Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie
Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
Kierunek: Informatyka
Semestr letni 2015/2016

Statystyka Matematyczna
– WEEK 5 –
AGH IIN-1-409-s

Uwaga: Zadania należy rozważać przy definicji dystrybuanty z warunkiem **lewostronnej ciągłości**, tak jak zdefiniowano ją na wykładzie (podejście rosyjskie). Dystrybuantę można również rozważać stawiając w definicji warunek prawostronnej ciągłości (nurt atlantycki).

Momenty zmiennych losowych

Zmienne losowe o rozkładzie dyskretnym

Popularne rozkłady dyskretne

1. Review Jak wygląda dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej X o rozkładzie Bernoulliego z parametrami $n > 0$ i $p \in [0, 1]$ (piszemy $X \sim B(n, p)$)? Oblicz $F(0)$, $F(0,99)$, $F(1)$, $F(1,01)$ oraz $F(5)$ przyjmując $n = 10$. Zinterpretuj wyniki.

2. Review Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Piszemy $X \sim Poiss(\lambda)$. Jak wygląda jej dystrybuanta $F(x)$? Przyjmując $\lambda = 4$ oblicz $F(2)$, $F(4)$ i $P(2 \leqslant X < 4)$. Zinterpretuj wyniki.

3. Zidentyfikuj rozkład zmiennej losowej X i parametry tego rozkładu na podstawie wiedzy o funkcji prawdopodobieństwa:
   (a) $P(X = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{20-k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 20\}$,
   (b) $P(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{3-k}$, dla $k \in ?$,
   (c) $P(X = k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}$, $k \in \{0, 1, \ldots\}$,
   (d) $P(X = k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}}$, $k \in \{0, 1, \ldots\}$.

Zmienne losowe o rozkładzie ciągłym

Popularne rozkłady ciągłe

4. Review Jak wygląda dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$? Dla $\lambda = 3$ wyznacz $F(-10)$ oraz $F(5)$. Zinterpretuj wyniki.

5. Review Zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ, σ^2. Jak wygląda dystrybuanta $\Phi(x)$ tej zmiennej losowej? Wyznacz $\Phi(0)$, $\Phi(1,96)$, $\Phi(-1,96)$, $\Phi(5)$ i oblicz $P(0 \leqslant X < \infty)$ mając dane $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Zinterpretuj wyniki.

6. Mając podaną funkcję gęstości zmiennej losowej X zidentyfikuj rozkład oraz jego parametry:
   (a) $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,
   (b) $f_2(x) = 3e^{-3x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
   (c) $f_3(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$
   (d) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$,
   (e) $f_5(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{32}} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x)$,
   (f) $f_6(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$,
   (g) $f_7(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$.

7. Zmienna losowa X ma *rozkład gamma* z parametrem kształtu $\alpha > 0$ oraz parametrem $\beta > 0$, piszemy $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Gęstość tej zmiennej losowej zadaje funkcja

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

przy czym $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. Gdy parametr kształtu α jest liczbą naturalną (dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$) mówimy, że zmienna losowa ma *rozkład Erlanga* z parametrami α, β. Zauważmy, że gdy podstawimy $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$ w funkcji gęstości $f_X(x)$, to możemy powiedzieć, że zmienna losowa ma rozkład $Gamma(1, \lambda)$, albo $Erlanga(?, ?)$, bądź rozkład ? z parametrem ?. Ten sam rozkład a trzy możliwości nazwania go. Wiemy już naprawdę dużo o rozkładzie gamma. Skoro znamy postać gęstości, to obliczmy w przebiegły sposób całki:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-2x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^{\infty} x^{49} e^{-\frac{1}{4}x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathrm{d}x$,

(c) $\int_0^{\infty} (2x)^5 e^{-\frac{1}{4}x} \mathrm{d}x$.

Korzystając z przebiegłego sposobu liczenia całek wyznacz wariancję zmiennej losowej z rozkładu $\Gamma(\alpha, \beta)$.