

Metody eksploracji danych

2. Metody regresji

Piotr Szwed

Katedra Informatyki Stosowanej AGH

2016

Zagadnienie regresji

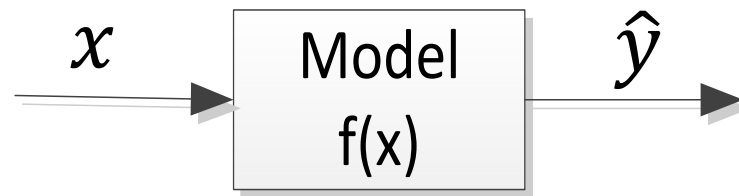
Dane:

- Zbiór uczący: $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1,m}$
- Obserwacje: (x_i, y_i) , wektor cech $x_i \in \mathbf{R}^n$
- Wartość wyjściowa jest skalarą $y_i \in \mathbf{R}$

Zadanie: dobór funkcji

$$f(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R},$$

która pozwoli **przewidzieć** wartość wyjściową \hat{y} odpowiadającą x

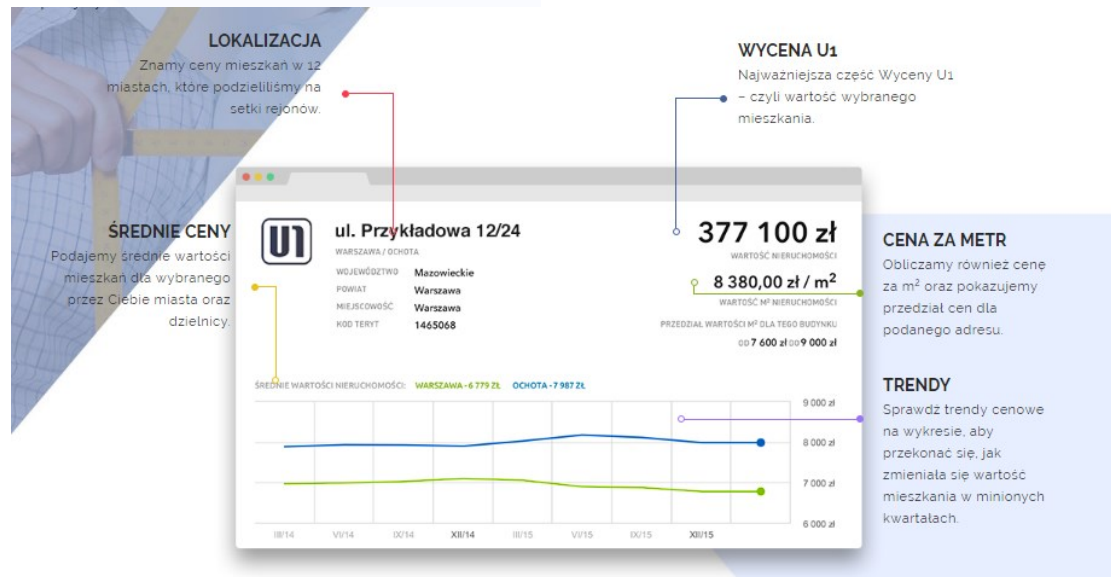


Przykład 1

Szacowanie wartości nieruchomości na podstawie danych transakcyjnych z uwzględnieniem różnych atrybutów

Powierzchnia w m ² *	Pokoje *	Informacje dodatkowe
<input type="text" value="55,00"/>	<input type="text" value="2"/>	
Piętro *	Liczba kondygnacji *	
<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="4"/>	
Rynek *	Standard lokalu	
<input type="text" value="wtórny"/>	<input type="text" value="dobry"/>	
Typ budynku	Rok budowy	
<input type="text" value="blok"/>	<input type="text" value="2000-2010"/>	

*uzupełnij wszystkie pola, pamiętaj o spacjach

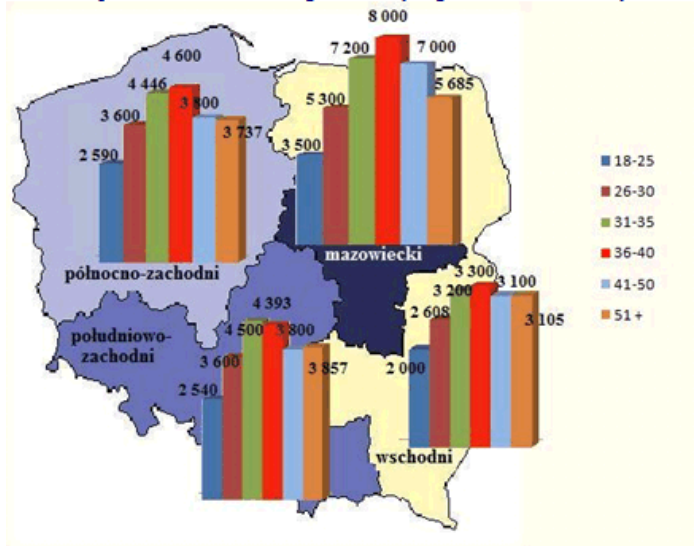


[<https://urban.one/>]

Przykład 2

Przewidywanie wynagrodzeń w zależności od lokalizacji, wieku, branży, wykształcenia, stanowiska...

Mapa 1. Zróżnicowanie regionalne wynagrodzeń osób w różnym wieku



Zródło: Ogólnopolskie Badanie Wynagrodzeń przeprowadzone przez Sedlak & Sedlak w 2008 roku

Tabela 3. Miesięczne wynagrodzenie całkowite osób, które ukończyły różne kierunki studiów

kierunek studiów	próba	25% zarabia mniej	mediana 2015 rok	25% zarabia więcej
informatyka	10 542	4 000	6 250	9 300
elektronika i automatyka	4 100	4 179	5 900	8 500
mechanika i metalurgia	5 000	3 600	5 000	7 400
(...)				
ekonomia, finanse i zarządzanie	27 483	3 099	4 500	7 200
(...)				
pedagogiczne (związane z edukacją)	3 445	2 331	3 013	4 200
sport, rehabilitacja, fizykoterapia	671	2 200	2 800	4 325
pielęgniarstwo	885	2 200	2 670	3 400

ródło: Ogólnopolskie Badanie Wynagrodzeń (OBW) przeprowadzone przez Sedlak & Sedlak w 2015 roku

Przykład 3

Przewidywanie wielkości sprzedaży w zależności od typu towaru i ceny



NOWY IPHONE 5C - 5 KOLORÓW 8GB - GW24

8GB, Nowy, Biały, Rozdzielczość aparatu (Mpx): 8, 3,6-4 cale, Informacje dodatkowe: Java, MMS, Odtwarzacz MP3, Obsługa video, Slot kart pamięci, ...

509,99 zł

[kup teraz](#)

529,98 zł z dostawą

2 osoby kupiły

lista promowanych ofert



APPLE IPHONE 5S 16GB PL MENU SPACE GRAY BEZ LOCKA

16GB, Nowy, Czarny

869,00 zł

[kup teraz](#)

908,00 zł z dostawą

22 osoby kupiły



Apple iPhone 6s 32GB GOLD Gw24m NOWOŚĆ! FV23%

32GB, Pamięć RAM (MB): 2000, Nowy, Złoty, Rozdzielczość aparatu (Mpx): 12, 4,6 - 5 cali, Informacje dodatkowe: Java, MMS, Odtwarzacz MP3, ...

2 599,00 zł

[kup teraz](#)

2 615,00 zł z dostawą

12 osób kupiło



APPLE IPHONE 5S 16GB SILVER NOWY SZKŁO GRATIS

16GB, Nowy, Srebrny

1 275,00 zł

[kup teraz](#)

1 284,00 zł z dostawą

24 osoby kupiły



NOWY APPLE IPHONE 6S 64GB GOLD GW12M FVm KURIER24H

64GB, Nowy, Złoty

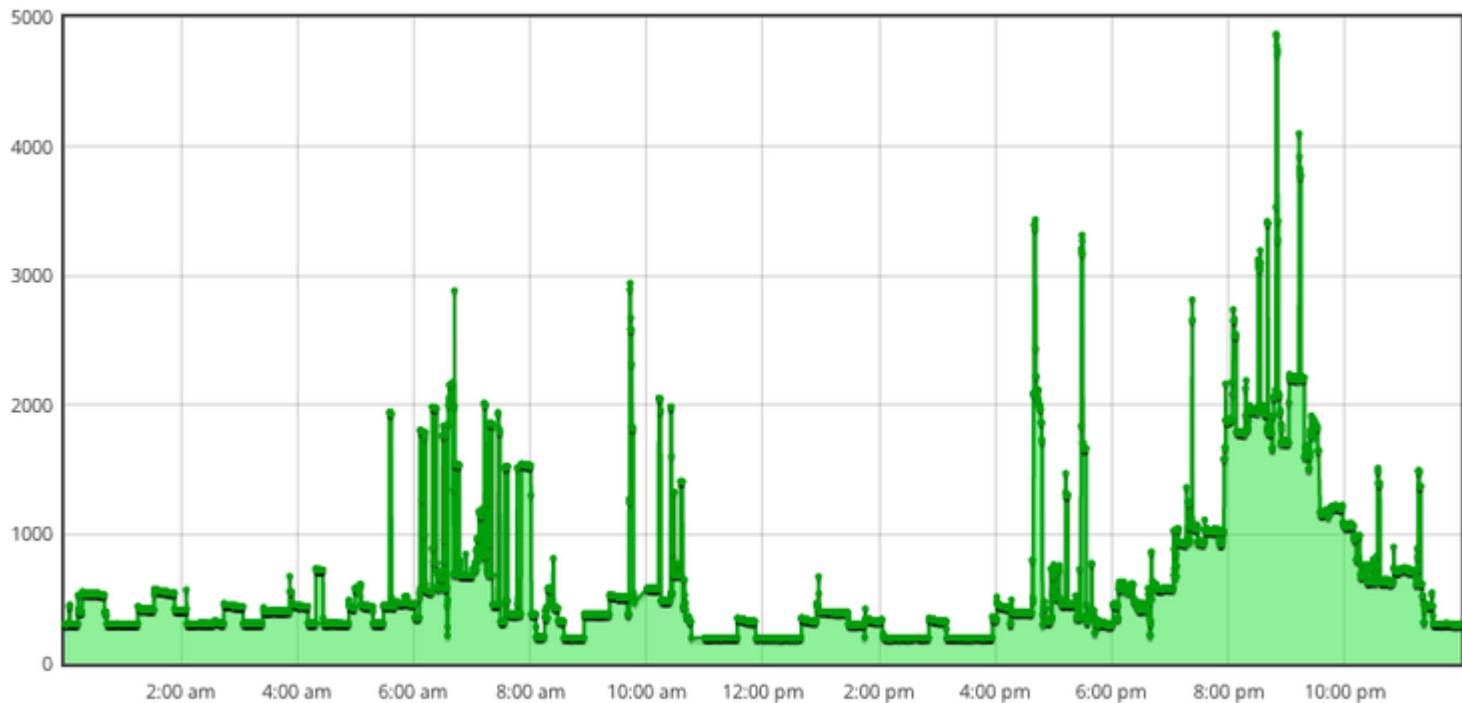
2 688,00 zł

[kup teraz](#)

Przykład 4

- Przewidywanie zużycia energii na podstawie danych historycznych

Consumption Rate in Watts (points every 15 seconds)



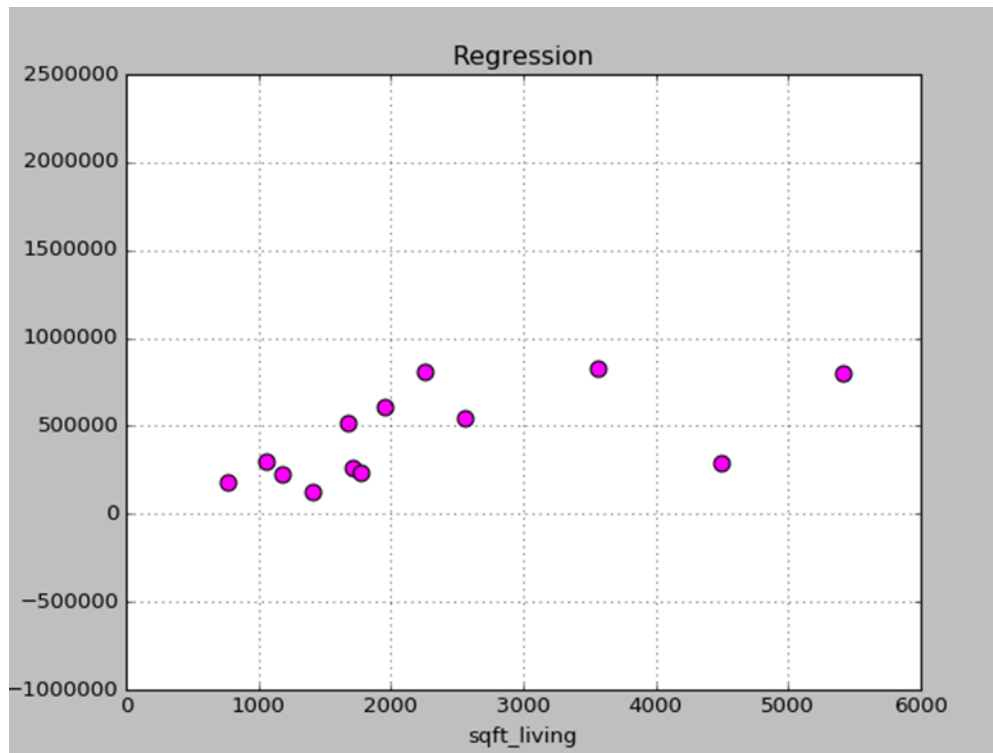
[<http://wattvision.posthaven.com/?page=5>]



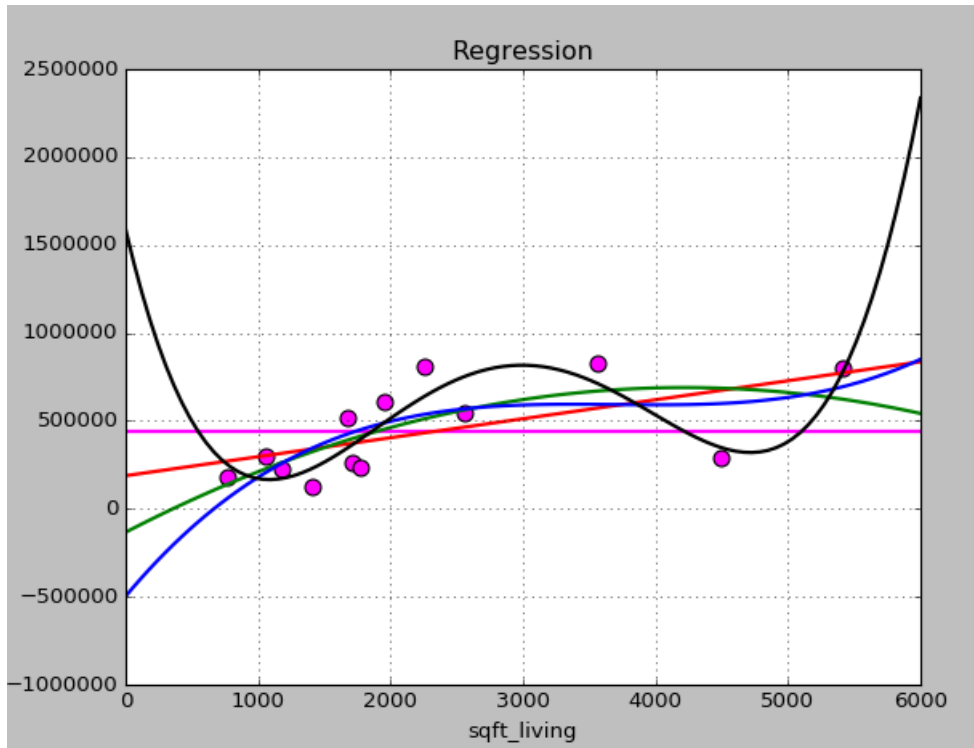
Etapy

- Wybór danych, które zostaną użyte $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1,m}$
- Wybór postaci modelu
- **Określenie parametrów modelu**
- Walidacja modelu

Przykład: x to powierzchnia domu, y to cena domu



Postać modelu

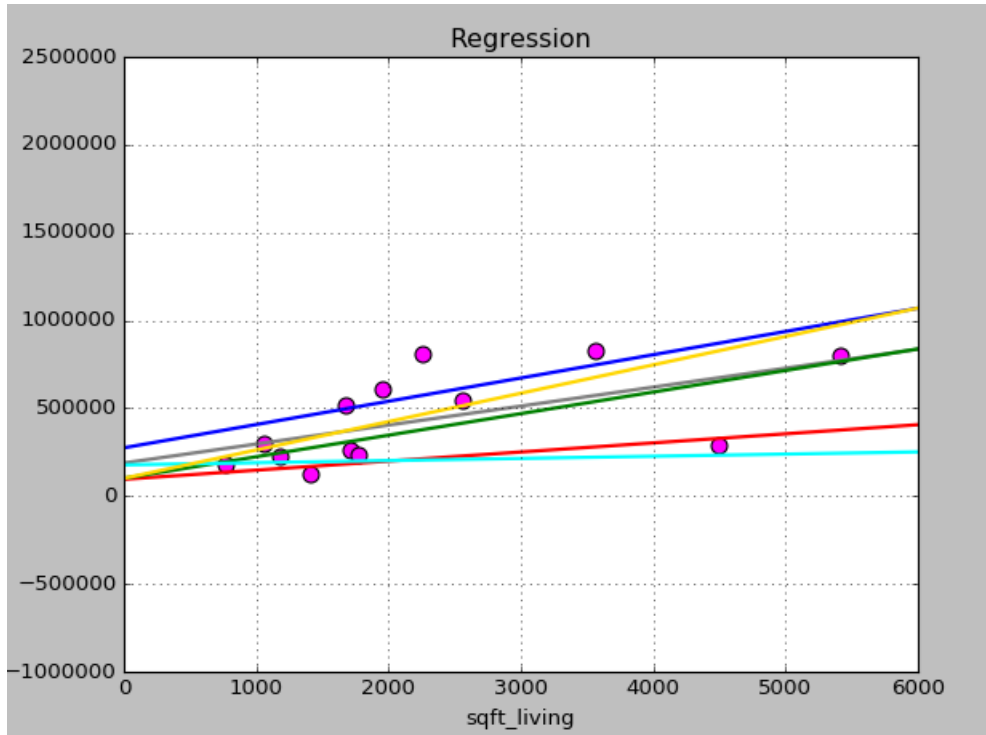


Wybór typowych funkcji (których parametry da się wyznaczyć)

- Funkcja stała?
- Funkcja liniowa?
- Wielomian wyższego rzędu?

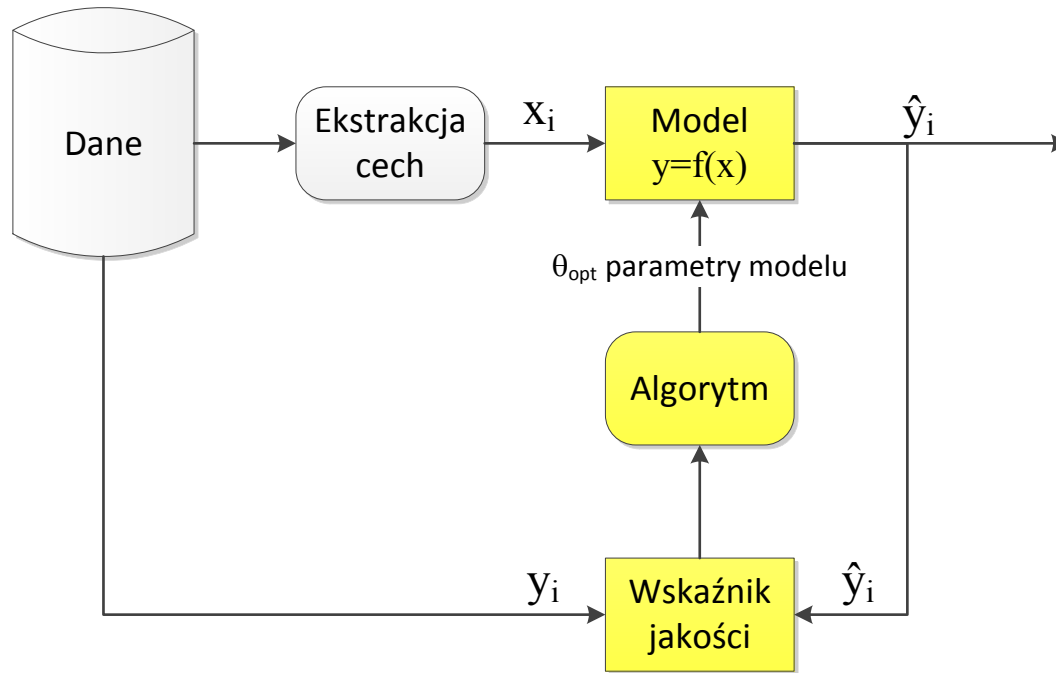
Z reguły bardziej złożona funkcja będzie lepiej przybliżała dane uczące, ale niekoniecznie sprawdzi się przy predykcji.

Parametry modelu



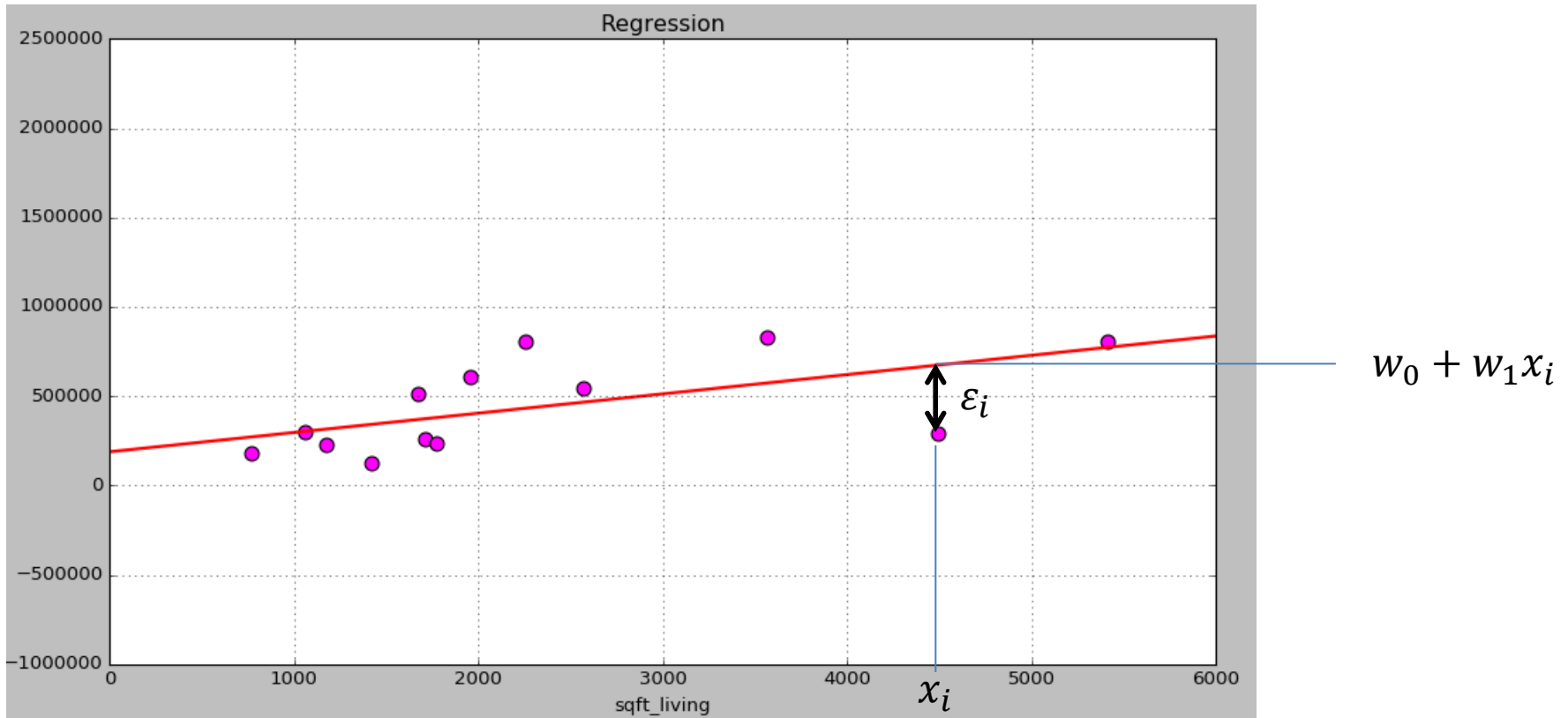
- Zakładamy, że wybraną postacią będzie funkcja liniowa:
$$y(x) = w_0 + w_1x$$
- Należy wybrać „najlepszą” lub „najbardziej prawdopodobną” funkcję
- Konieczne są założenia i kryterium pozwalające na ocenę modelu

Przebieg procesu uczenia



- Wskaźnik jakości służy do porównania:
 - y_i - wartości wyjściowej zapisanych w zbiorze uczącym z
 - \hat{y}_i - wartości przewidywanej przez model
- Wskaźnik jakości steruje przebiegiem algorytmu lub jest wykorzystywany w jego konstrukcji

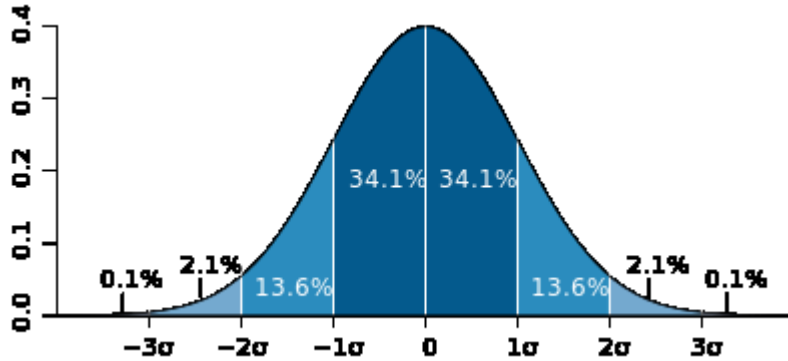
Założenia



Zakłada się, że wartości wyjściowe y_i są obarczone błędem ε

- $y_i = w_0 + w_1 x + \varepsilon_i$
- Błąd ε jest zmienną losową o rozkładzie normalnym (Gausa):
 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ - wartość oczekiwana błędów $E[\varepsilon] = 0$

Założenia



Rozkład normalny

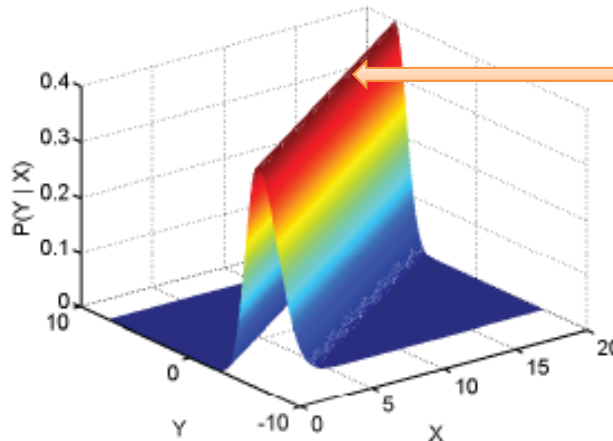
$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}$$

μ – wartość oczekiwana (średnia wartość)

σ^2 - wariancja

Prawdopodobieństwo, że y przyjmie określoną wartość jest zależne od x oraz parametrów modelu θ :

$$p(y|x, \theta) = N(\mu(x), \sigma^2(x))$$



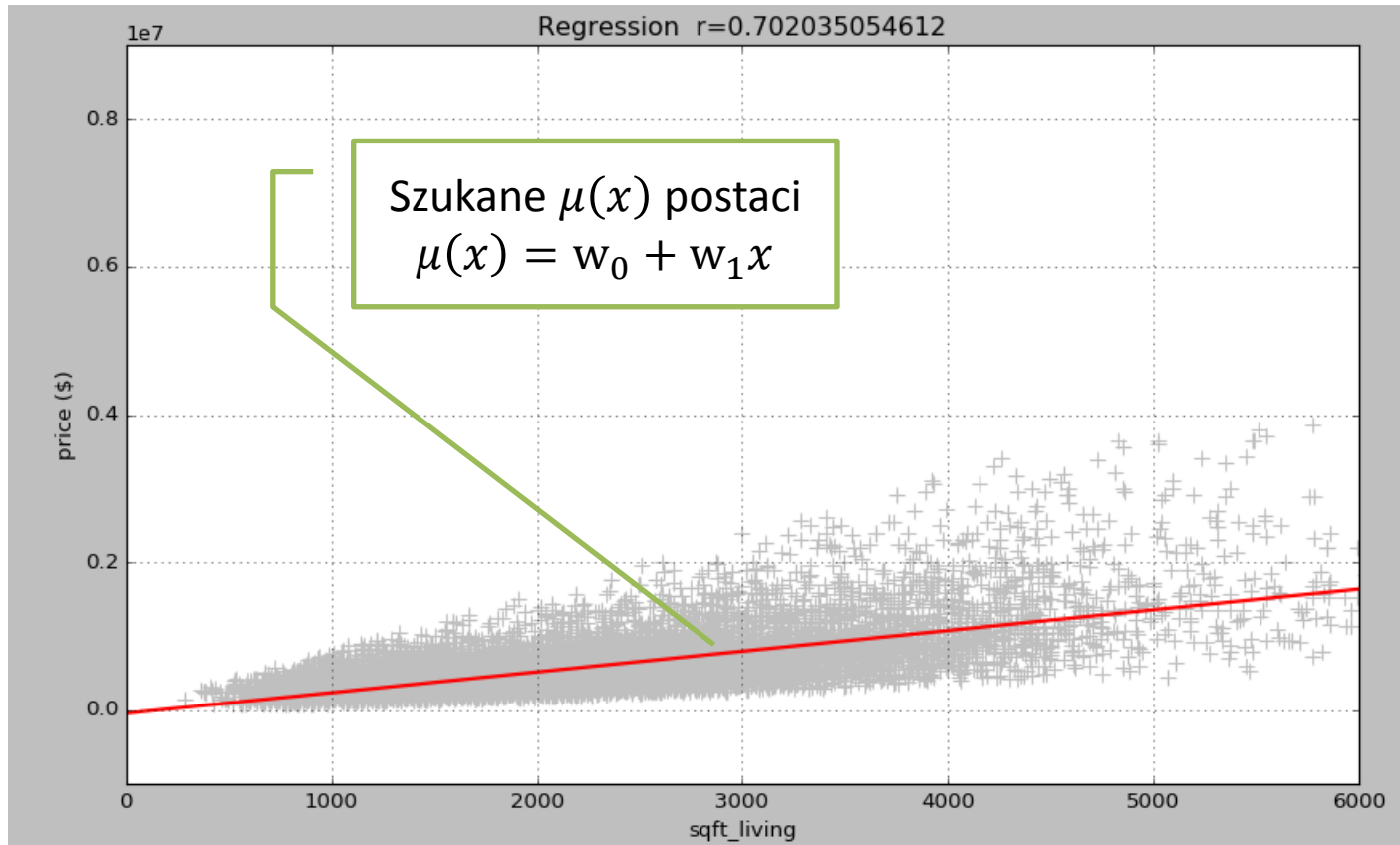
Poszukiwany jest przebieg funkcji po grzbiecie rozkładu

Parametry modelu $\theta = [w_0, w_1]$

[Kevin P. Murphy: Machine Learning A Probabilistic Perspective, MIT Press 2012]

Założenia

- Najczęściej dla uproszczenia zakłada się, że wariancja jest stała $\sigma^2(x) = \sigma^2$
- Poszukiwany jest przebieg $\mu(x)$ – wartości oczekiwanej y zależnej od x



Tu wariancja nie jest stała (cena nie będzie < 0)

Zbiór: kc_house_data (2700 transakcji sprzedaży)

Maksymalizacja prawdopodobieństwa

Zamierzamy zmaksymalizować prawdopodobieństwo zaobserwowania zbioru uczącego $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1,m}$

- Prawdopodobieństwo pojedynczej obserwacji (x, y)

$$p(y|x, \theta) = N(\mu(x), \sigma^2)$$

- Prawdopodobieństwo zaobserwowania zbioru uczącego D :

$$p(D|\theta) = p(y_1|x_1, \theta) \cdot p(y_2|x_2, \theta) \cdot \dots \cdot p(y_m|x_m, \theta)$$

- Szukamy parametrów modelu θ , które **maksymalizują** $p(D|\theta)$

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} p(D|\theta)$$

- Maksymalizacja iloczynu jest kłopotliwa, więc zamiast wyznaczania miejsca ekstremum funkcji wyznacza się miejsce ekstremum jej logarytmu:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln(p(D|\theta))$$

- Zauważmy, że jeśli $f(x) > 0$ to pochodna jej logarytmu wynosi:

$$\ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

czyli miejsce minimum/maksimum ($x_0: f'(x_0) = 0$) nie ulegnie zmianie

RSS – suma kwadratów błędów

- Zagadnienie **maksymalizacji** zamieniamy na **minimalizację**: $\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} -\ln(p(D|\theta))$
- Szukamy minimum wyrażenia $NLL(\theta)$ – ang. negative log likelihood:

$$NLL(\theta) = -\ln(p(D|\theta)) = \sum_{i=1}^m \ln(p(y_i|x_i, \theta))$$

Podstawiając:

$$p(y_i|x_i, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu(x_i))^2}$$

otrzymujemy:

$$NLL(\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m (y_i - \mu(x_i))^2 + \frac{m}{2} \ln(2\pi\sigma^2)$$

Wyrażenie

$$RSS = \sum_{i=1}^m (y_i - \mu(x_i))^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - (w_0 + w_1 x_i))^2$$

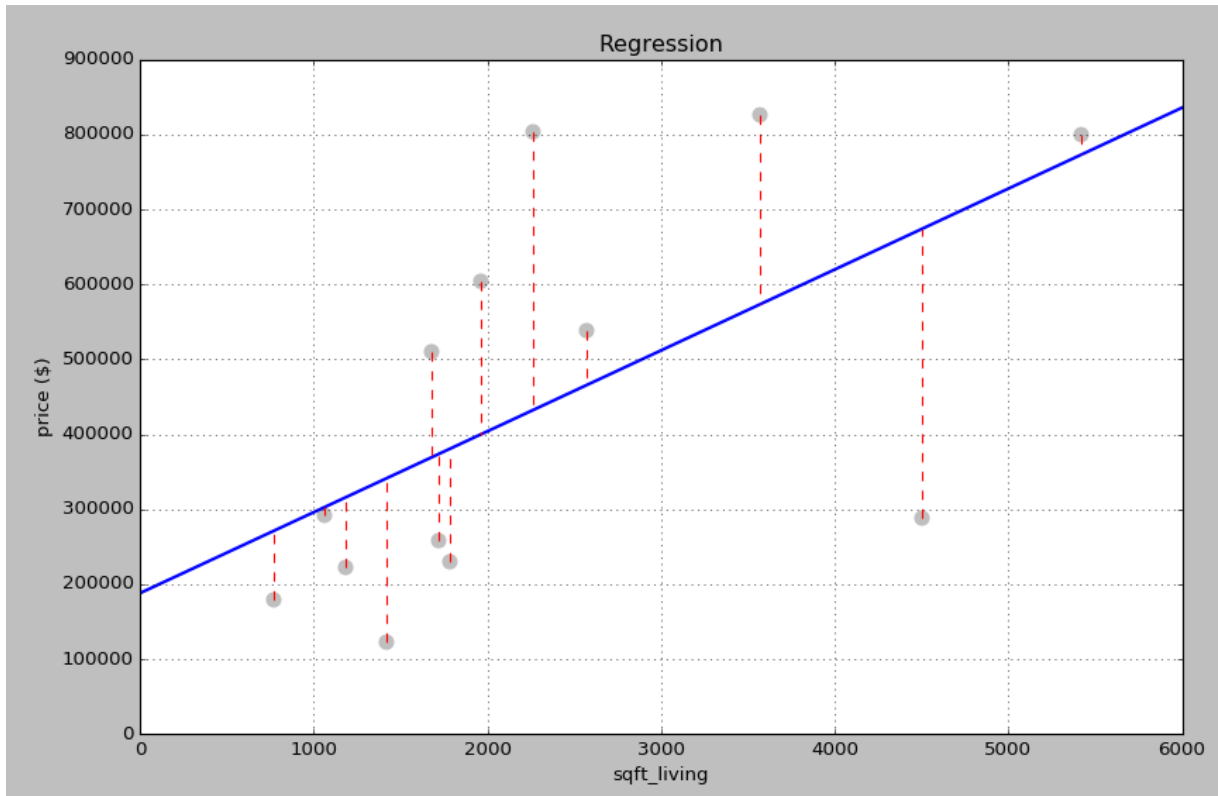
nazywane jest resztową sumą kwadratów błędów (RSS – residual sum of squares).

Celem regresji liniowej jest znalezienie takich parametrów θ , czyli wag: w_0, w_1, \dots, w_n , które zminimalizują RSS.

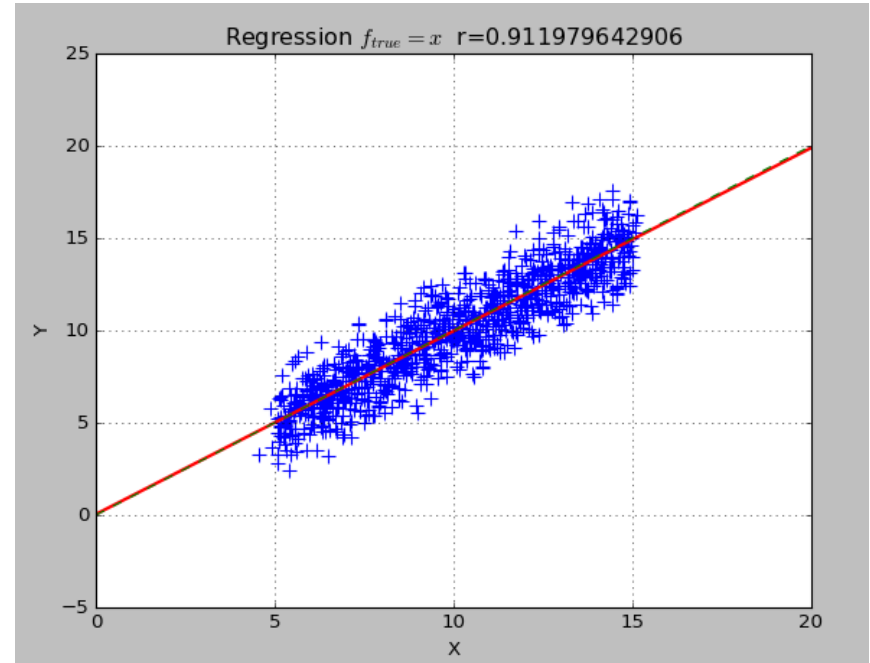
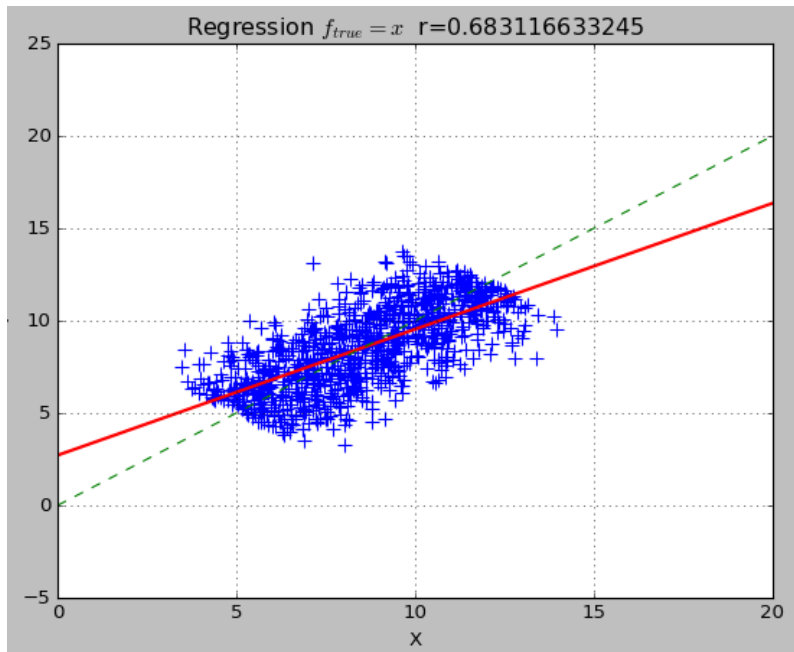
Sposób obliczania RSS

RSS oblicza się jako sumę kwadratów odległości punktów od prostej (hiperpłaszczyzny) w **kierunku pionowym**, a nie sumę odległości (kierunek prostopadły).

$$RSS(w_0, w_1) = \sum_{i=1}^m (y_i - (w_0 + w_1 x_i))^2$$



Sposób obliczania RSS



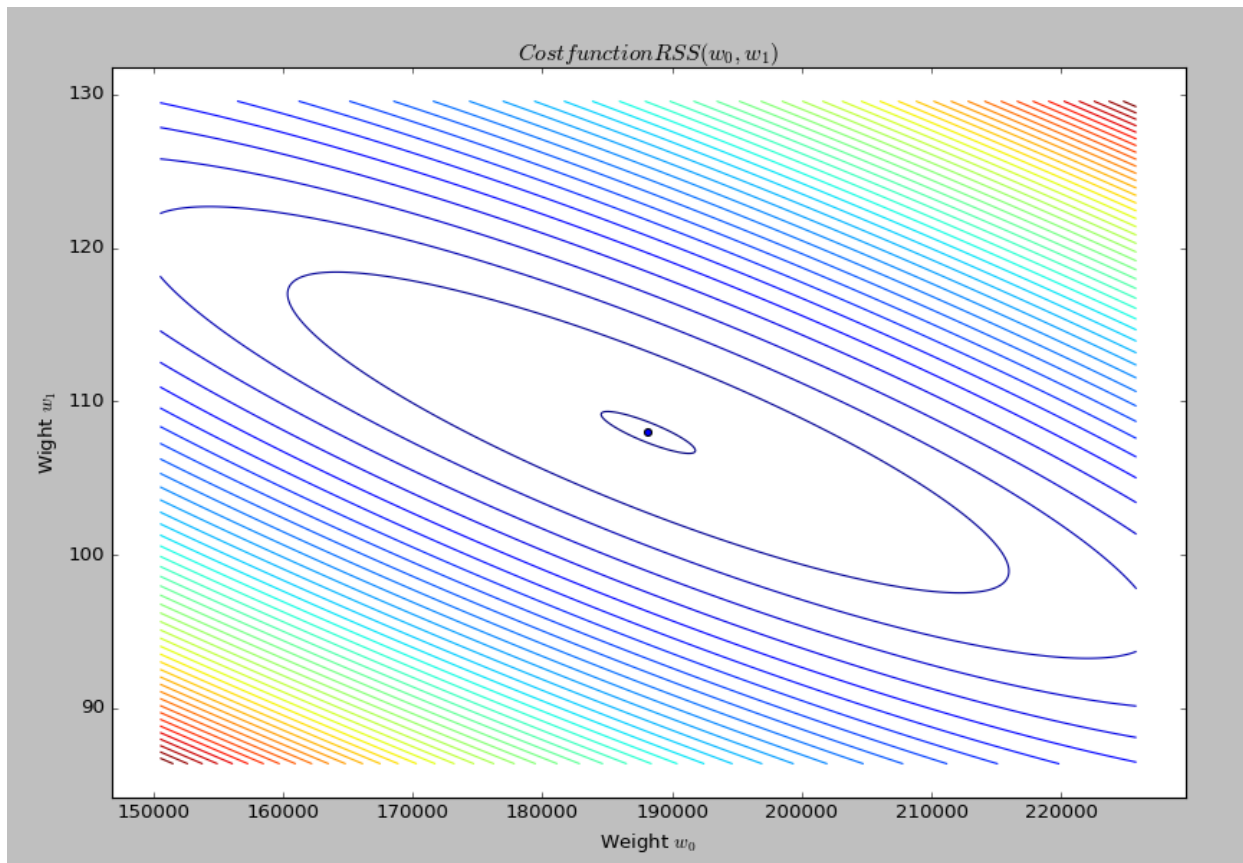
Zaobserwujemy różnicę:

- **po lewej** – wygenerowane losowo punkty tworzą prostokąt ulokowany wzdłuż przerywanej zielonej prostej f_{true} . Czerwona linia regresji jest odległa od f_{true}
- **po prawej** - f_{true} i linia regresji przechodzą przez środek równoległoboku (zgodność)

Minimalizacja RSS

Szukamy optymalnych parametrów:

$$[\hat{w}_0, \hat{w}_1] = \arg \min_{w_0, w_1} \sum_{i=1}^m (y_i - (w_0 + w_1 x_i))^2$$



Wyraz wolny

Jeżeli $x \in \mathbb{R}^n$ równanie regresji ma postać:

$$y(x) = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x^i$$

Częstym zabiegiem jest pozbycie się wyrazu wolnego (bias) przez zmianę wymiaru na $n + 1$.

$$[x^1, x^2, \dots, x^n] \quad \longrightarrow \quad [1, x^1, x^2, \dots, x^n]$$

Wtedy równanie regresji ma postać:

$$y(x) = w^T x,$$

gdzie $w^T = [w_0, w_1, \dots, w_n]$

Oczywiście także $w^T x = x^T w$

Postać macierzowa

- Elementy zbioru uczącego mogą być przedstawione w postaci:
 - macierzy X o rozmiarach $m \times n + 1$
 - m -wymiarowego wektora y .
- Macierz X ma dodatkowe jedynki w pierwszej kolumnie.
- Niech $w \in \mathbf{R}^{n+1}$ będzie wektorem wag.

$$e = y - Xw$$

Wektor błędu $e \in \mathbf{R}^m$ można więc przedstawić jako: $e = y - Xw$

$$RSS(w) = \sum_{i=1}^m e_i \cdot e_i = e^T e = (y - Xw)^T (y - Xw)$$

Minimalizacja RSS

$$\begin{aligned}RSS(w) &= (y - Xw)^T (y - Xw) = y^T y - y^T (Xw) - (Xw)^T y + (Xw)^T (Xw) \\ &= y^T y - 2w^T X^T y + w^T X^T Xw\end{aligned}$$

Dla przypomnienia: $(Xw)^T = w^T X^T$

Aby obliczyć minimum $RSS(w)$ względem należy obliczyć pochodną i przyrównać do 0

$$\begin{aligned}\frac{d}{dw} (y^T y - 2w^T X^T y + w^T X^T Xw) &= -2X^T y + 2X^T Xw \\ -2X^T y + 2X^T Xw &= 0\end{aligned}$$

stąd otrzymujemy **równanie normalne**:

$$X^T Xw = X^T y$$

oraz zależność:

$$w = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Równanie normalne jest równaniem liniowym i w może być wyznaczone przez eliminację Gaussa lub obliczenie odwrotności macierzy $(X^T X)^{-1}$.

Równanie normalne

$$X^T X w = X^T y$$

- Macierz $X^T X$ ma wymiar: $n + 1 \times n + 1$
- Czynniki $X^T y$ jest wektorem $n + 1$ wymiarowym
- Problem może zostać sprowadzony do odwracania macierzy $X^T X$.
- Macierz odwrotna istnieje, jeśli macierz $X^T X$ jest nieosobliwa, tzn.
 - liczba niezależnych liniowo obserwacji m musi być większa niż liczba cech ($m > n + 1$)
 - kolumny nie są liniowo zależne, czyli atrybuty nie są silnie skorelowane (np. powierzchnia w stopach i metrach kwadratowych)

Ograniczenia liniowej regresji

- Rzeczywiste relacje pomiędzy X i y mogą być nieliniowe. Stąd generalizacja do modeli nieliniowych.
- Złożoność jest rzędu: $O(m n^2 + n^3)$. Czyli np. dla $n=30$ atrybutów i $m=10000$ liczba operacji jest b. duża
- W przypadku korelacji pomiędzy zmiennymi macierz $X^T X$ może być źle uwarunkowana (niestabilność numeryczna)
- Wszystkie zmienne (atrybuty) są użyte w modelu, a może zdarzyć się, że jedynie ich podzbiór jest istotny i ma rzeczywisty wpływ na wartość wyjściową.

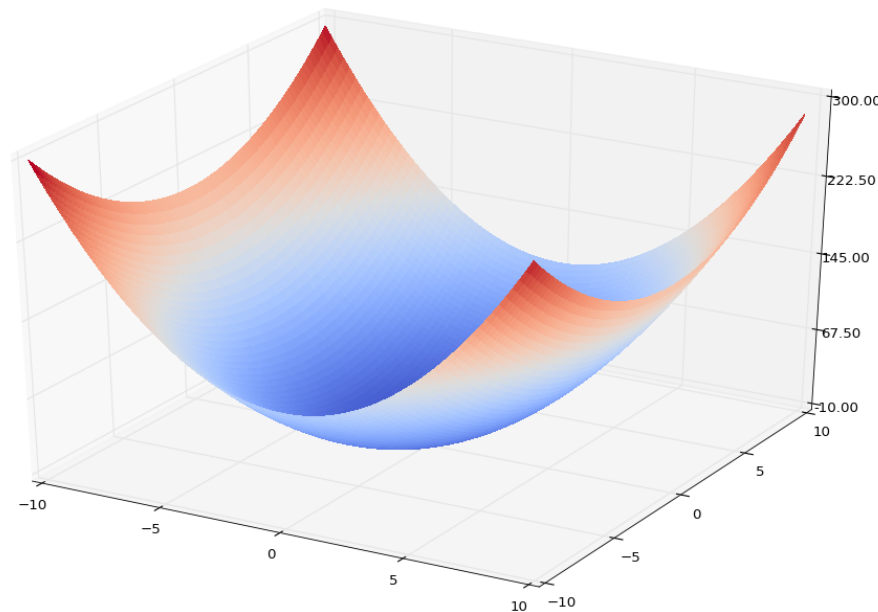


Metoda gradientu prostego

- W praktyce współczynniki regresji są najczęściej wyznaczane za pomocą **gradientowych** metod optymalizacji.

$$\hat{w} = \arg \min_w RSS(w), \text{ gdzie } RSS(w) = \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i)^2$$

- RSS jest wypukłą funkcją wag, stąd globalne minimum istnieje i da się je wyznaczyć za pomocą metod gradientowych.

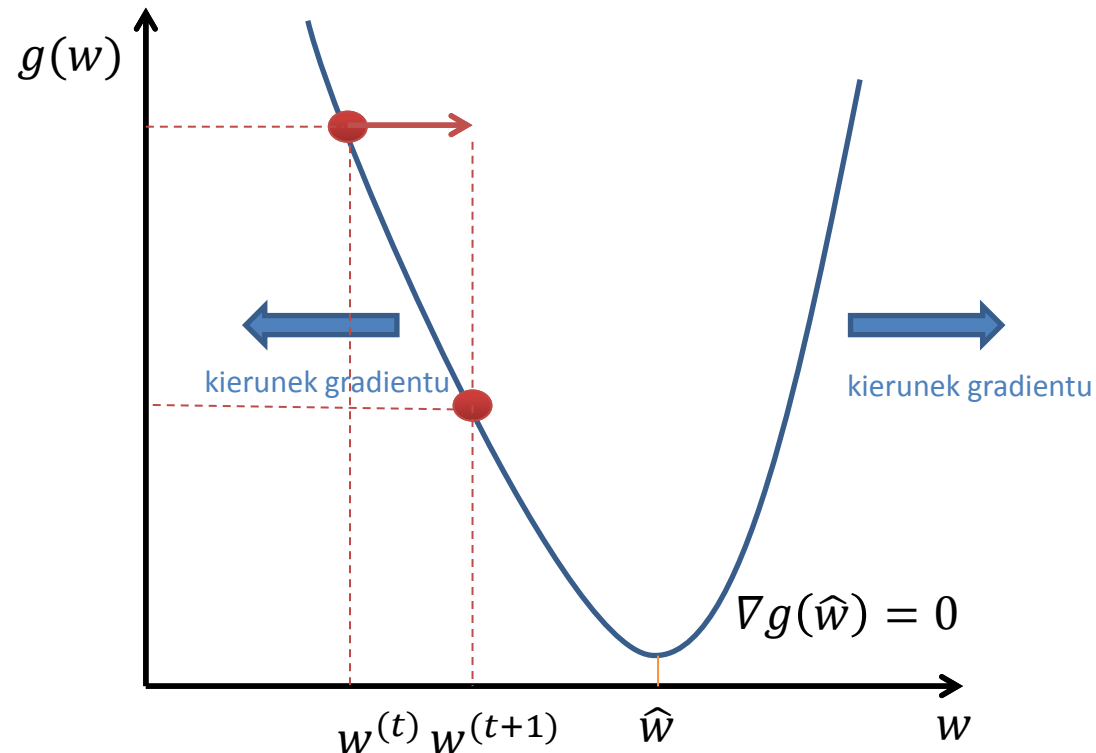


Metoda gradientu prostego

Dla uproszczenia oznaczmy $RSS(w)$ jako $g(w)$

- Gradient $\nabla g(w) = \left[\frac{\partial g}{\partial w_0}, \frac{\partial g}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial w_n} \right]$ jest $n + 1$ wymiarowym wektorem pochodnych cząstkowych w kierunkach w_0, w_1, \dots, w_n

- W trakcie optymalizacji osiągnięto punkt $w^{(t)}$
- **Małe** przemieszczenie w kierunku $-\nabla g(w^{(t)})$ zazwyczaj przynosi poprawę wartości funkcji celu.



Metoda gradientu prostego

Algorytm

wybierz $w^{(0)}$

$t = 0$

while ! kryterium_stopu:

$$w^{(t+1)} = w^{(t)} + \gamma \nabla g(w^{(t)})$$

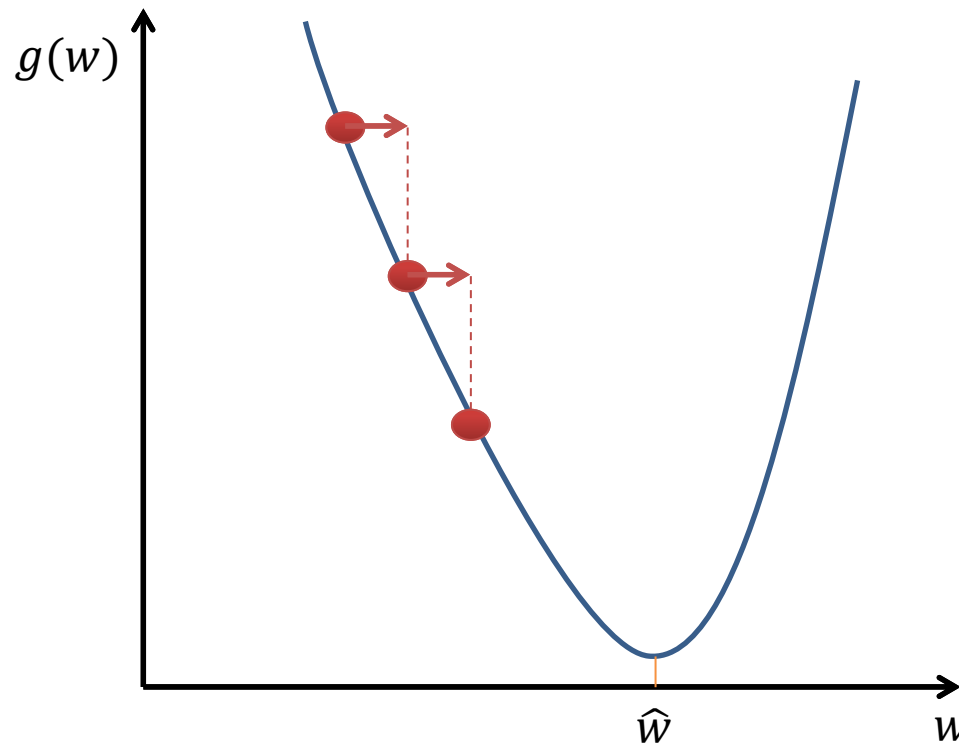
$t = t + 1$

- Współczynnik γ jest małą liczbą
- Typowe kryteria stopu:
 - Maksymalna liczba iteracji: $t = \text{maxiter}$
 - Gradient bliski zeru: $|\nabla g(w^{(t)})| < \varepsilon$
 - Brak poprawy funkcji celu: $d(w^{(t+1)} - w^{(t)}) < \varepsilon$

Wielkość kroku

Wielkość kroku γ ma wpływ na zbieżność algorytmu:

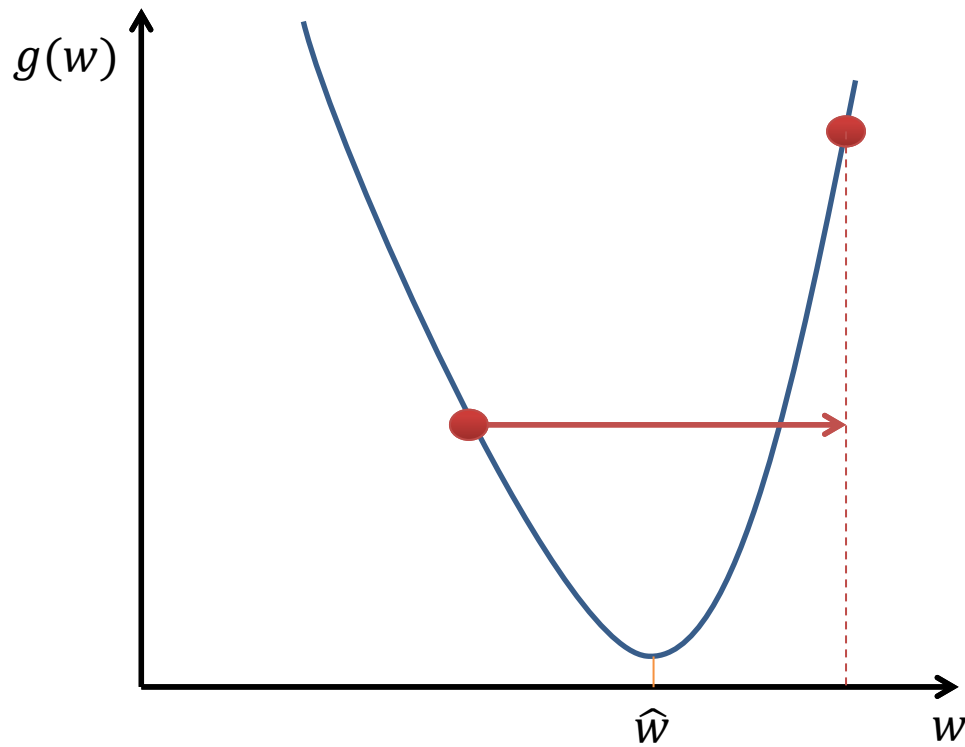
- krok za mały \rightarrow zbyt wolna zbieżność
- krok za duży \rightarrow możliwy wzrost wartości funkcji celu



Wielkość kroku

Wielkość kroku γ ma wpływ na zbieżność algorytmu:

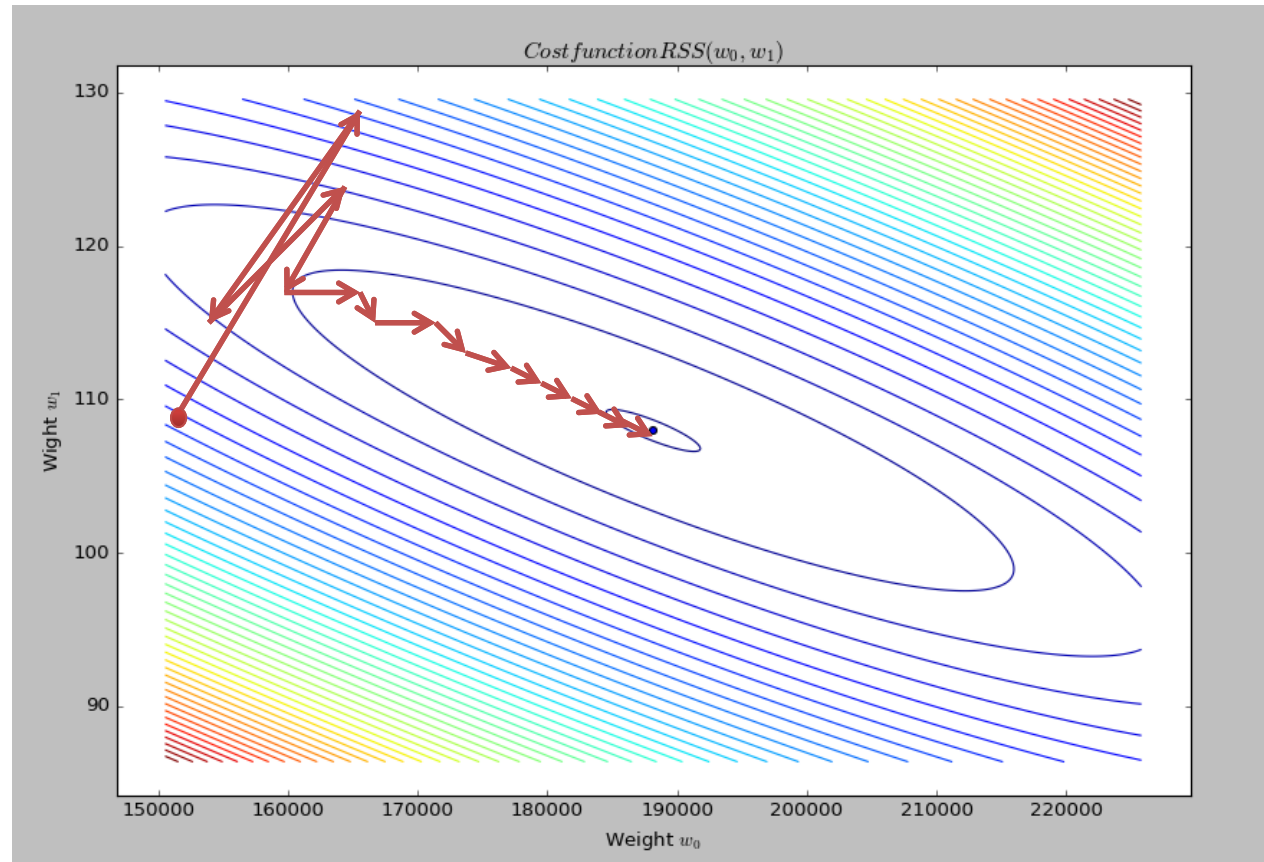
- krok za mały \rightarrow zbyt wolna zbieżność
- krok za duży \rightarrow możliwy wzrost wartości funkcji celu



Zmienny współczynnik kroku

W praktycznych implementacjach wartość współczynnika γ maleje wraz z numerem iteracji, np.:

- $\gamma(t) = \frac{\gamma(0)}{t}$
- $\gamma(t) = \frac{\gamma(0)}{\sqrt{t}}$



Gradient RSS

$$RSS(w) = \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i)^2 = \sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{j=0}^n x_i^j w_j \right)^2$$

Uwaga: tu x_i^j oznacza j -ty element i -tego wektora, czyli $x[i][j]$

Pochodna cząstkowa względem w_j :

$$\frac{\partial RSS(w)}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - w^T x_i)(-x_i^j) = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i)x_i^j$$

- Oznaczmy: $e_i = (y_i - w^T x_i)$. Pochodna $\frac{\partial}{\partial w_j} (e_i)^2 = 2e_i \frac{\partial}{\partial w_j} e_i$
- Pochodna $\frac{\partial}{\partial w_j} e_i = -x_i^j$
- Pochodna sumy $i = 1, m$ składników jest równa sumie pochodnych
- Gradient:

$$\nabla RSS(w) = \left[-2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i) \cdot 1, -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i)x_i^1, \dots, -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i)x_i^n \right]$$

- Wartość $x_i^0 = 1$

Obliczanie gradientu RSS

$$\frac{\partial RSS(w)}{\partial w_j} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i) x_i^j$$

- Dla i -tej obserwacji błąd mnożony jest przez wartość j -tego atrybutu
- Złożoność obliczeniowa $O(n^2 m)$
- Należy przewidzieć kilkadziesiąt iteracji
- Jeśli obserwacje $(x_i, y_i)_{i=1, m}$ są umieszczone w bazie danych, wielokrotna iteracja może być kosztowna (np. $m = 100000$).
- Zamiast:

$$\nabla RSS(w) = [-2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i) \cdot 1, -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i) x_i^1, \dots, -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i) x_i^n]$$

poszczególne składowe mogą być liczone równoległe:

$$\nabla RSS(w) = \sum_{i=1}^m [-2(y_i - w^T x_i), -2(y_i - w^T x_i) x_i^1, \dots, -2(y_i - w^T x_i) x_i^n]$$

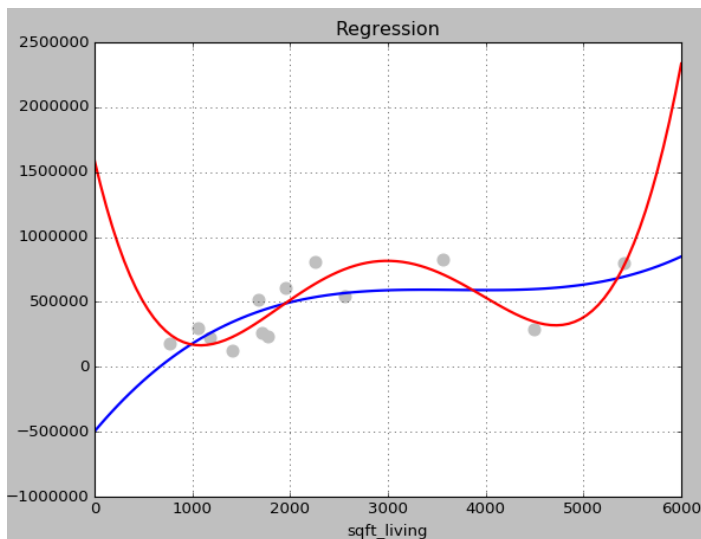
- Warianty algorytmu:
 - **stochastic gradient descent** (wykonanie kroku optymalizacji po odczycie danych)
 - **coordinate descent** (optymalizacja w kierunku jednej ze składowych):

$$\nabla RSS(w) = [const \dots, -2 \sum_{i=1}^m (y_i - w^T x_i) x_i^j, \dots const]$$

Modele nieliniowe

- Regresja liniowa może być zastosowana do wyznaczenia parametrów modeli będących nieliniowymi funkcjami.
- Często przybliżana funkcja jest wielomianem – **regresja wielomianowa**
- Przykład dla jednej zmiennej:

$$f(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 \dots$$



Niebieska krzywa

$$f(x) = -497430.99 + 9.00e+02 x - 2.45e-01 x^2 + 2.22e-05 x^3$$

Czerwona krzywa

$$f(x) = 1589582.0 - 3.21e+03 x + 2.35 x^2 - 6.15379704e-04 x^3 + 5.24e-08 x^4$$

Modele wielomianowe dla danych wielowymiarowych

Dla n -wymiarowych danych postać wielomianowa może obejmować składniki kolejnych stopni:

- n - pierwszego stopnia
- $n(n + 1)/2$ - drugiego stopnia
- $n(n + 1)(n + 2)/6$ - trzeciego stopnia

$$f(x) = w_0 + \sum w_j x_j + \sum w_{jk} x_j x_k + \sum w_{jkl} x_j x_k x_l \dots$$

- Dla $n=30$ wielomian stopnia 3 będzie miał potencjalnie $1+30+30*31/2+30*31*32/2=5456$ czynników
- Problemem jest:
 - wybór modelu (które kombinacje zmiennych brać pod uwagę)
 - wyznaczenie/przechowywanie/dostęp do macierzy cech X (5456 kolumn?)

Cechy

- W ogólnym przypadku model jest kombinacją liniową dowolnych nieliniowych funkcji danych wejściowych

$$f(x) = w_0 + \sum_{i=1}^N w_i h_i(x)$$

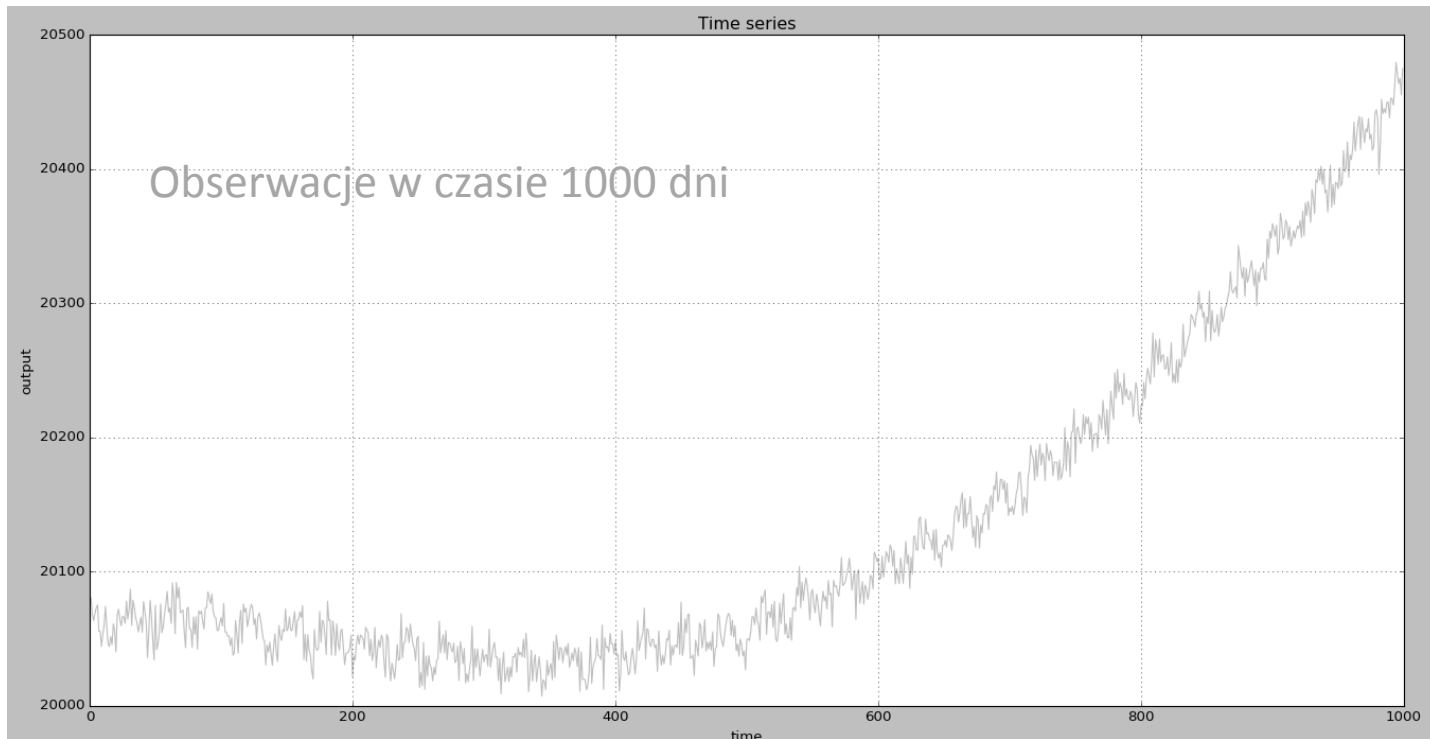
- Funkcja $h_i(x): x \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ nazywana jest cechą.
- W szczególności może zachodzić $N = n$ oraz $h_i(x) = x[i]$ (i -tą cechą jest i -ty składnik wektora x)
- Niezależnie od przebiegu użytych cech – wyznaczane są współczynniki kombinacji liniowej (wagi w) minimalizujące $RSS(w)$.
- **Model matematyczny i algorytmy pozostają bez zmian**
- Dodając cechę 1 (o indeksie 0) możemy zapisać funkcję, jako:

$$f(x) = w^T h(x)$$

- w to $N + 1$ wymiarowy wektor wag,
- $h(x) = [1, h_1(x), \dots, h_N(x)]$ to wektor cech

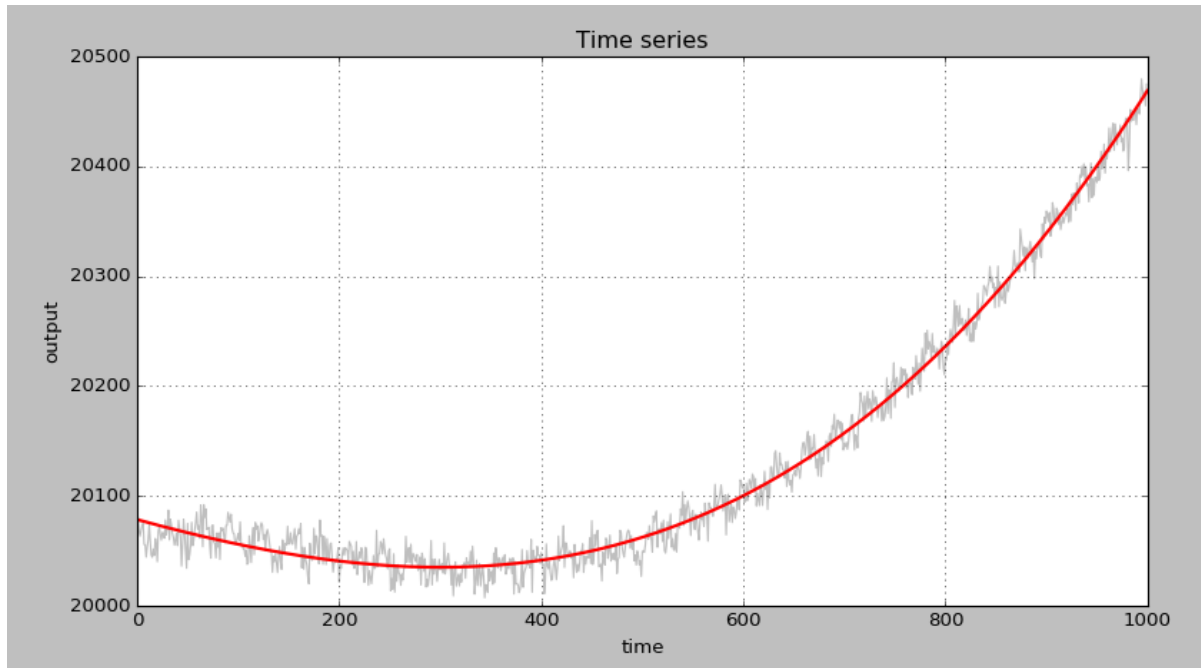
Szeregi czasowe

- Wiele problemów ma charakter przebiegów czasowych, np.
 - zmiana cen w czasie
 - zmiana temperatury
 - zmiana zużycia energii
- Często te przebiegi są kombinacją ogólnych tendencji oraz zmian sezonowych

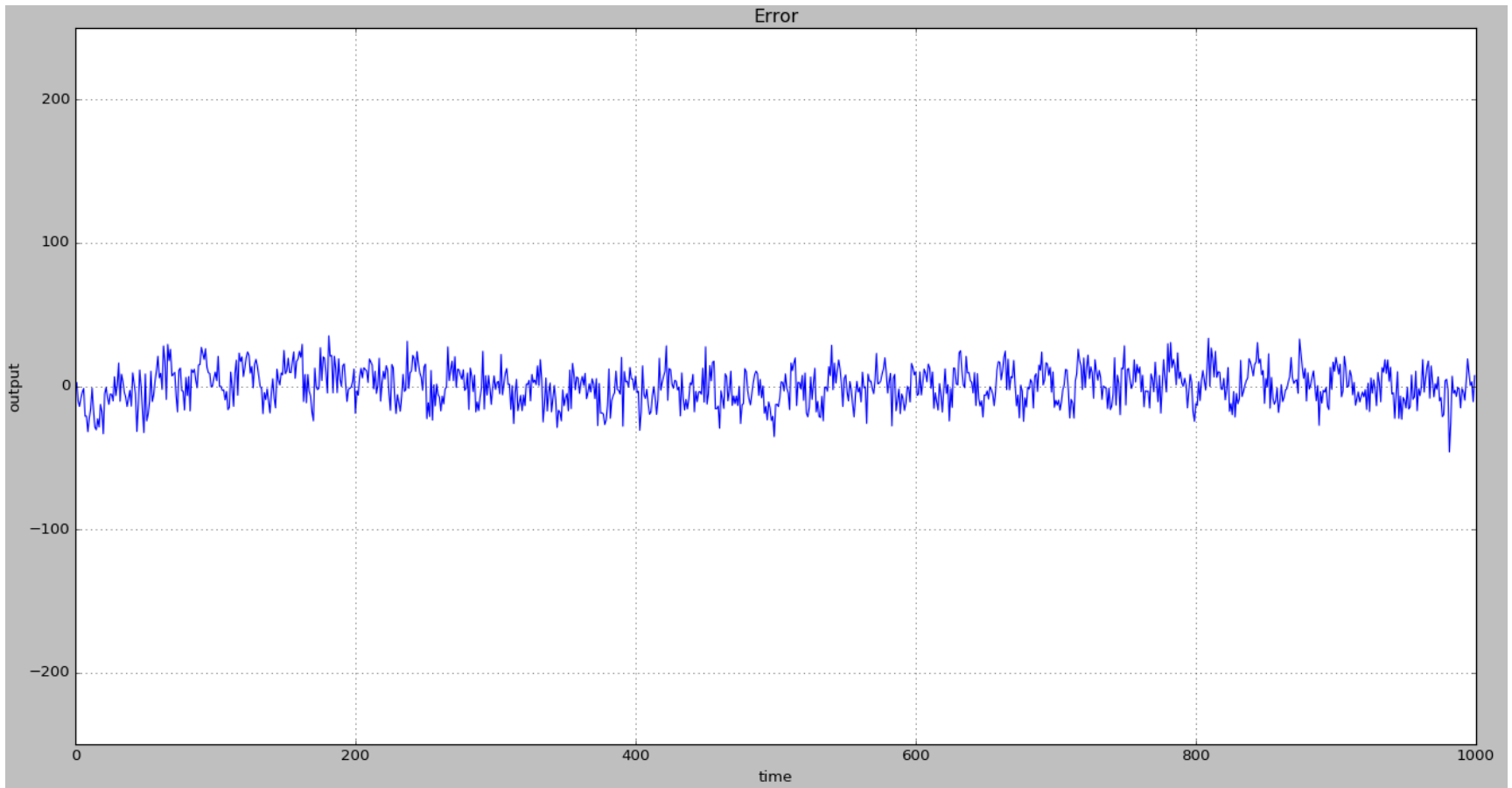


Szeregi czasowe

- Za pomocą regresji można znaleźć krzywą modelującą ogólną tendencję:
 $y = f(x)$
- Model taki nie uwzględnia przebiegów sezonowych (traktuje je jak błąd):
 $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$



Wykres błędu



Widoczne 30 dniowe sezonowe fluktuacje

Model

- Model uwzględniający sezonowość ma postać:

$$y = w_0 + w_1 t + w_2 t^2 + w_3 t^3 + w_4 \sin\left(\frac{2\pi}{30} t + \Phi\right)$$

- Wybrano krzywą 3 stopnia
- Okres wynosi 30 dni: $\frac{2\pi}{30}$
- Nieznane przesunięcie fazowe: Φ
- Faza Φ musi zostać przekształcona w cechę. Z zależności:
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ mamy:

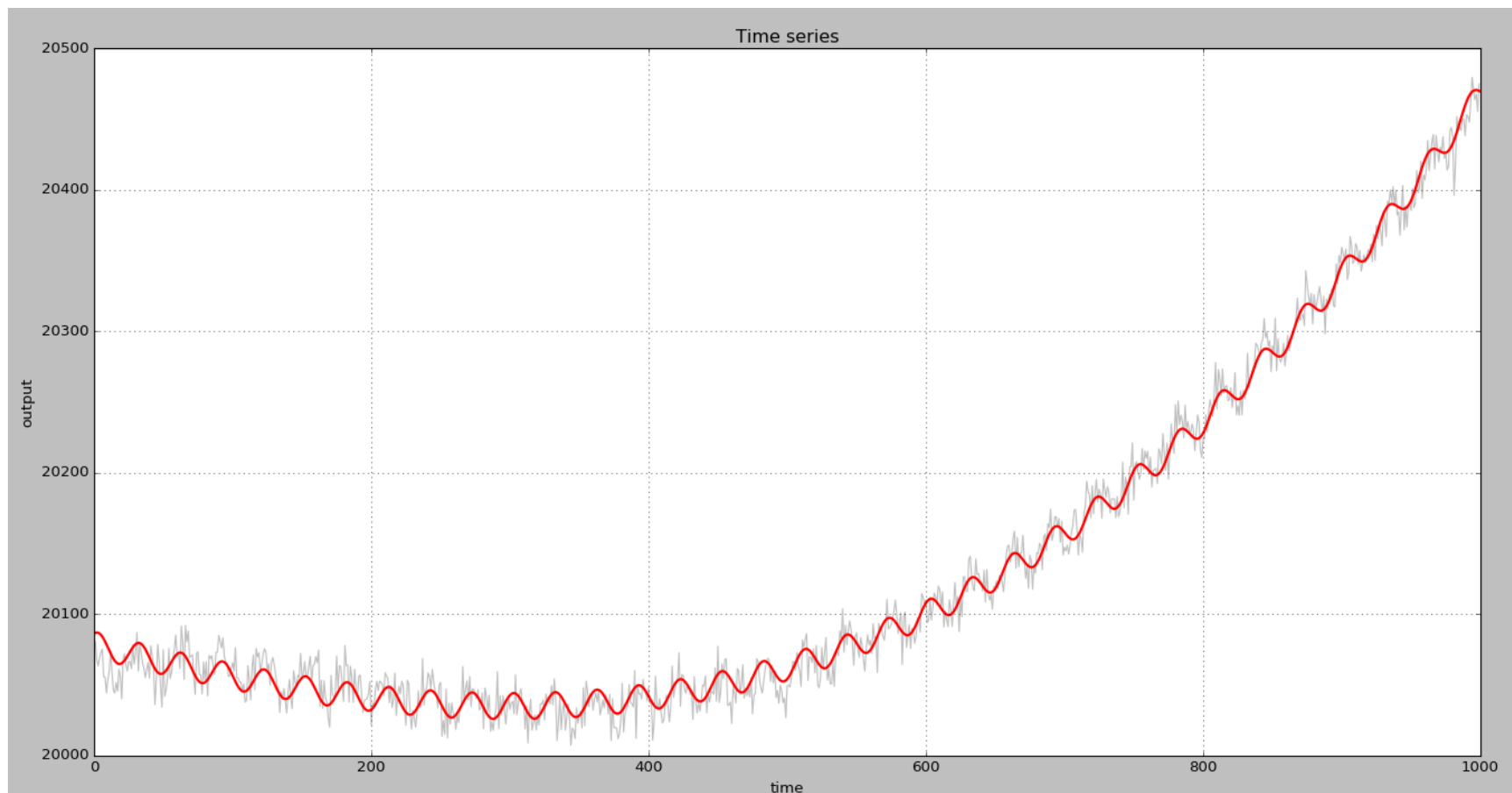
$$\sin\left(\frac{2\pi}{30} t + \Phi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{30} t\right) \cos(\Phi) + \cos\left(\frac{2\pi}{30} t\right) \sin(\Phi)$$

Dla ustalonego Φ czynniki $\cos(\Phi)$ i $\sin(\Phi)$ będą stałe i staną się częścią wag.

Równanie opisujące model musi jednak uwzględnić $\cos\left(\frac{2\pi}{30} t\right)$:

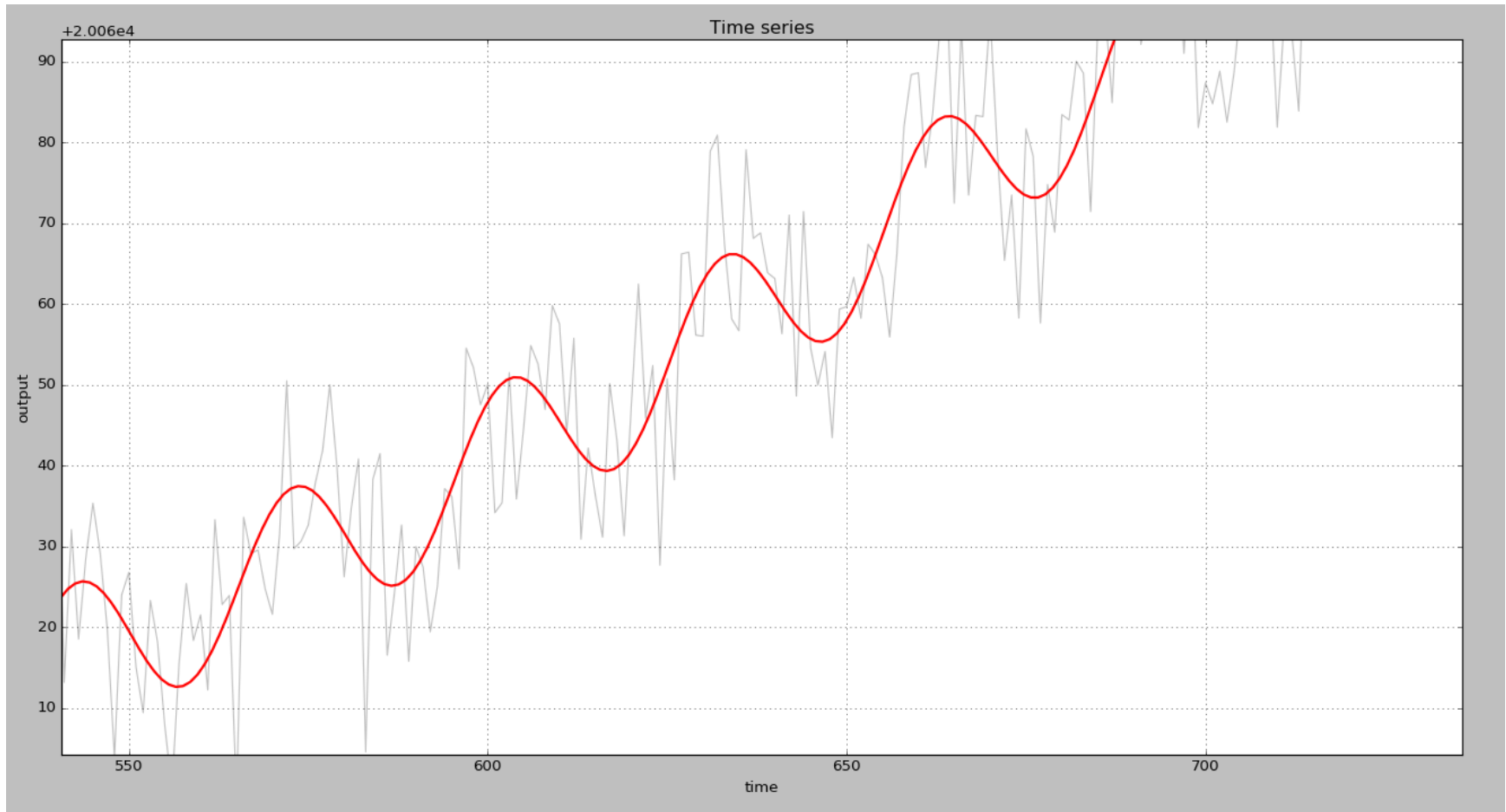
$$y = w_0 + w_1 t + w_2 t^2 + w_3 t^3 + w_4 \sin\left(\frac{2\pi}{30} t\right) + w_5 \cos\left(\frac{2\pi}{30} t\right)$$

Wizualizacja modelu



$$y = 20078.47 - 2.52e - 01 \cdot t + 2.39e - 04 \cdot t^2 + 4.04e - 07 \cdot t^3 + 5.05\sin\left(\frac{2\pi}{30}t\right) + 7.67\cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)$$

Wizualizacja modelu



Dane przebiegu zostały wygenerowane jako

$$at^2 + bt + c - d \exp(-t) + e \sin\left(\frac{2\pi}{30}t + f\right) + g N(0,1)$$