Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej
Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka Finansowa
Semestr zimowy 2017/2018

Modelowanie i symulacje w finansach
– WEEK 10 & 11 –
AGH AMA-2-303-MF-s

Metoda różnic skończonych

Mamy dane stochastyczne równanie różniczkowe opisujące dynamikę cen akcji

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t), \\ &f(t, S(t)) = V(t, S(t)). \end{aligned}$$

Na podstawie powyższego równania, korzystając z lematu Itô otrzymujemy następujące równanie różniczkowe cząstkowe stowarzyszone z dynamiką Blacka-Scholesa. Opisuje ono wartość strategii replikującej f opcji na akcję S.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \tag{1}$$

które sprowadzić można do równania ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}, \tag{2}$$

gdzie c jest stałą i $u(t, x(t))$. Celem jest rozwiązanie równania (1) wykorzystując przybliżenia występujących w nim pochodnych cząstkowych. Poświęćmy chwilę krótkiej dygresji na temat przybliżania pochodnych funkcji jednej zmiennej. Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^k[a, b]$. Rozwińmy g w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x \in (a, b)$. Rozważania ograniczmy do reszty rzędu h^3, przyjmując dostatecznie małe h. Możemy zapisać, że:

$$g(x + h) = g(x) + g'(x)h + g''(x)\frac{h^2}{2} + \theta(h^3), \tag{3}$$

$$g(x - h) = g(x) - g'(x)h + g''(x)\frac{h^2}{2} + \tilde{\theta}(h^3). \tag{4}$$

Jeżeli od (3) odejmiemy (4) dostaniemy (aproksymacja scentrowana)

$$g'(x) \approx \frac{g(x + h) - g(x - h)}{2h}. \tag{5}$$

Z kolei jeżeli dodamy (3) i (4) otrzymamy

$$g''(x) \approx \frac{g(x + h) - 2g(x) + g(x - h)}{h^2}. \tag{6}$$

Podobnie jak w modelu CRR zdyskretyzujmy czas (niech i będzie indeksem odpowiedzialnym za czas). Wprowadźmy w tym celu podział odcinka czasu $[0, T]$ następującej postaci

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T,$$

przy czym będzie to podział równomierny

$$\frac{T}{N} = \Delta t, \quad t_i = t_0 + i\Delta t = i\Delta t \quad \text{dla } 0 \le i \le N.$$

Kolejnym krokiem jest dyskretyzacja cen akcji (niech j będzie indeksem odpowiedzialnym za cenę akcji). Przyjmijmy, że cena akcji w rozważanych przez nas chwilach czasowych będzie nie większa niż S_{max}. Wprowadźmy podział odcinaka $[0, S_{max}]$ postaci

$$0 = S_0 < S_1 < \ldots < S_M = S_{max},$$

przy czym będzie to podział równomierny

$$\frac{S_{max}}{M} = \Delta S, \quad S_j = S_0 + j\Delta S = j\Delta S \quad \text{dla } 0 \leq j \leq M.$$

Dla dalszych rozważań przyjmijmy, że przez $f_{i,j}$ oznaczać będziemy wartość opcji w chwili i, podczas gdy indeks ceny to j, czyli

$$f_{i,j} = f(i \cdot \Delta t, j \cdot \Delta S) \tag{7}$$

Podane w (5) i (6) przybliżenia pochodnych zastosować można dla funkcji jednej zmiennej. U nas mamy do czynienia z funkcją wielu zmiennych $f(t, S(t))$ - dwóch. Czy zatem istnieje możliwość przybliżenia $\frac{\partial f}{\partial S}$, czy $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ korzystając z przybliżeń zaobserwowanych dla funkcji jednej zmiennej? Tak, wystarczy, że jedną ze zmiennych ustalimy i na funkcję f będziemy już mogli patrzeć jak na funkcję jednej zmiennej. Wykorzystując wyprowadzone przybliżenia na pochodne (5) oraz (6) dostajemy:

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta S)^2}. \tag{9}$$

Z kolei pochodną po czasie możemy przybliżyć korzystając z aproksymacji w przód w następujący sposób

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}. \tag{10}$$

Podstawiając (8), (9) i (10) do równania różniczkowego (1) stowarzyszonego z dynamiką Blacka-Scholesa otrzymujemy

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 (\Delta S)^2 \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}}{(\Delta S)^2} = rf_{i,j}. \tag{11}$$

Skracamy ΔS tam, gdzie to możliwe i obie strony równania mnożymy przez $2\Delta t$, dostajemy

$$2\left(f_{i+1,j} - f_{i,j}\right) + rj\Delta t\left(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}\right) + \sigma^2 j^2 \Delta t\left(f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1}\right) = 2r\Delta t f_{i,j}. \tag{12}$$

Grupujemy wyrazy i otrzymujemy

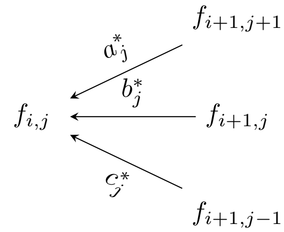
$$2\left(1 + r\Delta t\right) f_{i,j} = \left(\sigma^2 j^2 \Delta t + rj\Delta t\right) f_{i+1,j+1} + 2\left(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t\right) f_{i+1,j} + \left(\sigma^2 j^2 \Delta t - rj\Delta t\right) f_{i+1,j-1}. \tag{13}$$

Możemy zapisać, że

$$f_{i,j} = a_j^* \cdot f_{i+1,j+1} + b_j^* \cdot f_{i+1,j} + c_j^* \cdot f_{i+1,j-1}, \tag{14}$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
a_j^* &\equiv \frac{1}{2}\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\sigma^2 j^2 \Delta t + rj\Delta t\right),\\
b_j^* &\equiv \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\sigma^2 j^2 \Delta t\right),\\
c_j^* &\equiv \frac{1}{2}\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\sigma^2 j^2 \Delta t - rj\Delta t\right).
\end{aligned}
$$



Zauważmy, że suma współczynników a_j^*, b_j^*, c_j^* jest równa następującemu współczynnikowi dyskontującemu

$$
\begin{aligned}
a_j^* + b_j^* + c_j^* &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\sigma^2 j^2 \Delta t + rj\Delta t\right) + \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1-\sigma^2 j^2 \Delta t\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\sigma^2 j^2 \Delta t - rj\Delta t\right)\\
&= \frac{1}{1+r\Delta t}.
\end{aligned}
$$

cena	j
$M\Delta S$	M
$\vdots$	$\vdots$
$(J+1)\Delta S$	$J+1$
$J\Delta S$	J
$(J-1)\Delta S$	$J-1$
$\vdots$	$\vdots$
ΔS	1
0	0

$f_{0,M}$	$f_{1,M}$	$f_{2,M}$	$\dots$	$f_{I,M}$	$f_{I+1,M}$	$\dots$	$f_{N,M}$
$f_{0,J+1}$	$f_{1,J+1}$	$f_{2,J+1}$	$\dots$	$\dots$	$f_{I+1,J+1}$	$\dots$	$f_{N,J+1}$
$f_{0,J}$	$f_{1,J}$	$f_{2,J}$	$\dots$	$f_{I,J}$	$f_{I+1,J}$	$\dots$	$f_{N,J}$
$f_{0,J-1}$	$f_{1,J-1}$	$f_{2,J-1}$	$\dots$	$\dots$	$f_{I+1,J-1}$	$\dots$	$f_{N,J-1}$
$f_{0,0}$	$f_{1,0}$	$f_{2,0}$	$\dots$	$f_{I,0}$	$f_{I+1,0}$	$\dots$	$f_{N,0}$

0	1	2	$\dots$	I	$I+1$	$\dots$	N	i
0	Δt	$2\Delta t$	$\dots$	$I\Delta t$	$(I+1)\Delta t$	$\dots$	T	czas

Tabela 1: Tablica $f_{i,j}$

Formuła rekurencyjna wstecz, którą otrzymaliśmy w (14) byłaby nieprzydatna, gdybyśmy nie dysponowali wartościami f od których moglibyśmy zacząć algorytm wpisywania wartości to tabeli. Zauważmy, że dysponujemy warunkiem końcowym, który uzupełniamy w tabeli (zaznaczone kolorem pomarańczowym w Tabeli 2.). Warunek końcowy określa jaka jest wartość opcji w chwili jej wykonania przy zadanej cenie akcji (czas $= T$, $i = N$) i jest równocześnie wartością opcji w chwili jej wykonania przy danym scenariuszu, czyli na przykład dla opcji europejskiej call mamy

$$f_{N,j} = \left(S_j - K\right)_+ = \left(j\Delta S - K\right)_+,$$

z kolei dla opcji europejskiej put mamy

$$f_{N,j} = \left(K - S_j\right)_+ = \left(K - j\Delta S\right)_+.$$

Obliczone tak dla $0 \le j \le M$ wartości $f_{N,j}$ wstawiamy do tablicy w zaznaczonym na pomarańczowo miejscu - patrz Tabela 2.

Wciąż jednak nie jesteśmy w stanie wypełnić całej tablicy. Jak bowiem wyznaczyć $f_{N-1,M-1}$, czy $f_{N-1,1}$? Potrzebujemy w tym celu wprowadzić warunki brzegowe (patrz zółte komórki w Tabela 2.). Czy będą one takie same dla opcji call i put? Wyznacz te warunki.

Po wpisaniu do tabeli warunku końcowego oraz brzegowych otrzymaliśmy następującą tablicę (patrz Tablica 2), którą korzystając z (14) możemy całkowicie. Sposób wypełniania tablicy: wypełnianie pełnych kolumn idąc od końca.

cena	j							
$M\Delta S$	M	$f_{0,M}$	$f_{1,M}$	$\dots$	$f_{I,M}$	$f_{I+1,M}$	$\dots$	$f_{N,M}$
$\vdots$	$\vdots$							
$(J+1)\Delta S$	$J+1$	$f_{0,J+1}$	$f_{1,J+1}$	$\dots$	$\dots$	$f_{I+1,J+1}$	$\dots$	$f_{N,J+1}$
$J\Delta S$	J	$f_{0,J}$	$f_{1,J}$	$\dots$	$f_{I,J}$	$f_{I+1,J}$	$\dots$	$f_{N,J}$
$(J-1)\Delta S$	$J-1$	$f_{0,J-1}$	$f_{1,J-1}$	$\dots$	$\dots$	$f_{I+1,J-1}$	$\dots$	$f_{N,J-1}$
$\vdots$	$\vdots$							
ΔS	1							
0	0	$f_{0,0}$	$f_{1,0}$	$\dots$	$f_{I,0}$	$f_{I+1,0}$	$\dots$	$f_{N,0}$

0	1	$\dots$	I	$I+1$	$\dots$	N	i
0	Δt	$\dots$	$I\Delta t$	$(I+1)\Delta t$	$\dots$	T	czas

Tabela 2: Tablica $f_{i,j}$ z zaznaczonymi warunkiem końcowym (na pomarańczowo) oraz warunkami brzegowymi (na żółto).

Zadania

1. Sprowadź równanie (1) do postaci równania ciepła (2).

2. W pliku, w którym pracujesz zmień nazwy dwóch nowoutworzonych arkuszy na `MRR_EA_call` i `MRR_EA_put`. W tych arkuszach wpisz potrzebne do wyceny opcji dane. Korzystając z przedstawionej metody różnic skończonych zaprojektuj arkusze tak, by uzupełniały tablicę podobną do tej z Tabeli 2. Nie korzystaj przy tym z `VBA`. Komórka z ceną opcji powinna automatycznie podświetlać się na żółto.

3. W pliku, w którym pracujesz zmień nazwy dwóch nowoutworzonych arkuszy na `MRR_EV_call` i `MRR_EV_put`. Wykonaj polecenie pierwsze używając tym razem `VBA`. W arkuszu umieść przycisk wywołujący makro. Pamiętaj o zaznaczeniu na żółto obliczonej ceny opcji. Porównaj wyniki otrzymane w zadaniu pierwszym i drugim.