Egzamin z analizy -część zadaniowa 5.II 2010

Z1. Zamienić kolejność całkowania i przekształcić sumę 2 całek w jedną całkę podwójną.

$$\int_{-1}^{1}\int_{\arccos x}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\int_{\pi x-\pi}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z2. a) Obliczyć potencjał dla pola wektorowego: $\vec{F} = [y\cos xy + 4xy, x\cos xy + 6y + 2x^2]$.
b) Dla kryzwej γ o początku $A = (1, \pi)$ oraz końcu $B = (\pi, 2)$ obliczyć całkę:

$$\int_\gamma (y\cos xy + 4xy)dx + (x\cos xy + 6y + 2x^2)dy.$$

Z3. Znaleźć pole pow. płata wyciętego walcem $x^2 + y^2 = R^2$ ze stożka $y^2 + z^2 = x^2$.

Z4. Wyznaczyć następujący strumień wektora przez brzeg S czworościanu jednostkowego (czyli ostrosłupa o wierzchołkach $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$) ,zorientowany na zewnątrz:

$$\oint\!\!\!\oint_S xydydz + yzdzdx + xzdxdy.$$

Z5. Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów $E \subset \mathbb{R}$ takich, że $x \in E \Leftrightarrow x + 1 \in E$. (To „okresowość zbioru" E -dokładniej, okresowość χ_E -jego funkcji charakterystycznej.)

(a) Sprawdzić, że $\mathcal{A}$ jest sigma-algebrą.

(b) Wykazać, że *wszystkie funkcje* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *mierzalne* względem tej algebry $\mathcal{A}$ (tu $\mathcal{B}$= σ-algebra zbiorów borelowskich) *są okresowe,* czyli takie, że $f(x + 1) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.