SZEREGI
NIEZBĘDNIK

SZEREG GEOMETRYCZNY

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

suma ciągu geometrycznego, uważaj na założenie o ilorazie ciągu geometrycznego
zbieżny, gdy
$|x|<1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

FUNKCJA EKSPONENCJALNA

$$\mathbf{e^x} = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{6!}x^6+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

zbieżny, gdy $x \in \mathbb{R}$

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

$$\mathbf{\ln(x+1)} = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n.$$

uważaj: $(-1)^0=1$
zbieżny, gdy $x \in (-1,1]$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

$$\mathbf{\sin x} = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

$\sin x$ jest funkcją nieparzystą;
zauważ, że w jej szergu Taylora występują jedynie nieparzyste potęgi x
zbieżny, gdy $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{\cos x} = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

$\cos x$ jest funkcją parzystą;
zauważ, że w jej szeregu Taylora występują jedynie parzyste potęgi x
zbieżny, gdy $x \in \mathbb{R}$

FUNKCJA CYKLOMETRYCZNA

$$\mathbf{\operatorname{arctg} x} = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

$\operatorname{arctg} x$ to funkcja nieparzysta; porównaj z szeregiem dla $\sin x$, jakie widzisz różnice?
zbieżny, gdy $x \in [-1,1]$

NIE PRZEGAP SZCZEGÓŁÓW

- ☐ Zwracaj uwagę na to od jakiego indeksu n zaczynasz sumować - od zera, czy od jeden.
- ☐ Pamiętaj, że $(-1)^0 = 1$, $0! = 1$ oraz $x^0 = 1$.
- ☐ Dowolną liczbę parzystą możesz zapisać jako $2k$, $k \in \mathbb{N}$ i wtedy $(-1)^{2k} = 1$. Z kolei każdą liczbę nieparzystą możesz przedstawić jako $2k+1$ (ew. $2k-1$), gdy $k \in \mathbb{N}$ (przyjmujemy, że $\mathbb{N}$ to zbiór liczb naturalnych z zerem). Warto sprawdzić, co dzieje się z $2k+1$ (ew. $2k-1$) wraz ze wzrostem k.
- ☐ $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n$.
- ☐ Sprawdź jak zachowuje się $(-1)^n$ oraz $(-1)^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ Zauważ, że $(4-2x)^{2n} = 2^{2n} \cdot (2-x)^{2n} = 2^{2n} \cdot (x-2)^{2n}$.