Egzamin z analizy IIIs. IIIt 2010

Zadanie 1. Zamienić kolejność całkowania wyrażając jako jedną całkę następującą sumę:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \;+\; \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 2. Niech $\mathcal{B} \subset 2^X$ będzie σ-algebrą, na której jest określona miara μ. Jeśli $\mathcal{N}$ oznacza ogół podzbiorów zbiorów miary zero, tzn. $K \in \mathcal{N} \Leftrightarrow (\exists M \in \mathcal{B} : K \subset M,\ \mu(M) = 0)$, niech $\mathcal{A} = \{E \subset X : \exists A \in \mathcal{B}\, \exists K, L \in \mathcal{N} : A \cup K = E \cup L\}$. Sprawdzić, że $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą. Gdy μ jest miarą zupełną na $\mathcal{B}$, jaka jest relacja pomiędzy tymi σ-algebrami ($\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$)?

Zadanie 3. Obliczyć pole tej części sfery $x^2+y^2+z^2 = 100$, która leży między płaszczyznami $z = 6$ i $z = 8$ w oktancie $\{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Zadanie 4. Niech $\ell = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, y = \ln x\}$. Wykazać, że długość tej krzywej nie przekracza $2\sqrt{2}$. Obliczyć masę tej krzywej, czyli całkę $\int_\ell \rho(x,y)\,dl$, jeśli funkcja ρ gęstości liniowej dana jest wzorem: $\rho(x,y) = x^2$.

Zadanie 5. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$$

wzdłuż krzywej γ o początku w punkcie $(1,0)$ i końcu $(5,0)$, zawartej w $\{(x,y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$.

.

Egzamin z analizy IIIs. IIIt 2010

Zadanie 1. Zamienić kolejność całkowania wyrażając jako jedną całkę następującą sumę:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y \;+\; \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 2. Niech $\mathcal{B} \subset 2^X$ będzie σ-algebrą, na której jest określona miara μ. Jeśli $\mathcal{N}$ oznacza ogół podzbiorów zbiorów miary zero, tzn. $K \in \mathcal{N} \Leftrightarrow (\exists M \in \mathcal{B} : K \subset M,\ \mu(M) = 0)$, niech $\mathcal{A} = \{E \subset X : \exists A \in \mathcal{B}\, \exists K, L \in \mathcal{N} : A \cup K = E \cup L\}$. Sprawdzić, że $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą. Gdy μ jest miarą zupełną na $\mathcal{B}$, jaka jest relacja pomiędzy tymi σ-algebrami ($\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$)?

Zadanie 3. Obliczyć pole tej części sfery $x^2+y^2+z^2 = 100$, która leży między płaszczyznami $z = 6$ i $z = 8$ w oktancie $\{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Zadanie 4. Niech $\ell = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, y = \ln x\}$. Wykazać, że długość tej krzywej nie przekracza $2\sqrt{2}$. Obliczyć masę tej krzywej, czyli całkę $\int_\ell \rho(x,y)\,dl$, jeśli funkcja ρ gęstości liniowej dana jest wzorem: $\rho(x,y) = x^2$.

Zadanie 5. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$$

wzdłuż krzywej γ o początku w punkcie $(1,0)$ i końcu $(5,0)$, zawartej w $\{(x,y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$.