Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a

Twierdzenie (Rolle'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale* $[a, b]$*,*
- *różniczkowalna w* (a, b)*,*
- *oraz* $f(a) = f(b)$*,*

to wtedy

Twierdzenie Rolle'a

Twierdzenie (Rolle'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale $[a, b]$,*
- *różniczkowalna w (a, b),*
- *oraz $f(a) = f(b)$,*

to wtedy **istnieje**

Twierdzenie (Rolle'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale $[a, b]$,*
- *różniczkowalna w (a, b),*
- *oraz $f(a) = f(b)$,*

to wtedy **istnieje** $c \in (a, b)$ *taki, że*

Twierdzenie (Rolle'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale* $[a, b]$,
- *różniczkowalna w* (a, b),
- *oraz* $f(a) = f(b)$,

to wtedy **istnieje** $c \in (a, b)$ *taki, że* $f'(c) = 0$.

Twierdzenie (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale $[a, b]$,*
- *różniczkowalna w (a, b),*

to wtedy

Twierdzenie Lagrange'a

Twierdzenie (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale* $[a, b]$,
- *różniczkowalna w* (a, b),

to wtedy **istnieje**

Twierdzenie (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f jest

- *ciągła w przedziale $[a, b]$,*
- *różniczkowalna w (a, b),*

to wtedy **istnieje** $c \in (a, b)$ *taki, że*

Twierdzenie (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f *jest*

- *ciągła w przedziale* $[a, b]$,
- *różniczkowalna w* (a, b),

to wtedy **istnieje** $c \in (a, b)$ *taki, że* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Prosta przechodząca przez ...

Prosta łącząca punkty wykresu funkcji $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$ ma postać

$$\Big(y - f(a)\Big) \cdot (b - a) = \Big(f(b) - f(a)\Big) \cdot (x - a),$$

Prosta przechodząca przez ...

Prosta łącząca punkty wykresu funkcji $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$ ma postać

$$\Big(y - f(a)\Big) \cdot (b - a) = \Big(f(b) - f(a)\Big) \cdot (x - a),$$

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a.$$

A gdyby tak, wykorzystując twierdzenie Lagrange'a, dało się dowodzić niektóre nierówności

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Mam pokazać, że dla $x \in (0, \infty)$ (**o to przecież przedział**)

$$\ln(1+x) < x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Mam pokazać, że dla $x \in (0, \infty)$ (**o to przecież przedział**)

$$\ln(1+x) < x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0}$$

Wybór funkcji $f(x) = \ln(x+1)$.

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Mam pokazać, że dla $x \in (0, \infty)$ (**o to przecież przedział**)

$$\ln(1+x) < x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0}$$

Wybór funkcji $f(x) = \ln(x+1)$.

Wybór funkcji $f(t) = \ln(t+1)$.

Korzystając z ..., wykaż, że ...

Mam pokazać, że dla $x \in (0, \infty)$ (**o to przecież przedział**)

$$\ln(1+x) < x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0}$$

Wybór funkcji $f(t) = \ln(t+1)$.
Wybór końców przedziału (a, b); $a = 0$, $b = x$; dowolne $x \in (0, \infty)$.

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Mam pokazać, że dla $x \in (0, \infty)$ (**o to przecież przedział**)

$$\ln(1+x) < x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0}$$

Wybór funkcji $f(t) = \ln(t+1)$.
Wybór końców przedziału (a, b); $a = 0$, $b = x$; dowolne $x \in (0, \infty)$.
Wyznaczam pochodną funkcji f, dostając $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Mam pokazać, że dla $x \in (0, \infty)$ (**o to przecież przedział**)

$$\ln(1+x) < x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0}$$

Wybór funkcji $f(t) = \ln(t+1)$.
Wybór końców przedziału (a, b); $a = 0$, $b = x$; dowolne $x \in (0, \infty)$.

Wyznaczam pochodną funkcji f, dostając $f'(t) = \frac{1}{t+1}$.

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Z twierdzenia Lagrange'a wiem, że dla każdego $x \in (0, \infty)$ znajdę punkt c taki, że

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Z twierdzenia Lagrange'a wiem, że dla każdego $x \in (0, \infty)$ znajdę punkt c taki, że

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

ale to jest równość, a ja chcę nierówność.

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Z twierdzenia Lagrange'a wiem, że dla każdego $x \in (0, \infty)$ znajdę punkt c taki, że

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

ale to jest równość, a ja chcę nierówność.

Ale wiem też, że wtedy $c \in (0, \infty)$, i znam jawną postać funkcji pochodnej, toteż jej wyznaczenie w punkcie c nie jest problemem, mam

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Z twierdzenia Lagrange'a wiem, że dla każdego $x \in (0, \infty)$ znajdę punkt c taki, że

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

ale to jest równość, a ja chcę nierówność.

Ale wiem też, że wtedy $c \in (0, \infty)$, i znam jawną postać funkcji pochodnej, toteż jej wyznaczenie w punkcie c nie jest problemem, mam

$$f'(c) = \frac{1}{c+1},$$

naszkicuję wykres, bo zmienia się . . . , no właśnie co jest argumentem?.

Nietrudno uzasadnić, że gdy $c \in (0, \infty)$, to

Nietrudno uzasadnić, że gdy $c \in (0, \infty)$, to

$$f'(c) = \frac{1}{c+1} > \quad , \qquad f'(c) = \frac{1}{c+1} < \quad .$$

Korzystając z . . . , wykaż, że . . .

Nietrudno uzasadnić, że gdy $c \in (0, \infty)$, to

$$f'(c) = \frac{1}{c+1} > 0, \qquad f'(c) = \frac{1}{c+1} < \quad .$$

Wskazaliśmy zatem, że funkcja pochodna jest ograniczona na $(0, \infty)$, jakie ma to znaczenie?

Nietrudno uzasadnić, że gdy $c \in (0, \infty)$, to

$$f'(c) = \frac{1}{c+1} > 0, \qquad f'(c) = \frac{1}{c+1} < 1.$$

Wskazaliśmy zatem, że funkcja pochodna jest ograniczona na $(0, \infty)$, jakie ma to znaczenie?
Którą z nierówności wykorzystam, by z sukcesem zakończyć dowód?