INDUKCJA MATEMATYCZNA

RATOWNIK

$\boxed{\textbf{Indukcja matematyczna}}$ Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ spełniona jest następująca własność. Suma kwadratów n początkowych, kolejnych liczb nieparzystych jest równa

$$\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}.$$

Nim przejdę do przedstawienia rozwiązania powyższego problemu, czyli dowodu podanej powyżej własności, przyglądnę się kilku szczegółom związanych z tym zadaniem.

Po pierwsze zastanowię się jakie liczby podniesione do potęgi drugiej będę sumować. Wiem, że mają to być kolejne liczby nieparzyste, zaczynając od jeden (bo jeden uznaję za najmniejszą liczbę nieparzystą), czyli kolejno $1, 3, 5, \ldots$ Skoro sumować mam n liczb, to zasadne wydaje się pytanie jaka liczba będzie ostatnią z sumowanych i jak ją przedstawić. Najwygodniej będzie, gdy ustawię te n liczb (stworzę ciąg) w kolejności rosnącej, zachowuję w ten sposób pewien porządek. Każdej z sumowanych liczb nadam etykietę, informującą o tym którą z kolei spośród sumowanych jest ta liczba. Pierwszą liczbą będzie najmniejsza liczba naturalna nieparzysta, czyli jeden, drugą liczbą będzie liczba o $\boxed{}$ większa od jeden, czyli trzy, trzecią liczbą będzie liczba o $\boxed{}$ większa od trzech, czyli $\boxed{}$, itd. Różnica pomiędzy kolejnymi liczbami nieparzystymi zawsze wynosi $\boxed{}$ (od większej odejmuję mniejszą). Można zatem dojść do wniosku, że n-tą początkową (licząc od jeden) liczbę nieparzystą można przedstawić jako

$$1+2\cdot\left(\boxed{}\right)=\boxed{}.$$

Korzystając z tej własności uzupełnię tabelę przedstawioną poniżej. Szczególną uwagę zwrócić należy na postać $n-1$-wszej oraz $n+1$-wszej liczby nieparzystej.

liczba nieparzysta	1	3	5		...				
kolejność liczb, która to?	1	2			...		$n-1$	n	$n+1$

Teraz jestem już gotowy(-a) w sposób bardziej formalny zapisać tezę twierdzenia z zadania, używając kwantyfikatora *dla każdego*. Otóż dowieść mam następujące twierdzenie

$$\forall\ \boxed{}\ :\ \underbrace{\boxed{}+\boxed{}+\ldots+\boxed{}}_{n \text{ elementów sumy}}=\underline{}. \tag{1}$$

W wyrażeniu (1) kolorem zaznaczono fragment, w którym dla pewnej liczby n, oznaczającej liczbę sumowanych elementów, sformułowano własność, o której mowa w zadaniu ($w(n)$). Przed tym wyrażeniem mowa jest o tym, dla jakich liczb n wyrażenie to ma być prawdziwe.

Poniżej sformułuję tę samą własność, tyle że dla pewnej (dowolnej, ale nie wybieranej konkretnie) liczby naturalnej $n-1$ i określę dla jakich liczb n wyrażenie to jest prawdziwe (skoro wiadomo, że stwierdzenie (1) jest prawdziwe). Otóż dla każdego naturalnego $n-1 \geq \boxed{} \iff n \geq \boxed{}$ zachodzi następująca równość

$$\underbrace{\boxed{}+\boxed{}+\ldots+\boxed{}}_{n-1 \text{ składników}}=\underline{}.$$

Z kolei dla pewnej (dowolnej, nie konkretnej) liczby naturalnej $n+1$ własność ta przyjmuje postać

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{}+\boxed{}+\ldots+\boxed{}}_{\boxed{} \text{ składników}}+\boxed{}}_{\boxed{} \text{ składników}}=\underline{}.$$

Należy podkreślić, że własność ta zachodzi dla każdej liczby naturalnej n dla której $n+1 \geq \boxed{}$, czyli dla każdej liczby naturalnej $n \geq \boxed{}$.

Dowód indukcyjny

Krok 1. Sprawdzam, czy własność zachodzi dla $n = \boxed{}$. Obliczam lewą stronę równości z (1) podstawiając $n = \boxed{}$, dostaję $\boxed{}$.
Obliczam również wartość wyrażenia stojącego po prawej stronie w wyrażeniu (1) otrzymuję, że $\boxed{}$. Podsumowując, dla $\boxed{}$ własność $\boxed{}$.

Krok 2. Pokażę prawdziwość implikacji (dla każdego $k \geq 1$): jeżeli własność zachodzi dla pewnej liczby k, to zachodzi dla liczby $k+1$ ($w(k) \Rightarrow w(k+1)$). Założenie indukcyjne przyjmuje postać

$$\underbrace{\boxed{} + \boxed{} + \ldots + \boxed{}}_{\boxed{}\text{ składników}} = \frac{}{}. \tag{2}$$

Korzystając z założenia indukcyjnego (podanego w (2)) pokażę, że

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{} + \boxed{} + \ldots + \boxed{}}_{\boxed{}\text{ składników}} + \boxed{}}_{\boxed{}\text{ składników}} = \frac{}{}. \tag{3}$$

Na potrzeby dowodu stwierdzenia, że dla każdego $k \geq 1$ prawdziwa jest implikacja $w(k) \Rightarrow w(k+1)$, ustalam liczbę naturalną $k \geq 1$ (k jest ustalone, ale nie jest konkretne bo jest ono dowolnie wybrane spośród możliwych, stąd jest dowolne tzn. nie ograniczam się do jakiegoś konkretnego k, powiedzmy $k = 5$, czy też do k parzystych, tylko rozważam wszystkie możliwości w jednym podejściu, w przypadku problemów dokonam podziału moich rozważań na przypadki - postępuję podobnie, jak w zadaniach z parametrem k, dopóki nie ma problemów k traktuję w nich jak pewną dowolną liczbę; ustaloną, ale nie konkretną).

Aby pokazać, że dla ustalonego $k \geq 1$ równość (3) jest spełniona wyjdę z jej $\boxed{}$ strony, by dojść do tego, co jest po jej $\boxed{}$. Zrobię to wykorzystując $\boxed{}$, podane w (2). Szczególną uwagę zwrócę na moment wykorzystania tego założenia, napiszę wtedy $\overset{\text{zał. ind.}}{=}$, by wyraźnie wskazać, w którym przejściu z niego korzystam. W przypadku, gdyby okazało się, że wychodząc z jednej (np. lewej) strony trudno wprost dojść do wyrażenia z drugiej strony (wtedy prawej) równości (3), to dodatkowo wyjdę od wyrażenia (po prawej), przedstawiając je w taki sposób, by możliwe było stwierdzenie, czy wyrażenie to jest tożsame z tym na którym utknąłem(-ełam). Innymi słowy, prowadzę dodatkowo dowód od końca (tak też zapisując co otrzymuję); wychodząc od tego co chcę uzyskać, do momentu, w którym utknąłem(-ełam).

INDUKCJA MATEMATYCZNA
RATOWNIK

Uwaga: Zapisując własność dla liczby $k+1$, ewentualnie $k-1$ szczególną uwagę należy zwrócić na podstawienie w miejsce n odpowiednio $k+1$, ewentualnie $k-1$; użycie nawiasów zmniejszy prawdopodobieństwo błędów. Toteż za n podstawiam $(k+1)$ bądź $(k-1)$.

Pytanie: Warto zaznaczyć, że w drugim kroku dowodu indukcyjnego równie dobrze moglibyśmy pokazać, że zachodzi implikacja postaci; *jeżeli własność zachodzi dla liczby* $k-1 \geq 1$, *to zachodzi dla liczby* k (w skrócie $w(k-1) \Rightarrow w(k)$). Jaką postać przyjęłoby wtedy założenie, a jaką teza indukcyjna?

Wykazałem(-am) wobec tego, że ______.

□