Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Materiałowej i Informatyki
Kierunek: Informatyka Stosowana
Semestr letni 2017/2018

Statystyka i opracowanie danych – REVIEW TIPS AND HINTS– AGH MIS-1-203-s

1. Oblicz granice:
   (a) $\lim_{x\to 0} xe^{-x}$,
   (b) $\lim_{x\to \infty} xe^{-x}$.

2. Oblicz pochodne następujących funkcji zmiennej x:
   (a) $f_1(x) = e^{-x}$,
   (b) $f_2(x) = e^{-x^2}$.

3. Funkcję e^x można rozwinąć w szereg Maclaurina otrzymując $e^\lambda \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$. Oblicz:
   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$,
   Czy $e^{-\lambda}$ zależy od k? Czy wobec tego można ten czynnik wyciągnąć przed znak sumy?
   (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$,
   W tej sumie zaczynamy sumować od $k = 2$. Skoro tak, to jest to suma taka jak powyżej, ale bez pierwszych dwóch składników ($k = 0, 1$). Może wygodnie będzie je odjąć.
   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda}$,
   W mianowniku pojawiło się $(k + 1)!$ zamiast $k!$. Sumę pomnóż i podziel przez λ. Wejdź pod znak sumy z λ, otrzymasz wtedy $\lambda\lambda^k$ (działania na potęgach). Mając $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ zastanów się jak to się ma do $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ (zawsze możesz wypisać kilka pierwszych składników tej sumy) i postępuj jak w (b). Przykład zmiany kolejności sumowania, czyli tego co jest proponowane w tej wskazówce: $\sum_{k=0}^{\infty}(k + 1)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$.
   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$,
   Wypisz pierwszy element tej sumy. Ile będzie równy? Następnie w sumie, która pozostała skróć k z $k! = (k - 1)!k$. Dalej postępuj podobnie jak w poprzednim przykładzie, z tym że teraz sumę od $k = 1$ zamieniać będziesz na sumę od $k = 0$.
   (e) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$,
   Sprowadza się do wykorzystania wskazówki z (d).

4. Dla $p \in (0, 1)$ i ustalonego naturalnego $n > 0$ oblicz:
   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$,
   Sprawdź dwumian Newtona.
   (b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$,
   Wypisz pierwszy element sumy, czyli ten dla $k = 0$. W pozostałej sumie skróć $k\binom{n}{k}$. Wykorzystaj ideę metody przedstawionej w 3(d).

5. Dla $\lambda > 0$ oblicz:
   (a) $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$,
   Prosta całka do policzenia. Policz pochodną funkcji $-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.
   (b) $\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$,
   Prosta całka do policzenia przez części $u = x$, $v' = e^{-\lambda x}$.
   (c) $\int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$,
   Całka do policzenia całkując dwa razy przez części $u = x^2$, $v' = e^{-\lambda x}$ i dalej jak w (b).

6. Wiedząc, że $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, dla dowolnego $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ oblicz:

(a) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$,
Funkcje mogą być różne, mogą być na przykład parzyste. Co wiesz o całkowaniu takich funkcji? Jaka jest funkcja pod znakiem całki? Porównaj przedział całkowania z przedziałem całkowania podanej w treści zadania całki.

(b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$,
Zastosuj podstawienie $t = \frac{x}{\sigma}$, *nie zapomnij o wyznaczeniu nowych granic całkowania.*

(c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$,
Zastosuj podstawienie podobne do tego z poprzedniego podpunktu. Pamiętaj, że dążysz do sprowadzenia tej całki do całki wskazanej w treści zadania, którą już znasz.

(d) $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2-2x\mu}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$,
W wykładniku liczby e (dokładniej w liczniku ułamka, który tam widzisz) dodaj i odejmij coś, co doprowadzi do tego, że uzyskasz "wzór skróconego mnożenia" i będzie można to zwinąć do kwadratu różnicy. Sprawdź, czy to, co zostało ze sztucznego dodania/odjęcia zależy od x, jeżeli nie to wyprowadź to przed znak całki (rozbij ułamek na dwa i wykorzystaj własności dot. potęgowania). Następnie wykorzystaj podpunkt (d).

(e) $\int_{-\infty}^\infty x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$,
Możesz spróbować całkować przez podstawienie. Może się przydać 2(b). Rozwiązanie całki $\int_{-\infty}^\infty te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *może pomóc Ci w dojściu do rozwiązania (e).*