D_{2,1}. \end{aligned}$$

Potwierdza to, że zaraz po chwili wypłaty dywidendy mamy problem z rekombinowaniem się drzewa cen instrumentu bazowego. W przykładzie dywidenda płacona jest w chwili 2, przez co w chwili 3 mamy już $2^3 = 8$ możliwych cen instrumentu bazowego. Na szczęście w kolejnych krokach pewne składowe drzewa rekombinują się, przez co w naszym przykładzie w chwili 4 mamy $(4 - 2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9$ możliwych wartości. Jeżeli przejdziemy do ogólnego przypadku, czyli gdy dywidenda wypłacana jest w kroku I -tym, to



wtedy w kroku I stworzy się nowych poddrzew, które będą się rekombinowały. Wtedy w kroku N będziemy mieć możliwych wartości. Implementując ten model warto zacząć od obliczenia wymiarów tablicy jaki będzie potrzebny i przemyślenia sposobu rozmieszczenia w niej cen instrumentu bazowego.

Zadania

1. W arkuszu Excel w kolumnie A wpisz oznaczenia parametrów potrzebnych do wyznaczenia ceny opcji europejskiej w modelu CRR. W kolumnie B wpisz, bądź wyznacz wartości odpowiednich parametrów tak, by móc korzystając z tych danych testować działanie tworzonych przez siebie makr i funkcji.

	A	B
1	$S(0)$	
2	u	
3	d	
4	...	

2. Rozważ N -krokowy model dwumianowy. W VBE napisz makro, którego wywołanie spowoduje wypisanie w arkuszu drzewa cen instrumentu bazowego płacącego dywidendę w kroku I . Krok I podziel na dwie części I^- oraz I^+ , odpowiadająca odpowiednio cenie przed oraz po wypłacie dywidendy. Nie zapomnij o dodaniu osi kroków/czasu poniżej wypisanej tablicy. Komórki z krokiem I -tym wypełnij kolorem. Rozważania przeprowadź dla przypadku, w którym dywidenda płacona w chwili I jest:
 - (a) ustaloną procentową częścią ceny instrumentu bazowego z chwili I ,
 - (b) ustaloną stałą, taką samą dla każdego scenariusza.
3. Rozważ N -krokowy model dwumianowy. W VBE napisz makro, którego wywołanie spowoduje wypisanie w arkuszu tablicy pozycji zawieranych na walorze bazowym, czyli $x(i)$ ($1 \leq i \leq N$) w celu osłony przed ryzykiem krótkiej pozycji na opcji europejskiej call i put. Rozważania przeprowadź dla przypadku, w którym dywidenda płacona w chwili I jest:
 - (a) ustaloną procentową częścią ceny instrumentu bazowego z chwili I ,
 - (b) ustaloną stałą, taką samą dla każdego scenariusza.
4. Rozważ N -krokowy model dwumianowy. W VBE napisz makro, którego wywołanie spowoduje wypisanie w arkuszu tablicy wartości portfela replikującego opcję europejską call i put. Rozważania przeprowadź dla przypadku, w którym dywidenda płacona w chwili I jest:
 - (a) ustaloną procentową częścią ceny instrumentu bazowego z chwili I ,
 - (b) ustaloną stałą, taką samą dla każdego scenariusza.