Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej
Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka Finansowa
Semestr zimowy 2018/2019

Modelowanie i symulacje w finansach
– WEEK 12 & 13 –
AGH AMA-2-303-MF-s

Niejawna metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych polega na przybliżeniu rozwiązania równania różniczkowego stowarzyszonego z dynamiką Blacka-Scholesa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \tag{1}$$

Aby znaleźć to rozwiązanie przybliżamy pochodne wykorzystując znane metody aproksymacji przy założeniu dostatecznie małych Δt oraz ΔS, przy czym Δt i ΔS są ściśle związane z wprowadzonym podziałem odcinka $[0, T]$ i $[0, S_{max}]$ podczas opisu metody jawnej (Week 10 & 11). W metodzie jawnej przybliżaliśmy pochodne po cenie rozważając je dla ustalonej chwili $i + 1$, wydawało się to być nienaturalne, jednak rezultaty jakie otrzymaliśmy zachęcały nas do tego podejścia. Korzystając bowiem z metody jawnej mogliśmy wypełnić tablicę wartości opcji korzystając z prostego wzoru. Pytanie co otrzymamy, gdy pochodne po cenie przybliżać będziemy dla ustalonej chwili i? Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta S)^2}. \tag{3}$$

Z kolei pochodną po czasie przybliżamy korzystając z aproksymacji w przód (sposób aproksymacji taki, jak przy metodzie jawnej) w następujący sposób

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}. \tag{4}$$

Podstawiając (2), (3) i (4) do równania różniczkowego (1) stowarzyszonego z dynamiką Blacka-Scholesa otrzymujemy

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 (\Delta S)^2 \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta S)^2} = rf_{i,j}.$$

Skracamy ΔS tam, gdzie to możliwe i obie strony równania mnożymy przez $2\Delta t$, dostajemy

$$2\left(f_{i+1,j} - f_{i,j}\right) + rj\Delta t\left(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}\right) + \sigma^2 j^2 \Delta t\left(f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}\right) = 2r\Delta t f_{i,j},$$
$$2r\Delta t f_{i,j} + 2f_{i,j} - rj\Delta t\left(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}\right) - \sigma^2 j^2 \Delta t\left(f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}\right) = 2f_{i+1,j}.$$

Grupujemy wyrazy i otrzymujemy

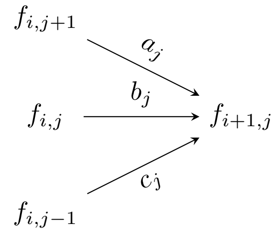
$$\frac{1}{2}\left(-rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t\right) f_{i,j+1} + \left(1 + r\Delta t + \sigma^2 j^2 \Delta t\right) f_{i,j} + \frac{1}{2}\left(rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t\right) f_{i,j-1} = f_{i+1,j}.$$

Możemy zapisać, że

$$a_j \cdot f_{i,j+1} + b_j \cdot f_{i,j} + c_j \cdot f_{i,j-1} = f_{i+1,j}, \tag{5}$$

przy czym:

$$
\begin{aligned}
a_j &\equiv \frac{1}{2}\left(-rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t\right),\\
b_j &\equiv 1 + r\Delta t + \sigma^2 j^2 \Delta t,\\
c_j &\equiv \frac{1}{2}\left(rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t\right).
\end{aligned}
$$



Suma współczynników a_j, b_j, c_j jest równa (jaka może być jej interpretacja?)

$$
\begin{aligned}
a_j + b_j + c_j &= \frac{1}{2}\left(-rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t\right) + 1 + r\Delta t + \sigma^2 j^2 \Delta t + \frac{1}{2}\left(rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t\right)\\
&= 1 + r\Delta t.
\end{aligned}
$$

Podobnie jak dla metody jawnej informacje o wartości opcji przechowywać będziemy w Tablicy 1. Standardowo, do tabeli wpisujemy warunek końcowy oraz warunki brzegowe. Metoda niejawna w odróżnieniu

cena	j							
$M\Delta S$	M	$f_{0,M}$	$f_{1,M}$	$\dots$	$f_{I,M}$	$f_{I+1,M}$	$\dots$	$f_{N,M}$
$\vdots$	$\vdots$							
$(J+1)\Delta S$	$J+1$	$f_{0,J+1}$	$f_{1,J+1}$	$\dots$	$f_{I,J+1}$	$\dots$	$\dots$	$f_{N,J+1}$
$J\Delta S$	J	$f_{0,J}$	$f_{1,J}$	$\dots$	$f_{I,J}$	$f_{I+1,J}$	$\dots$	$f_{N,J}$
$(J-1)\Delta S$	$J-1$	$f_{0,J-1}$	$f_{1,J-1}$	$\dots$	$f_{I,J-1}$	$\dots$	$\dots$	$f_{N,J-1}$
$\vdots$	$\vdots$							
ΔS	1							
0	0	$f_{0,0}$	$f_{1,0}$	$\dots$	$f_{I,0}$	$f_{I+1,0}$	$\dots$	$f_{N,0}$

0	1	$\dots$	I	$I+1$	$\dots$	N	i
0	Δt	$\dots$	$I\Delta t$	$(I+1)\Delta t$	$\dots$	T	czas

Tabela 1: Tablica $f_{i,j}$ z zaznaczonymi warunkiem końcowym (na pomarańczowo) oraz warunkami brzegowymi (na żółto).

od metody jawnej nie podaje prostego przepisu na postać kolejnych elementów kolumny poprzedzającej kolumnę już wypełnioną, proces ich wyznaczania jest bardziej skomplikowany. Mianowicie, dla każdego $i \in \{N-1, \dots, 0\}$ (nieprzypadkowo tak przedstawiamy ten zbiór, dlaczego?) mamy do rozwiązania układ $M-1$ równań, zobacz równanie (5). Jak zmienia się j i ile jest niewiadomych? Dla ustalonego i mamy układ

$$
\begin{cases}
a_{M-1} f_{i,M} + b_{M-1} f_{i,M-1} + c_{M-1} f_{i,M-2} = f_{i+1,M-1} & \\
a_j f_{i,j+1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j-1} = f_{i+1,j} & \text{dla } j \in \{2, \dots, M-2\}\\
a_1 f_{i,2} + b_1 f_{i,1} + c_1 f_{i,0} = f_{i+1,1}. &
\end{cases}
$$

Niewiadomymi są $f_{i,j}$ przy $j \in \{1, \dots, M-1\}$ (zaznacz je w powyższym układzie), ponieważ wartości $f_{i,0}$ oraz $f_{i,M}$ znamy - mamy je z warunków brzegowych. Przenosimy wiadome na prawą stronę znaku równości, wtedy otrzymujemy

$$
\begin{cases}
b_{M-1} f_{i,M-1} + c_{M-1} f_{i,M-2} = f_{i+1,M-1} - a_{M-1} f_{i,M} & \\
a_j f_{i,j+1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j-1} = f_{i+1,j} & \text{dla } j \in \{2, \dots, M-2\}\\
a_1 f_{i,2} + b_1 f_{i,1} = f_{i+1,1} - c_1 f_{i,0}. &
\end{cases}
$$

Układ ten możemy, korzystając z notacji macierzowej, zapisać jako

$$\begin{pmatrix} b_{M-1} & c_{M-1} & & & & & \\ a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} & & & & \\ & a_{M-3} & b_{M-3} & c_{M-3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & & & a_2 & b_2 & c_2 \\ & & & & & a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,M-1} \\ f_{i,M-2} \\ f_{i,M-3} \\ \vdots \\ f_{i,3} \\ f_{i,2} \\ f_{i,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i+1,M-1} - a_{M-1} f_{i,M} \\ f_{i+1,M-2} \\ f_{i+1,M-3} \\ \vdots \\ f_{i+1,3} \\ f_{i+1,2} \\ f_{i+1,1} - c_1 f_{i,0} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Mamy zatem do rozwiązania równanie macierzowe postaci $Ax = y$ (jak wyglądają dla naszego problemu x oraz y?), przy czym macierz A jest trójdiagonalna (inaczej wstęgowa). Zaimplementowanie uwikłanej metody różnic skończonych w `VBA` sprowadzi się do wyznaczenia rozwiązania tych równań. Piszemy równań, ponieważ jest ich N, gdyż w (6) indeks czasu $i \in \{N-1, \ldots, 0\}$. W celu rozwiązania każdego z nich macierz A (zauważ, że macierz A jest taka sama dla każdego spośród N układów) przedstawimy w postaci iloczynu macierzy $A = LU$, gdzie L będzie macierzą trójkątną dolną, natomiast U macierzą trójkątną górną (to tak zwany rozkład LU macierzy). Gdy to zrobimy otrzymamy równanie

$$LUx = y,$$

którego rozwiązanie otrzymamy rozwiązując jako pierwsze równanie

$$Lz = y \tag{7}$$

i jego rozwiązanie podstawiając jako wyraz wolny do kolejnego równania, mianowicie

$$Ux = z, \tag{8}$$

którego rozwiązaniem jest szukane przez nas x. Dlaczego takie podejście do problemu jest lepsze? Wystarczy spojrzeć na postać macierzy L, bądź U, by przekonać się, że rozwiązywanie równań (7) i (8) jest łatwe do zaimplementowania, ponieważ macierze główne tych układów są trójkątne. Przejdziemy teraz do wyznaczenia macierzy L i U, których to iloczyn daje macierz A. Okazuje się, że macierze L oraz U będą miały postaci:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_{M-1} & 1 & & & & & \\ & l_{M-2} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & l_4 & 1 & & \\ & & & & l_3 & 1 & \\ & & & & & l_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{M-1} & c_{M-1} & & & & & \\ & u_{M-2} & c_{M-2} & & & & \\ & & u_{M-3} & c_{M-3} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & u_3 & c_3 & \\ & & & & & u_2 & c_2 \\ & & & & & & u_1 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczmy l_j oraz u_j odpowiednio dla $j \in \{2, \ldots, M-1\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, M-1\}$. W tym celu mnożymy macierze L i U i porównajmy z macierzą A, otóż

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_{M-1} & 1 & & & & & \\ & l_{M-2} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & l_4 & 1 & & \\ & & & & l_3 & 1 & \\ & & & & & l_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{M-1} & c_{M-1} & & & & & \\ & u_{M-2} & c_{M-2} & & & & \\ & & u_{M-3} & c_{M-3} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & u_3 & c_3 & \\ & & & & & u_2 & c_2 \\ & & & & & & u_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{M-1} & c_{M-1} & & & & & \\ l_{M-1}u_{M-1} & l_{M-1}c_{M-1}+u_{M-2} & c_{M-2} & & & & \\ & l_{M-2}u_{M-2} & l_{M-2}c_{M-2}+u_{M-3} & c_{M-3} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & l_4u_4 & l_4c_4+u_3 & c_3 & & \\ & & & l_3u_3 & l_3c_3+u_2 & c_2 & \\ & & & & l_2u_2 & l_2c_2+u_1 & \end{pmatrix},$$

Macierze A oraz LU będziemy porównywać patrząc na kolejne wiersze. Wcześniej, zauważmy jednak, że elementy powyżej diagonali zgadzają się, toteż nie zajmujemy się nimi w dalszej analizie. Dla pierwszego wiersza mamy dwa niezerowe elementy, przy czym interesuje nas tylko jeden (gdyż c_{M-1} jest już dobrze wyznaczony)

$$u_{M-1} = b_{M-1}.$$

Dla drugiego wiersza otrzymujemy:

$$\begin{aligned} l_{M-1}u_{M-1} &= a_{M-2}, & l_{M-1} &= \frac{a_{M-2}}{u_{M-1}}, \\ l_{M-1}c_{M-1} + u_{M-2} &= b_{M-2}, & u_{M-2} &= b_{M-2} - l_{M-1}c_{M-1}. \end{aligned}$$

Przyspieszamy analizę, rozważmy $k+1$-wszy wiersz, przy czym $k+1 \in \{2,3,\ldots,M-1\}$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} l_{M-k}u_{M-k} &= a_{M-k-1}, & l_{M-k} &= \frac{a_{M-k-1}}{u_{M-k}}, \\ l_{M-k}c_{M-k} + u_{M-k-1} &= b_{M-k-1}, & u_{M-k-1} &= b_{M-k-1} - l_{M-k}c_{M-k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Podsumowując to, co otrzymaliśmy możemy zapisać, że:

$$\begin{aligned} u_{M-1} &= b_{M-1}, \\ l_{M-k} &= \frac{a_{M-k-1}}{u_{M-k}}, && \text{dla } k \in \{1,2,3,\ldots,M-2\}, \\ u_{M-k} &= b_{M-k} - l_{M-k+1}c_{M-k+1}, && \text{dla } k \in \{2,3,\ldots,M-1\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Zapisana powyżej kolejność wyrazów zbioru do którego należy k nie jest przypadkowa, wyrazy ciągów l oraz u wyznaczamy od wyrazów o największych indeksach, zaczynając od wyrazów o indeksie $M-1$, przy czym niezwykle ważna jest kolejność ich wyznaczania

$$u_{M-1}, l_{M-1}, u_{M-2}, l_{M-2}, \ldots, u_2, l_2, u_1$$

i jest ona niejako (patrz na wypisaną kolejność i powyższe wzory) rekurencyjna, gdyż aby wyznaczyć u_{M-k} musimy znać l_{M-k+1}. Sposobów wyznaczania tych ciągów jest kilka, poniżej przedstawiono dwa schematy, które wynikają bezpośrednio z zawartych w tym opracowaniu obliczeń. Otóż można:

(a) wyznaczyć u_{M-1} oraz l_{M-1}, a następnie dla $k \in \{2, 3, \ldots, M-2\}$ jednocześnie wyznaczać pary u_{M-k}, l_{M-k}, by na końcu osobno wyznaczyć u_1 (podejście skojarzone z równaniami (10)).

$$u_{M-1}, l_{M-1}, (u_{M-2}, l_{M-2}), (u_{M-3}, l_{M-3}), \ldots, (u_2, l_2), u_1.$$

(b) wyznaczyć u_{M-1}, następnie dla $k \in \{1, 2, 3, \ldots, M-2\}$ jednocześnie wyznaczyć pary l_{M-k}, u_{M-k-1} (podejście skojarzone z równaniami (9)).

$$u_{M-1}, (l_{M-1}, u_{M-2}), (l_{M-2}, u_{M-3}) \ldots, (l_3, u_2), (l_2, u_1).$$

$a_j \rightarrow$				a_{M-3}	a_{M-2}	a_{M-1}
$b_j \rightarrow$				b_{M-3}	b_{M-2}	b_{M-1}
$c_j \rightarrow$				c_{M-3}	c_{M-2}	c_{M-1}

$u_j \rightarrow$					$b_{M-2} - l_{M-1}c_{M-1}$	b_{M-1}
$l_j \rightarrow$					$\frac{a_{M-3}}{u_{M-2}}$	$\frac{a_{M-2}}{u_{M-1}}$

$j \rightarrow$	1	2	...	$M-3$	$M-2$	$M-1$
$k \rightarrow$	$M-1$	$M-2$	...	3	2	1

Tabela 2: Tablice z wyrazami ciągów a, b, c wraz z konstruowanymi na ich podstawie ciągami u oraz l.

Dysponując wiedzą o wyrazach macierzy L oraz U obliczamy z równań (7) i (8) przechodzimy do rozwiązywania układów $Lz = y$ oraz $Ux = z$. Przyjrzyjmy się dokładniej jak znaleźć ich rozwiązania. Zacznijmy od układu $Lz = y$ (zwróć uwagę na indeksowanie elementów wektora y oraz z, wynika ono z chęci upodobnienia sposobu indeksowania do tego z równania (6)).

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ l_{M-1} & 1 & & & & & \\ & l_{M-2} & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & l_4 & 1 & & \\ & & & & l_3 & 1 & \\ & & & & & l_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{M-1} \\ z_{M-2} \\ z_{M-3} \\ \vdots \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{M-1} \\ y_{M-2} \\ y_{M-3} \\ \vdots \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} z_{M-1} = y_{M-1} \\ l_{M-1}z_{M-1} + z_{M-2} = y_{M-2} \\ l_{M-2}z_{M-2} + z_{M-3} = y_{M-3} \\ \vdots \\ l_3 z_3 + z_2 = y_2 \\ l_2 z_2 + z_1 = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{M-1} = y_{M-1} \\ z_{M-2} = y_{M-2} - l_{M-1}z_{M-1} \\ z_{M-3} = y_{M-3} - l_{M-2}z_{M-2} \\ \vdots \\ z_2 = y_2 - l_3 z_3 \\ z_1 = y_1 - l_2 z_2 \end{cases}$$

Wobec tego mamy

$$\begin{aligned} &z_{M-1} = y_{M-1}, \\ &z_{M-k} = y_{M-k} - l_{M-k+1}z_{M-k+1} \text{ dla } k \in \{2, 3, \ldots, M-1\}. \end{aligned}$$

Otrzymany właśnie wektor z staje się wektorem wyrazów wolnych w równaniu $Ux = z$, którego rozwiązanie jest nieco bardziej czasochłonne, a to dlatego, że na diagonali nie mamy jedynek i będziemy musieli dodatkowo wykonywać dzielenie.

$$\begin{pmatrix} u_{M-1} & c_{M-1} & & & & & \\ & u_{M-2} & c_{M-2} & & & & \\ & & u_{M-3} & c_{M-3} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & u_3 & c_3 & \\ & & & & & u_2 & c_2 \\ & & & & & & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{M-1} \\ x_{M-2} \\ x_{M-3} \\ \vdots \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{M-1} \\ z_{M-2} \\ z_{M-3} \\ \vdots \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} u_{M-1}x_{M-1} + c_{M-1}x_{M-2} = z_{M-1} \\ u_{M-2}x_{M-2} + c_{M-2}x_{M-3} = z_{M-2} \\ \vdots \\ u_3x_3 + c_3x_2 = z_3 \\ u_2x_2 + c_2x_1 = z_2 \\ u_1x_1 = z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{M-1} = \frac{z_{M-1} - c_{M-1}x_{M-2}}{u_{M-1}} \\ x_{M-2} = \frac{z_{M-2} - c_{M-2}x_{M-3}}{u_{M-2}} \\ \vdots \\ x_3 = \frac{z_3 - c_3 {\color{blue}x_2}}{u_3} \\ {\color{blue}x_2} = \frac{z_2 - c_2 {\color{red}x_1}}{u_2} \\ {\color{red}x_1} = \frac{z_1}{u_1} \end{cases}$$

Stąd dostajemy

$$x_1 = \frac{z_1}{u_1},$$
$$x_j = \frac{z_j - c_j x_{j-1}}{u_j} \text{ dla } j \in \{2, 3, \ldots, M-1\}.$$

Zadania

1. W pliku, w którym pracujesz zmień nazwy dwóch nowo utworzonych arkuszy na `MRR_I_call` i `MRR_I_put`. W tych arkuszach wpisz potrzebne do wyceny opcji dane, które pobierać będziesz do `VBA`. Korzystając z niejawnej metody różnic skończonych zbuduj w `VBA` makro, które wypisze do arkusza tablicę podobną do Tablica 1. Z prawej jej strony wypisz tablice współczynników a, b, c oraz u, l. Pod tabelą wypisz macierz A, L oraz U. Komórka z ceną opcji powinna automatycznie podświetlać się na żółto.