Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Kierunek: Informatyka
Semestr letni 2015/2016

Statystyka Matematyczna
– WEEK 4 –
AGH IIN-1-409-s

Uwaga: Zadania należy rozważać przy definicji dystrybuanty z warunkiem **lewostronnej ciągłości**, tak jak zdefiniowano ją na wykładzie (podejście rosyjskie). Dystrybuantę można również rozważać stawiając w definicji warunek prawostronnej ciągłości (nurt atlantycki).

Zmienne losowe o rozkładzie dyskretnym

1. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

x	0	1	2
$P(X=x)$	1/4	1/4	1/2

Znajdź dystrybuantę $F(x)$ dla zmiennej losowej X i naszkicuj jej wykres. Wyznacz $P(\{\omega : X(\omega)=1\})$, $F(0)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $\lim_{x\to 1^-} F(x)$, $\lim_{x\to 1^+} F(x)$, $F(1)$, $F\left(\frac{7}{5}\right)$, $F(2)$, $F(2015)$, $P\left(X \in \left[\frac{7}{5}, 2\right)\right)$ oraz $P\left(X \in \left[\frac{7}{5}, 2\right]\right)$.

2. Dany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

i	1	2	3	4
x_i	0	41	76	2015
p_i	8/10	3/20	p	1/100

gdzie $p_i = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) = P(X = x_i)$. Wyznacz p, jeżeli wiadomo, że zmienna losowa X przyjmuje jedną z wartości ze zbioru $\{0, 41, 76, 2015\}$. Znajdź dystrybuantę tej zmiennej losowej i naszkicuj jej wykres.

3. Jan rozwiązywał zadanie, w którym dany był rozkład pewnej zmiennej losowej Y. W rozwiązywaniu zadania towarzyszył mu kot, który przewrócił kubek z kawą zalewając treść zadania. Ocalała jedynie część tabelki. Co mogło znajdować się w kolejnych wierszach?

?	?	1/2	?
?	1/4	?	−1/2

Jan zapamiętał, że liczba możliwych wartości, jaką przyjmie wynosi trzy, a suma tych wartości wynosi 2. Które z pustych pól w tabeli jesteśmy w stanie jednoznacznie wyznaczyć?

4. Zmienna losowa Z przyjmuje wartość -1, 4 i 10 odpowiednio z prawdopodobieństwem $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{12}$. Naszkicuj wykres dystrybuanty zmiennej losowej Z.

5. Czy można podpisać kolejne wiersze w poniższej tabelce tak, by określała ona rozkład pewnej dyskretnej zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij.

?	−3	5/2	1/2
?	1/4	5/4	−1/2

6. O zmiennej losowej X wiemy, że $P(X=0)=\frac{1}{3}$, $P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=8)=\frac{1}{2}$. Sporządź tabelkę dla zmiennej losowej X. Oblicz prawdopodobieństwo $P(X<0)$, $P(X\leqslant 0)$, $P(X>0)$, $P(X<2)$, $P(X\leqslant 2)$, $P(X>2)$ i $P(2\leqslant X<10)$. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X oraz naszkicuj jej wykres.

7. Zmienna losowa Y przyjmuje wartość -10, -1, $-\frac{1}{2}$, bądź 0. Wiadomo, że $P(Y<-1)=\frac{1}{2}$, $F_Y(-0,99)=\frac{3}{4}$, $P(Y=0)=\frac{1}{48}$. Wyznacz wartość dystrybuanty zmiennej losowej Y w punkcie $y=-\frac{1}{3}$.

8. Zmienna losowa X przyjmuje wartość -5, -2, 6, bądź x. Wiadomo, że $P(X < 6) = \frac{1}{2}$, $F_X(-3) = \frac{1}{4}$, $P(X = 6) = P(X = x)$, $x = 16F_X(0)$. Wyznacz x oraz wartości dystrybuanty zmiennej losowej X w następujących punktach: -2, 5 oraz 7.

9. Czy funkcja $G(z)$

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leqslant -2, \\ \frac{1}{8} & \text{dla } -2 < z \leqslant 4, \\ \frac{3}{8} & \text{dla } 4 < z \leqslant 6, \\ \frac{3}{5} & \text{dla } 6 < z \leqslant 8, \\ 1 & \text{dla } z > 8, \end{cases}$$

może być dystrybuantą pewnej zmiennej losowej? Jeżeli tak, to zmienną tą nazwij Z i wyznacz jej rozkład. Ponadto naszkicuj funkcję $G(z)$ i zapisz $G(z)$ wykorzystując do tego celu indykatory zbiorów.

10. Naszkicuj wykres dystrybuanty $G_Y(y)$ pewniej zmiennej losowej Y, dla której

$$G_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(5,\infty)}(y) + \frac{1}{7}\mathbb{1}_{(1,5]}(y) + \frac{5}{14}\mathbb{1}_{(2,5]}(y) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{(10,\infty)}(y),$$

Oblicz $G_Y(4)$, $G_Y(6)$ oraz $G_Y(12)$. Jakie wartości przyjmuje zmienna losowa Y? Wyznacz te wartości a, dla których mamy $G_Y(a) = \frac{1}{2}$. Zapisz dystrybuantę $G_Y(y)$ jak w Zadaniu 9.

Zmienne losowe o rozkładzie ciągłym

11. Czy istnieje $k \in \mathbb{R}$ takie, by funkcja $f(x)$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \sin x & \text{dla } x \in [0, 3\pi], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 3\pi], \end{cases}$$

była gęstością pewnej zmiennej losowej?

12. Sprawdź, czy funkcja $f(x)$ może pełnić rolę gęstością pewnej zmiennej losowej.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{dla } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty). \end{cases}$$

13. Dobierz parametr $m \in \mathbb{R}$ tak, by funkcja $f(x)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -\pi), \\ m \cdot \sin^2 x & \text{dla } x \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi, \infty). \end{cases}$$

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *"zmienna losowa X przyjmuje wartość zero"* oraz $P(X < 0)$ i $P(\{\omega : X(\omega) \leqslant 0\})$. *Wskazówka:* $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

14. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ jest dobrą kandydatką na gęstość dla pewnej zmiennej losowej X. Wyznacz ponadto dystrybuantę zmiennej losowej X. Policz pochodną dystrybuanty.

15. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej Y, której funkcja gęstości $g_Y(y)$ dana jest wzorem

$$\frac{3}{4}\mathbb{1}_{(-5,-4)}(y) + \frac{1}{a}\mathbb{1}_{[4,6]}(y),$$

przy czym $a \in \mathbb{R}$ jest parametrem, który należy wyznaczyć. Dodatkowo narysuj wykresy tych funkcji.

16. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}_+$ będziemy mieć $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, jeżeli gęstością zmiennej losowej X jest funkcja $f(x) = \frac{1}{k}\mathbb{1}_{[0,k]}(x)$?

17. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja $F(x)$ będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ a \cdot x^2 & \text{dla } x \in (0, 4], \\ 1 & \text{dla } x > 4. \end{cases}$$

Wyznacz $F(-1)$, $F(1)$, $F(3)$ oraz $F(5)$. Jakie musiałoby być a, by X była zmienną losową ciągłą? Jak wtedy wyglądałaby gęstość zmiennej losowej X?

18. Czy funkcja $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant a, \\ c \cdot x & \text{dla } x \in (a, b], \\ 1 & \text{dla } x > b, \end{cases}$$

może być dystrybuantą pewnej zmiennej losowej, jeżeli przyjmiemy że:

(a) $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$,

(b) $a = 0$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$,

(c) $a = 0$, $b = 2$, $c = \frac{1}{4}$?