

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Uzupełnienia do wykładu 1. (4 III 2010)</b>	<b>2</b>
1.1	Jednostajna ciągłość funkcji . . . . .	2
1.2	Całka Riemanna (heureka) . . . . .	3
1.3	Całka Riemanna -konstrukcja . . . . .	4
1.4	Przykłady całek liczonych z definicji . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Całka oznaczona-cd.</b>	<b>7</b>
2.1	Rozdrobnienia podziałów . . . . .	7
2.2	Warunki równoważne całkowalności . . . . .	7
2.3	Własności funkcji całkowalnych. . . . .	8
<b>3</b>	<b>Zastosowanie całki oznaczonej</b>	<b>8</b>
3.0.1	Miara Jordana . . . . .	8
3.1	Miara trapezu krzywoliniowego . . . . .	9
3.2	Długość łuku krzywej . . . . .	10
3.3	Objętość bryły obrotowej . . . . .	11
3.4	Pole powierzchni obrotowej . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Całki niewłaściwe</b>	<b>11</b>
4.1	Definicja całki niewłaściwej . . . . .	12
4.2	Warunek Cauchy'ego zbieżności . . . . .	12
4.3	Kryterium porównawcze . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Rachunek różniczkowy wielu zmiennych -wstęp</b>	<b>14</b>
5.1	Pochodne cząstkowe . . . . .	14
5.2	Przykład negatywny . . . . .	16
5.3	Długość wektora, odległość punktów . . . . .	16
5.4	Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Różniczkowalność</b>	<b>20</b>
6.1	Jeszcze o granicach podwójnych . . . . .	20
6.2	Różniczka zupełna . . . . .	21
6.3	Własności różniczki . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Pochodne kierunkowe</b>	<b>23</b>
7.1	Ekstrema lokalne, punkty stacjonarne . . . . .	24
7.2	Formy kwadratowe . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Pochodne wyższych rzędów.</b>	<b>26</b>
8.0.1	Druga różniczka . . . . .	27
8.1	Ekstrema lokalne -warunek wystarczający . . . . .	27
8.2	Funkcje uwikłane, ekstrema warunkowe . . . . .	28
8.3	Ekstrema warunkowe . . . . .	30
8.3.1	Obraz obszaru. Funkcje wypukłe . . . . .	32
8.4	Płaszczyzna styczna . . . . .	33
<b>9</b>	<b>Szeregi liczbowe</b>	<b>33</b>
<b>10</b>	<b>Zbieżność jednostajna, szeregi funkcyjne</b>	<b>37</b>
10.1	Zbieżność wraz z pochodnymi . . . . .	39
<b>11</b>	<b>Szeregi potęgowe. Obszar zbieżności</b>	<b>41</b>
11.1	Szereg Taylora i Maclaurina . . . . .	42
<b>12</b>	<b>Szeregi Fouriera</b>	<b>44</b>
12.1	Funkcje okresowe . . . . .	44
12.2	Norma $L^2$ (średniokwadratowa) . . . . .	45
<b>13</b>	<b>Klasyczne szeregi Fouriera</b>	<b>48</b>

# Analiza matematyczna na kierunku "Elektrotechnika" II semestr

13 maja 2019

## 1 Uzupełnienia do wykładu 1. (4 III 2010)

### 1.1 Jednostajna ciągłość funkcji

Przypomnijmy najpierw pojęcie funkcji ciągłych  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}$

- *Ciągłość w zbiorze  $D$*  oznacza ciągłość w każdym jego punkcie  $t$ , tzn.

$$\forall \epsilon > 0 \forall t \in D \exists \delta > 0 (s \in D, |s - t| < \delta) \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon. \quad (1)$$

W warunku tym zamieniliśmy, bo można, kolejność kwantyfikatorów:  $\forall t \in D$  oraz  $\forall \epsilon > 0$ . Natomiast nie można zamienić kwantyfikatorów:  $\forall t \in D$  oraz  $\exists \delta > 0$ . Oznacza to, że na ogół nie da się dobrać  $\delta$  „dobrego dla wszystkich  $t \in D$ ”. Na przykład, gdy  $D = [1, +\infty)$ , dla  $f(t) = t^2$  mamy  $f(t+h) - f(t) = (t+h)^2 - t^2 = 2th + h^2 > \epsilon$ , gdy  $t > \frac{\epsilon}{2h}$ . Więc gdyby  $\delta$  spełniało warunek (1), to dla  $h = \frac{\delta}{2}$  mamy  $|(t+h) - t| < \delta$ , jednak (1) nie zachodzi dla wszystkich  $t \in D$  -nie zachodzi mianowicie dla  $t > \frac{\epsilon}{\delta}$ . Drugi przykład -gdzie  $D$  jest zbiorem ograniczonym  $(0, 1]$  otrzymamy biorąc  $g(t) = \frac{1}{t}$ . Wówczas dla  $0 < s < \frac{t}{2}$  mamy  $g(s) > 2g(t)$ , zaś  $|g(s) - g(t)| > g(t)$ , co przy  $t < \frac{1}{n}$  da  $|g(s) - g(t)| > n$  -różnice są więc dowolnie duże, a miały być dowolnie małe, gdyby  $\delta$  dało się dobrać wspólne dla wszystkich  $s, t \in D$ .

- **Definiujemy funkcje jednostajnie ciągłe** w zbiorze  $D$  poprzez warunek

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, s \in D (|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon). \quad (2)$$

Widzimy więc na podstawie naszych przykładów, że gdy zbiór  $D$  albo nie jest ograniczony, albo nie jest domknięty, to mogą (a nawet -jak można wykazać -muszą) wówczas istnieć funkcje ciągłe na zbiorze  $D$ , które nie są jednostajnie ciągłe.

- **Twierdzenie Cantora** mówi, że *funkcje ciągłe na zbiorach domkniętych i ograniczonych są jednostajnie ciągłe*. Będziemy z niego często korzystali podczas rozważania całek oznaczonych.

(Szkic uzasadnienia metodą „nie wprost”: Gdyby dla pewnego  $\epsilon > 0$  nie dało się znaleźć żadnego  $\delta > 0$  spełniającego tezę z warunku (2), to biorąc  $\delta = \frac{1}{n}$  znajdziemy takie pary punktów  $s_n, t_n \in D$ , że (z zaprzeczenia implikacji) jest  $|s_n - t_n| < \frac{1}{n}$  oraz  $|f(s_n) - f(t_n)| \geq \epsilon$ . Dzięki twierdzeniu Bolzano-Weierstrassa (z ograniczoności  $D$ ), można wybrać podciągi ciągów  $s_n$  oraz  $t_n$  zbieżne do pewnych granic  $s_0, t_0$ . Ponieważ  $|s_n - t_n| < \frac{1}{n}$ , musi być  $s_0 = t_0$ , zaś z domkniętości  $D$ , mamy  $s_0 \in D$ . Teraz otrzymamy sprzeczność z warunkiem ciągłości  $f$  w punkcie  $s_0$ . Dla dostatecznie odległych wyrazów w tych podciągach mamy bowiem  $|s_n - s_0|$  oraz  $|t_n - t_0| = |t_n - s_0|$  na tyle małe, by  $|f(s_n) - f(s_0)| < \frac{\epsilon}{2}$  oraz  $|f(t_n) - f(s_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ . To da (dzięki nierówności trójkąta) sprzeczność:  $|f(s_n) - f(t_n)| < \epsilon$ .)

- Funkcje ciągłe w przedziale domkniętym osiągają zarówno wartości: największą i najmniejszą (tw. Weierstrassa), jak i wszystkie wartości pośrednie (własność Darboux).

Zamiast  $\sup\{f(t) : t \in \Delta\}$  będziemy pisali  $\sup_{\Delta} f$ . Tak więc dla funkcji ciągłej  $f \in C[a, b]$  przeciwdziedziną  $f$ , czyli obrazem  $f([a, b])$  zbioru  $[a, b]$  jest przedział  $[m, M]$ , gdzie  $m = \inf_{[a, b]} f$ , zaś  $M = \sup_{[a, b]} f$ .

## 1.2 Całka Riemanna (heureka)

Dla  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  chcemy zdefiniować liczbę  $J(f) = \int_a^b f(t) dt$  tak, by spełnione były następujące postulaty:

1. *Liniowość funkcjonalu  $J$* , tzn.:  $J(f + g) = J(f) + J(g)$ ,  $J(Cf) = CJ(f)$ ;
2.  $\int_a^b 1 dt = b - a$  (całka z funkcji stałej = 1 jest długością drogi całkowania);
3.  $J$  ma zachowywać nierówności (*monotoniczność  $J$* ):

$$(\forall_{t \in [a, b]} f_1(t) \leq f_2(t)) \Rightarrow J(f_1) \leq J(f_2);$$

4. ma zachodzić „*addytywność względem drogi całkowania*”:

$$a < b < c \Rightarrow \int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Przyjrzyjmy się paru wnioskom z tych postulatów:

**Całkowa nierówność trójkąta:** Z monotoniczności całki i z nierówności  $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$  (zachodzącej we wszystkich punktach  $t$ ) wynika, że  $-J(|f|) = J(-|f|) \leq J(f) \leq J(|f|)$ , więc  $|J(f)| \leq J(|f|)$ , czyli

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Z warunku (2) i z liniowości, całka z funkcji stałej  $m$  równa jest iloczynowi  $m$  przez długość drogi całkowania. A ponieważ dla stałych  $m = \inf_{[a, b]} f$ ,  $M = \sup_{[a, b]} f$  mamy  $m \leq f(t) \leq M$ , całkując stronami te nierówności (czyli stosując (3)), a następnie dzieląc stronami przez długość drogi całkowania otrzymujemy:

**Twierdzenie o wartości średniej dla całek:**  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$ . Ponadto gdy  $f$  jest ciągła, z własności Darboux wynika istnienie punktu  $c \in [a, b]$ , dla którego wartość  $f(c)$  jest równa *średniej całkowej z  $f$  na przedziale  $[a, b]$* , zdefiniowanej właśnie jako liczba  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .

Z tego twierdzenia dość łatwo wywnioskujemy, że dla funkcji ciągłej  $f \in C[a, b]$  wzór

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \tag{3}$$

określa funkcję pierwotną. Co więcej, dla dowolnej funkcji pierwotnej  $\Phi$  dla  $f$  w przedziale  $(a, b)$ , czyli takiej, że  $\forall_{x \in (a, b)} \frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$  i takiej, że  $\Phi \in C[a, b]$ , będziemy mieli tzw. **wzór Newtona-Leibniza**:

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{4}$$

(Istotnie, dla  $x \in (a, b) \ni x + h$  mamy

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

To, jako średnia całkowa z  $f$  po przedziale  $[x, x+h]$  jest wartością  $f(z_h)$  w pewnym punkcie pośrednim  $z_h \in [x, x+h]$ , który przy  $h \rightarrow 0$  zmierza do  $x$ . Z ciągłości  $f$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(z_h) = f(x)$ . A więc  $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ , jest równe  $f(x)$ . To rozumowanie przeprowadziliśmy przy  $h \rightarrow 0^+$ . Dla ujemnych wartości  $h$  jedynie drobna modyfikacja tego rozumowania daje taką samą granicę. Dana wzorem (3) funkcja  $F$  jest więc funkcją pierwotną dla  $f$ . Na koniec zauważmy, że gdy  $\Phi$  jest jakąś inną (dowolnie wybraną) funkcją pierwotną dla  $f$ , to mamy  $F = \Phi + C$  dla pewnej stałej  $C$ , którą otrzymamy z równości  $F(a) = 0$ , jako równą  $C = -\Phi(a)$ . Stąd  $\int_a^b f(t) dt = F(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a)$ .

Dokładniej rzecz biorąc, powinniśmy najpierw sprawdzić ciągłość  $F$ . Faktycznie, ta ciągłość wynika z nierówności:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq |x - y| \sup_{[a,b]} |f|$$

zachodzących dla  $x < y, x, y \in [a, b]$ . Do (ciągłej w  $[a, b]$ , różniczkowalnej w  $(a, b)$ ) funkcji  $F - \Phi$  stosujemy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (dla pochodnych), wnioskując, że  $F - \Phi$  jest stała na przedziale  $[a, b]$ .

Zasadniczą kwestią jest niemożność opisanie konkretnymi wzorami całek nieoznaczonych dla wielu funkcji ciągłych. Dlatego **do definicji całki oznaczonej nie możemy użyć wzoru (4)**, a postulaty 1-4 stanowią jedynie pewną wskazówkę dla następującej konstrukcji:

### 1.3 Całka Riemanna -konstrukcja

*Podziałem odcinka*  $[a, b]$  nazwiemy uporządkowany układ  $\tau_n = (t_0, \dots, t_n)$  jego punktów taki, że  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ . Wówczas  $j$ -tym *odcinkiem tego podziału* nazwiemy przedział  $[t_{j-1}, t_j]$ . Jego długość oznaczymy symbolem  $\Delta_j t$  lub  $\Delta_j \tau$ . Tak więc,  $\tau_n$  jest podziałem zbioru  $[a, b]$  na  $n$  części, które są odcinkami o długościach

$$\Delta_j t = t_j - t_{j-1}.$$

Zauważmy, że

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j t = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1}) = t_n - t_0 = b - a. \quad (5)$$

Liczbę  $\delta(\tau_n) := \max\{\Delta_j t : j = 1, \dots, n\}$  nazwiemy *średnicą podziału*  $\tau_n$ . Mówimy, że ciąg podziałów  $\tau_n$  jest *ciągami normalnym*, gdy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\tau_n) = 0$ .

*Układem punktów pośrednich*  $\Lambda_n = (\lambda_j)$  dla naszego podziału  $\tau_n$  nazywamy dowolny układ  $n$  punktów  $\lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$ . (To jest notacja dla osób nie lubiących greckiej litery  $\xi$  (czyt. „ksi” mała wersja litery  $\Xi$ ), które, jak zauważyłem na wykładzie, przeważają wśród Państwa)

Dla funkcji  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i dla ustalonego podziału  $\tau_n$  tworzymy 3 typy tak zwanych *sum całkowych*:

*Sumy całkowe odpowiadające układowi punktów pośrednich*  $\lambda_j$  definiujemy jako sumy

$$S_n(f) = S(f, \tau_n, \Lambda_n) := \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \Delta_j t. \quad (6)$$

Definiujemy też tzw. *sumy całkowe dolne* dla podziału  $\tau_n$  jako

$$\underline{S}_n(f) = \underline{S}(f, \tau_n) := \sum_{j=1}^n \left( \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \right) \Delta_j t. \quad (7)$$

Wreszcie, *sumy całkowe górne*, to sumy

$$\overline{S}_n(f) = \overline{S}(f, \tau_n) := \sum_{j=1}^n \left( \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f \right) \Delta_j t. \quad (8)$$

Zauważmy, że zawsze

$$\underline{S}(f, \tau_n) \leq S(f, \tau_n, \Lambda_n) \leq \overline{S}(f, \tau_n). \quad (9)$$

**Dygresja:** Dla funkcji stałej równej 1 wszystkie te sumy, niezależnie od podziału i punktów pośrednich, są takie same -równe  $b - a$ , co wynika wprost z (5). Ogólniej, funkcję  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nazwiemy *funkcją schodkową*, gdy dla pewnego podziału  $\tau$  odcinka  $[a, b]$  na każdym z odcinków  $[t_{j-1}, t_j]$  ta funkcja jest stała. Innymi słowy, stałe mają być wszystkie restrykcje  $f$  do odcinków tego podziału. Wówczas z postulatów 1,2,4 wynika, że każda z tych sum całkowych względem tego podziału jest równa całce  $J(f)$ . Oczywiście, funkcje na ogół nie są schodkowe, natomiast te ostatnie mogą jedynie przybliżać (w odpowiednim sensie) dowolną funkcję  $f$ .

**Definicja całki oznaczonej:** Mówimy, że funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest *całkowalna w sensie Riemanna*, gdy dla dowolnego ciągu normalnego  $(\tau_n)$  podziałów odcinka  $[a, b]$  (czyli takiego, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\tau_n) = 0$ ) istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \tau_n, \Lambda_n)$$

przy dowolnych wyborach układów punktów pośrednich  $\Lambda_n$ . Wówczas, jak łatwo sprawdzić, taka granica jest wspólna dla wszystkich ciągów normalnych podziałów. Granicę tę oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(t) dt$$

i nazywamy *całką oznaczoną (całką Riemanna) z funkcji  $f$  po przedziale  $[a, b]$* . Funkcje, dla których istnieją granice sum całkowych przy dowolnych normalnych ciągach podziałów i układów punktów pośrednich nazywamy *funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna* na tym przedziale, a ogół takich funkcji oznaczamy symbolem  $R[a, b]$ .

**Twierdzenie.** Całka oznaczona spełnia postulaty 1-4 sformułowane w §1.2:

(ad 1.) Liniowość można sprawdzić tak:

Dla danego podziału  $\tau_n$  i układu  $\Lambda_n$  jego punktów pośrednich, mamy

$$S(f + g, \tau_n, \Lambda_n) = S(f, \tau_n, \Lambda_n) + S(g, \tau_n, \Lambda_n),$$

więc dla normalnego ciągu takich podziałów, jeśli  $f$  oraz  $g$  są całkowalne, to każda z sum całkowych po prawej stronie zmierza do całki po odcinku  $[a, b]$  z odpowiedniej funkcji ( $f$  albo  $g$ ). Suma ciągów zbieżnych jest zbieżna (do sumy granic), stąd

$$\int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

Podobnie sprawdzamy, że  $cf(t)$  jest całkowalna, o całce równej  $c \int_a^b f(t) dt$ .

(ad 2.) Jak już zauważyliśmy, funkcje stałe są całkowalne,  $\int_a^b C dt = (b - a)C$ .

(ad 3.) Jeśli  $f \leq g$  (w każdym punkcie z naszego przedziału), to z nieujemności  $\Delta_j t$  wynika, że  $f(\lambda_j)\Delta_j t \leq g(\lambda_j)\Delta_j t$ , sumując stronami te nierówności (względem  $j = 1, \dots, n$ ), otrzymamy  $S_n(f) \leq S_n(g)$ , co po przejściu do granicy (przy  $n \rightarrow \infty$  dla normalnego ciągu podziałów) implikuje nierówność

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

(ad 4.) Addytywność względem drogi całkowania (postulat 4) sprawdzamy rozbijając sumy całkowe dla  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  na sumy po przedziałach  $[a, b]$  oraz sumy po  $[b, c]$ , rozbijając podział  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = c$ , jeśli dla pewnego  $k < n, k > 0$  jest  $t_k = b$ , na podziały  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$  oraz  $t_k = b < t_{k+1} < \dots < t_n = c$ .

Mamy też bardzo ważne oszacowanie dla funkcji całkowalnej  $f \in R[a, b]$  (wynikające z całkowania stronami nierówności:

$$-\sup\{|f(s)| : s \in [a, b]\} \leq f(t) \leq \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

zachodzącej dla wszystkich  $t \in [a, b]$ .

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq |b - a| \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\} \quad (10)$$

## 1.4 Przykłady całek liczonych z definicji

**Przykład 1.** Dla funkcji stałej równej  $C$ , mamy  $\int_a^b C dt = (b-a)C$ . (Wystarczy zastosować rozdzielność dodawania względem mnożenia przez  $C$  oraz (5).) Ogólniej, dla funkcji schodkowej  $\phi$  stałej na każdym z odcinków podziału  $\tau_n$ , sumy całkowe  $S(f, \tau_n, \Lambda_n)$  (przy dowolnie wybranych punktach pośrednich) są równe całce  $\int_a^b \phi(t) dt$ .

**Przykład 2.** Sprawdźmy, jak wyglądają sumy całkowe dolne i górne dla funkcji  $f(t) = t^2$  na przedziale  $[0, 1]$  względem podziału „równomiernego” - tzn. dla  $\tau_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1)$ . Funkcja jest na tym przedziale rosnąca, więc  $\inf_{[t_{j-1}, t_j]} f = (\frac{j-1}{n})^2$ , natomiast  $\sup_{[t_{j-1}, t_j]} f = (\frac{j}{n})^2$ . Długości odcinków podziału są jednakowe (=równomierność podziału), równe  $\Delta_j t = \frac{1}{n}$

Dla sum dolnych mamy więc wzór

$$\underline{S}_n(f) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{j-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n (j-1)^2.$$

Ale, jak wiemy, (por. zadanie 4 z poprzedniego semestru), zachodzi wzór  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , więc  $\underline{S}_n(f) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Podobnie,  $\overline{S}_n(f) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Z nierówności (9) i z twierdzenia o 3 ciągach wynika więc zbieżność do  $\frac{1}{3}$  sum całkowych z dowolnie wybranymi punktami pośrednimi. Ale dla innych (nierównomiernych) podziałów taką zbieżność trzeba jeszcze dodatkowo wykazać, by sprawdzić, że  $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ .

Podobnie sprawdzamy, że  $\int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$ , korzystając ze wzoru na sumę sześciąt kolejnych  $n$  liczb naturalnych.

Jest zresztą niewiele funkcji, dla których mamy jakiś wzór na sumę postaci  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ . Całkowanie na podstawie definicji nie jest więc łatwe!

W wyjątkowych przypadkach można osiągnąć uproszczenie dobierając w sprytny sposób punkty pośrednie.

**Przykład 3.** Gdy  $0 < a < b$  i mamy już jakieś punkty podziału  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , szukając wartości całki  $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ , weźmy  $\lambda_j = \sqrt{t_{j-1}t_j}$ . wówczas  $S_n = \sum_j \frac{t_j - t_{j-1}}{t_j t_{j-1}} = \sum (\frac{1}{t_{j-1}} - \frac{1}{t_j})$ , co jako „suma teleskopowa” -z upraszczającymi się prawie wszystkimi (z wyjątkiem dwóch) składnikami, daje wartość  $\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_n}$ . Uzasadnienia wymaga tu jedynie całkowalność funkcji, czyli niezależność naszego wyniku od wyboru punktów pośrednich (patrz następny wykład).

**Przykład 4.** Dla funkcji nieujemnej całka może wynosić zero, choć funkcja jest dodatnia w pewnych punktach. Najłatwiej to zauważyć dla funkcji równej 1 w punkcie 0 oraz równej zero w pozostałych punktach odcinka  $[0, 1]$ . Sumy dolne są  $\geq 0$ , zaś suma górna, to  $t_1 - t_0$ , co nie przekracza średnicy podziału i zmierza do 0 dla normalnego ciągu podziałów. (Zamiast w zerze, możemy wziąć wartość 1 w dowolnie wybranym innym pojedynczym punkcie. Postulat addytywności względem drogi całkowania pozwala uzyskać to samo dla funkcji równej zero poza skończoną liczbą punktów. Jako ćwiczenie proponuję sprawdzenie, że gdy  $g(t) = 1$  dla  $t \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  oraz  $g(t) = 0$  dla  $t \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ , to również  $\int_0^1 g(t) dt = 0$ . (Ta funkcja nie jest równa zero na zbiorze przeliczalnym.)

Na koniec sprawdzimy jeden przykład, gdzie całka nie istnieje, choć funkcja jest różna od zera jedynie na zbiorze przeliczalnym złożonym z liczb wymiernych z odcinka  $[a, b]$ :

**Przykład 5.** Funkcja przyjmująca wartości 1 w punktach wymiernych oraz zero -w punktach niewymiernych -nie jest całkowalna na żadnym z przedziałów  $[a, b]$ , gdzie  $a < b$ . Funkcja ta nie jest ciągła w żadnym punkcie, gdyż dowolnie blisko każdej liczby wymiernej są liczby niewymierne (i na odwrót). Gdy jako punkty pośrednie wybierzemy jedynie punkty niewymierne, dostaniemy sumę całkową zero (równą sumie dolnej). Gdy natomiast wszystkie  $\lambda_j$  są wymierne, dzięki (5) otrzymamy sumę całkową równą  $b - a$ .

## 2 Całka oznaczona-cd.

### 2.1 Rozdrobnienia podziałów

Mówimy, że podział  $\tilde{\tau}$  jest drobniejszy od podziału  $\tau$  (lub jest rozdrobnieniem podziału  $\tau$ ), gdy każdy punkt podziału  $\tau$  występuje również w podziale  $\tilde{\tau}$ , czyli gdy  $\tilde{\tau}$  powstaje przez dalsze rozbitcie pewnych odcinków podziału  $\tau$ . Możemy tę relację zapisać symbolem  $\tau \subset \tilde{\tau}$ , pamiętając, że podział jest zbiorem swoich punktów, ale uporządkowanych w sposób rosnący. Oczywiście, średnica podziału drobniejszego jest mniejsza. Podział równomierny na  $n + 1$  równych części ma średnicę  $\frac{b-a}{n+1}$  mniejszą, niż podział na  $n$  równych części, lecz (dla  $n > 1$ ) nie jest od niego drobniejszy. Dla dowolnej pary podziałów  $\tau', \tau''$  istnieje podział  $\tau$  drobniejszy od każdego z nich -wystarczy wziąć wszystkie punkty, które występują albo w jednym, bądź drugim podziale, czyli traktując podziały jako zbiory punktów tych podziałów, możemy przyjąć  $\tau = \tau' \cup \tau''$ . Łatwo sprawdzić, że dla sum dolnych i górnych mamy wówczas

$$\underline{S}(f, \tau'_n) \leq \underline{S}(f, \tau_n) \leq \overline{S}(f, \tau_n) \leq \overline{S}(f, \tau''_n). \quad (11)$$

Wynika stąd, że dla dowolnej pary podziałów  $(\tau', \tau'')$ , suma dolna względem  $\tau'$  nie przekracza sumy górnej względem  $\tau''$ . Tak więc, istnieje (w  $\mathbb{R}$ ) kres górny (brany ze względu na ogół wszystkich podziałów) z sum dolnych. Kres ten nazywany jest *całką dolną z danej funkcji*, oznaczaną symbolem  $\int_a^b f(t) dt$ .

Analogicznie definiujemy *całkę górną*,  $\int_a^b f(t) dt$  -jako kres dolny sum górnych. Z nierówności (11) wynika, że  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$ .

### 2.2 Warunki równoważne całkowalności

W przykładzie 5. sumy górne są zawsze równe  $b - a$ , zaś sumy dolne -zero, takie są więc i wartości całek: dolnej i górnej. Gdy funkcja jest całkowalna, to **całki: dolna i górna są sobie równe** i równe całce Riemanna z tej funkcji. Można wykazać, że jest to warunek równoważny całkowalności.

(W tym celu sprawdza się najpierw, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów sumy dolne zbiegają do całki dolnej, a górne -do górnej. Wówczas z równości tych całek wynika całkowalność, dzięki twierdzeniu o 3 ciągach. Otrzymujemy stąd również dość wygodne kryterium dla  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

**Kryterium Riemanna:** Funkcja  $f$  jest całkowalna na przedziale  $[a, b]$  wtedy i tylko wtedy, gdy różnice między sumami: górną i dolną dla odpowiednio dobranego podziału  $\tau$  tego odcinka są dowolnie małe:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \tau \overline{S}(f, \tau) - \underline{S}(f, \tau) < \epsilon.$$

Dość nietypową postać ma tzw. **kryterium porównawcze całkowalności**: Jeżeli funkcje  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają dla dowolnych  $s, t \in [a, b]$  nierówności:

$$|f(s) - f(t)| \leq |g(s) - g(t)|,$$

to z całkowalności funkcji  $g$  wynika całkowalność  $f$ . Wystarczy nawet, by było  $|f(s) - f(t)| \leq |g_1(s) - g_1(t)| + |g_2(s) - g_2(t)|$ , dla pewnych  $g_1, g_2 \in R[a, b]$ .

Okazuje się, że przeszkodą w całkowalności jest nieciągłość funkcji- a dokładniej, rozmiar zbioru  $B$  tych punktów, w których funkcja jest nieciągła. **Kryterium Lebesgue'a całkowalności w sensie Riemanna** mówi, że gdy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ograniczoną, to  $f$  jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\epsilon > 0$  zbiór  $B$  zawiera się w sumie mnogościowej przeliczalnego ciągu przedziałów otwartych  $(\alpha_n, \beta_n)$  takich, że

$$\forall k \in \mathbb{N} \sum_{n=1}^k |\beta_n - \alpha_n| \leq \epsilon.$$

(Ostatni warunek oznacza, że zbiór  $B$  jest miary zero- por. definicja na str. 9).

## 2.3 Własności funkcji całkowalnych.

**Twierdzenie 1.** *Funkcje całkowalne są ograniczone.*

**Twierdzenie 2.** *Całkowalne są: sumy, iloczyny i ilorazy (w przypadku niezerowania się mianownika) dowolnych dwu funkcji całkowalnych.*

W szczególności, zbiór  $R[a, b]$  funkcji całkowalnych na przedziale  $[a, b]$  wraz z działaniami: dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez stałe -jest przestrzenią wektorową. Sprawdzanie całkowalności iloczynu dwu funkcji całkowalnych  $f_1, f_2$  byłoby trudne, gdybyśmy nie mieli do dyspozycji kryterium porównawczego oraz wiedzy o ograniczoności każdej funkcji całkowalnej. Wystarczy zapisać  $|f_1(s)f_2(s) - f_1(t)f_2(t)| = |f_1(s)f_2(s) - f_1(t)f_2(s) + f_1(t)f_2(s) - f_1(t)f_2(t)| \leq |f_1(s) - f_1(t)|M_2 + |f_2(s) - f_2(t)|M_2$ , gdzie  $M_j = \sup_{[a,b]} |f_j|$ .

**Twierdzenie 3.** *Funkcje monotoniczne są całkowalne.*

**Twierdzenie 4.** *Funkcje ciągłe są całkowalne.*

(Zobaczmy, jak dwa ostatnie twierdzenia wynikają z kryterium Riemanna: Np. dla  $f$  niemalejącej wartości: najmniejsza oraz największa na odcinku  $[t_{j-1}, t_j]$ , to odpowiednio,  $f(t_{j-1})$  oraz  $f(t_j)$ , więc różnica między sumami: górną i dolną -dla danego podziału, to liczba  $\bar{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{j=1}^n (f(t_j) - f(t_{j-1}))\Delta_j t \leq \delta(\tau_n) \sum_{j=1}^n (f(t_j) - f(t_{j-1})) = \delta(\tau_n)(f(t_n) - f(t_0)) = \delta(\tau_n)(f(b) - f(a))$  - ta wartość jest dowolnie mała gdy  $\delta(\tau_n)$  jest dostatecznie małe.

W przypadku  $f$  ciągłej, zamiast szacować  $\Delta_j t$  przez  $\delta(\tau_n)$ , zauważamy, że  $\underline{S}_n = \sum_{j=1}^n f(\alpha_j)\Delta_j t$ , gdzie  $\alpha_j$  jest punktem, w którym  $f$  osiąga swoje minimum na przedziale  $[t_{j-1}, t_j]$ , zaś analogicznie,  $\bar{S}_n = \sum_{j=1}^n f(\beta_j)\Delta_j t$ , gdzie  $\beta_j \in [t_{j-1}, t_j]$  są „punktami maksimum” dla  $f$  na tych przedziałach  $[t_{j-1}, t_j]$ . Odległość żadnej z tych par punktów  $\alpha_j, \beta_j$  nie przekracza  $\delta(\tau_n)$ , więc gdy średnica podziału jest dostatecznie mała, to z warunku jednostajnej ciągłości, będziemy mieli  $|f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}$ , stąd

$$|\bar{S}_n - \underline{S}_n| \leq \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|\Delta_j t \leq \frac{\epsilon}{(b-a)} \sum_{j=1}^n \Delta_j t = \epsilon.$$

Z ostatniego twierdzenia wynika, dzięki wcześniejszym uwagom (z paragrafu 1.2, s.3), że dla funkcji ciągłej  $f$  funkcja  $F$  dana wzorem (3) jest jej funkcją pierwotną, czyli

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Dzięki temu, do obliczania wartości całki oznaczonej możemy użyć wzoru (4) Newtona-Leibniza. Na przykład,  $\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$ , gdyż funkcją pierwotną dla  $\sin x$  jest  $-\cos x$ .

Należy podkreślić, że całkę oznaczoną (Riemanna) definiujemy jedynie dla funkcji określonych na całym domkniętym przedziale ograniczonym. Podobnego symbolu:  $\int_a^b f(t) dt$  będziemy też używali dla tzw. całek niewłaściwych (w sytuacji, gdy albo jedna z wartości  $a, b$  jest nieskończona, lub w przypadku, gdy  $f$  nie jest określona w którymś z końców przedziału  $[a, b]$  (taki punkt nazwiemy punktem niewłaściwym całki niewłaściwej  $\int_a^b f(t) dt$ ).

## 3 Zastosowanie całki oznaczonej

### 3.0.1 Miara Jordana

Czy da się dokładnie zmierzyć pole dowolnego zbioru  $E \subset \mathbb{R}^2$  na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  określając miarę zbioru  $E$  (oznaczymy tę miarę symbolem  $|E|$ ) np. w metrach kwadratowych, przyjmując, że kwadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  ma miarę 1? Intuicja podpowiada, że miara taka powinna spełniać następujące postulaty:

- *monotoniczność:*  $E_1 \subset E_2 \Rightarrow |E_1| \leq |E_2|$
- (skończona) *addytywność:* gdy  $A \cap B = \emptyset$ , to  $|A \cup B| = |A| + |B|$
- (warunek *unormowania*):  $|[a, b] \times [c, d]| = (b - a) \cdot (d - c)$



Warunek unormowania mówi, że miara prostokąta jest iloczynem długości jego (2 kolejnych) boków. W  $\mathbb{R}^3$  odpowiedni postulat mówi, że miara prostopadłościanu = „pole podstawy razy wysokość”. Dla uproszczenia, pozostawimy przy mierze powierzchniowej w  $\mathbb{R}^2$ .

Postulat addytywności wygodniej jest formułować w następującej (równoważnej) postaci: gdy część wspólna dwu zbiorów  $A$  i  $B$  jest miary zero, tzn. gdy  $|A \cap B| = 0$ , to  $|A \cup B| = |A| + |B|$ . Taka sytuacja zachodzi np. dla pary prostokątów mających rozłączne wnętrza, lecz wspólny bok, lub wierzchołek. Bez założenia o  $|E \cap F|$  mamy zawsze nierówność  $|E \cup F| \leq |E| + |F|$ .

Na ogół **nie można przedstawić zbioru jako sumy skończenie wielu takich prostokątów** -przykładem jest koło, a nawet trójkąt. Możemy więc podawać przybliżenia miary zbioru  $E$  z niedomiarem -jako sumy pól prostokątów o parami rozłącznych wnętrzach, zawartych w  $E$ . Dzięki postulatowi addytywności oraz monotoniczności, takie sumy będą mniejsze lub równe od  $|E|$ . Kres górny takich „przybliżeń z niedomiarem” definiowany jest jako *miara wewnętrzna* zbioru  $E$ .

Powiemy, że zbiory  $A_1, \dots, A_k$  *pokrywają zbiór  $E$* , lub *stanowią pokrycie zbioru  $E$* , gdy  $E \subset A_1 \cup \dots \cup A_k$ . Sumy pól takich prostokątów są nie mniejsze, niż miara zbioru  $E$ . Kres dolny sum miar prostokątów pokrywających  $E$ , brany po wszystkich pokryciach, jest nazywany *miarą zewnętrzną zbioru  $E$* . Jeśli miary: zewnętrzna i wewnętrzna są jednakowe, to oznaczamy je symbolem  $|E|$  i nazywamy *miarą Jordana zbioru  $E$* . W przeciwnym wypadku zbiór nazywamy *niemierzalnym* (w sensie Jordana).

**Uwaga** Matematycy chętniej używają wprowadzonej nieco później tzw. *miary Lebesgue’a zbioru  $E$*  -wówczas zamiast skończonych- używa się pokryć przeliczalnych, zbiory mierzalne w sensie Jordana będą też mierzalne w sensie Lebesgue’a i wartości tych miar będą wówczas jednakowe, lecz nie na odwrót. Na przykład, zbiór liczby wymiernych z odcinka  $[0,1]$  ma miarę wewnętrzną (zarówno Jordana, jak i Lebesgue’a) równą zero, lecz jego zewnętrzna miara Jordana wynosi 1, jak można wykazać. Jest to więc przykład zbioru niemierzalnego. Jednak jest to zbiór mierzalny w sensie Lebesgue’a, miary Lebesgue’a zero, podobnie, jak każdy zbiór przeliczalny (dający się ustawić w ciąg).

Nie będziemy definiowali miary Lebesgue’a dla dowolnych zbiorów, natomiast warto określić, kiedy taka miara zbioru  $E$  wynosi zero.

**Definicja** Zbiór  $E$  jest zbiorem miary Lebesgue’a zero, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists A_n E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ oraz } \forall k \in \mathbb{N} \sum_{n=1}^k |A_n| < \epsilon.$$

Tu  $A_n$  są pewnymi przedziałami w przypadku  $E \subset \mathbb{R}$ , a w „przypadku dwuwymiarowym” ( $E \subset \mathbb{R}^2$ ) -mają to być prostokąty (a w  $\mathbb{R}^3$  - prostopadłościany).

Przytoczone wcześniej kryterium Lebesgue’a mówi więc, że funkcja ograniczona jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest miary Lebesgue’a zero. Dodajmy, że mierzalność zbioru  $E \subset \mathbb{R}^2$  w sensie Jordana jest równoważna zerowaniu się miary Lebesgue’a brzegu zbioru  $E$ .

### 3.1 Miara trapezu krzywoliniowego

Gdy  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją nieujemną, ograniczoną, to zbiór

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

nazywamy *trapezem krzywoliniowym*. Gdy  $\tau = (t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b)$  jest podziałem odcinka  $[a, b]$  oraz  $m_j = \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f$ ,  $M_j = \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f$ , to  $[t_{j-1}, t_j] \times [0, m_j]$  są prostokątami o rozłącznych wnętrzach, zawartymi w zbiorze  $E$ , zaś prostokąty  $[t_{j-1}, t_j] \times [0, M_j]$  tworzą pokrycie  $E$ . Ich sumy pól są równe odpowiednio: sumom dolnym oraz sumom górnym dla całki Riemanna z  $f$  związanym z podziałem  $\tau$ . Stąd miara wewnętrzna  $E$  jest równa całce dolnej z  $f$ , zaś miara zewnętrzna (Jordana) -całce górnej. Mierzalność  $E$  jest więc równoważna całkowalności  $f$  i wówczas mamy

### Wzór na pole trapezu krzywoliniowego:

$$|E| = \int_a^b f(t) dt.$$

Gdy mamy dwie funkcje  $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  takie, że  $\forall t \in [a, b] \phi(t) \leq \psi(t)$ , to zbiór

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

nazywamy *obszarem normalnym względem osi  $Ox$*  (lub też -trapezem krzywoliniowym) wyznaczonym przez tę parę funkcji i podobnie jak dla  $\phi = 0$  zauważamy, że

$$|G| = \int_a^b (\psi(x) - \phi(x)) dx.$$

## 3.2 Długość łuku krzywej

Zbiór punktów postaci

$$\gamma = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) : t \in [\alpha, \beta]\},$$

gdzie  $x, y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami ciągłymi, nazywamy krzywą w  $\mathbb{R}^2$ . Parę funkcji  $(x, y)$ , czyli funkcję o wartościach wektorowych  $\gamma(t)$ , nazwiemy parametryzacją tej krzywej. (Każda krzywa ma wiele parametryzacji, np. okrąg o promieniu  $R$  i o środku w początku układu współrzędnych, ma parametryzacje:

$$\gamma_1(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

oraz

$$\gamma_2(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1],$$

jak również

$$\gamma_3(t) = (R \sin t, R \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Przy pierwszych dwu parametryzacjach, wraz ze wzrostem  $t$ , punkt porusza się po okręgu w kierunku przeciwnym do biegu wskazówek zegara (ten kierunek przyjmujemy jako naturalny), zaś w trzecim przypadku -w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Można też parametryzować okrąg w sposób "wielokrotny" -np. biorąc  $\gamma_1(t)$   $t \in [-6\pi, 6\pi]$  -6-krotnie. Będziemy na ogół rozważać tzw. *krzywe Jordana* (czyt. „Zordana”), -gdzie jednakowe wartości parametryzacji mogą się pojawić jedynie na końcach przedziału  $[\alpha, \beta]$ .

Wykres funkcji ciągłej  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest krzywą (tu  $x(t) = t, y(t) = f(t)$ )

Podziałowi  $\tau = (t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta)$  odcinka  $[\alpha, \beta]$  odpowiada układ punktów  $\gamma_j = (x(t_j), y(t_j))$  na tej krzywej. Łamaną przechodzącą kolejno przez punkty  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  nazwiemy łamaną wpisaną w krzywą. Wraz ze wzrostem „dokładności podziału  $\tau$  (czyli wraz z maleniem jego średnicy), te łamane wpisane coraz dokładniej przybliżają kształt naszej krzywej (w pewnym momencie nie są rozróżnialne dla naszego oka od krzywej- gdy jest ona zaznaczona graficznie linią o jakiejś dodatniej grubości). Z nierówności trójkąta wynika, że długość łamanej odpowiadającej drobniejszemu od  $\tau$  podziałowi jest większa, od długości łamanej wyznaczonej punktami podziału  $\tau$ .

**Definicja.** *Długością  $\ell(\gamma)$  łamanej  $\gamma$  nazywamy kres górny długości łamanych wpisanych w tę krzywą. Gdy ta długość jest skończona, krzywą nazwiemy prostowalną.*

Na przykład, wykres funkcji  $f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  takiej, że  $f(0) = 0, f(t) = t \sin \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$  jest krzywą, która nie jest prostowalna. Tym niemniej, mamy

**Twierdzenie.** *Każda krzywa klasy  $C^1$ , czyli taka, że jej współrzędne mają pochodne ciągłe ( $x', y' \in C[a, b]$ ) jest prostowalna, przy czym jej długość wynosi*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

*Szkic dowodu:* Dla podziału  $\tau$  punktami  $t_j$  użyliśmy oznaczeń  $\Delta_j t := t_j - t_{j-1}$  (=przyrost argumentu). Niech  $\Delta_j x := x(t_j) - x(t_{j-1})$ ,  $\Delta_j y := y(t_j) - y(t_{j-1})$  - oznaczają odpowiednie przyrosty wartości funkcji  $x, y$ . Z twierdzenia Pitagorasa, długość  $j$ -tego odcinka łamanej wpisanej w krzywą, wyznaczonej przez nasz podział, wynosi  $\sqrt{\Delta_j x^2 + \Delta_j y^2}$ . Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej (dla funkcji na przedziale  $[t_{j-1}, t_j]$ ), istnieje punkt pośredni  $\alpha_j \in (t_{j-1}, t_j)$  taki, że  $x'(\alpha_j) = \frac{\Delta_j x}{\Delta_j t}$ , więc  $\Delta_j x = x'(\alpha_j)\Delta_j t$ . Podobnie,  $\Delta_j y = y'(\beta_j)\Delta_j t$  dla pewnych punktów  $\beta_j \in (t_{j-1}, t_j)$ . Sumy długości odcinków naszej łamanej przyjmują więc postać

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j t \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2}.$$

Gdyby było  $\alpha_j = \beta_j$ , mielibyśmy dokładnie sumy całkowe dla całki z naszego wzoru. Aby więc zakończyć dowód, wystarczy, korzystając z jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na przedziałach domkniętych, wykazać, że różnice między sumami  $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2}$  oraz sumami  $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\alpha_j)^2}$  zmierzają do zera wraz ze zmierzaniem do zera średnicy podziału  $\tau$ . Detale tego fragmentu dowodu pomińmy.

W szczególności, długość linii wykresu dla  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , czyli krzywej  $\{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}$ , to liczba  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ .

### 3.3 Objętość bryły obrotowej

Jeśli wykres funkcji  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  będziemy obracać w  $\mathbb{R}^3$  dookoła osi  $OX$ , otrzymamy zbiór

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}.$$

Przekrojami tej bryły płaszczyznami  $\{(x, y, z) : x = x_0\}$  równoległymi do  $OYZ$  są koła o środku w zerze, promieniu  $f^2(x_0)$ . Przybliżenia z niedomiarem objętości  $|\Omega|$  otrzymamy sumując objętości walców

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [t_{j-1}, t_j], y^2 + z^2 \leq m_j^2\},$$

czyli sumując liczby  $\Delta_j t \pi m_j^2$ , gdzie  $m_j$  są, jak w przypadku obliczeń dla trapezów krzywoliniowych, wartościami najmniejszymi  $f$  na przedziałach  $[t_{j-1}, t_j]$ . Przybliżenia z nadmiarem otrzymamy biorąc walce opisane na  $j$ -tych fragmentach zbioru  $\Omega$ . Ich sumy objętości dają całkę górną z funkcji  $\pi(f(x))^2$ . Stąd wynika, że w przypadku  $f \in R[a, b]$  mamy

$$|\Omega| = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

### 3.4 Pole powierzchni obrotowej

Powierzchnię obrotową

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = (f(x))^2\}$$

przybliżamy odcinkami powierzchni bocznej stożka, otrzymując wzór

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

## 4 Całki niewłaściwe

Całki Riemanna definiujemy jedynie dla funkcji określonych na (całych) przedziałach domkniętych i ograniczonych, powiedzmy  $[a, b]$ . Funkcja całkowalna musi być, jak wiemy, też ograniczona. W pozostałych przypadkach (gdy albo jeden z końców przedziału -np.  $b$  jest nieskończony, albo gdy  $f$  ma w punkcie  $b \in \mathbb{R}$  asymptotę pionową) może się zdarzyć, że  $f$  będzie jednak całkowalna na wszystkich przedziałach typu  $[a, \beta] \forall \beta < b$ . (Tak będzie np. w najczęściej rozważanym przypadku, gdy  $f \in C(a, b)$ .) Przy tego typu założeniu możemy przyjąć następującą definicję:

## 4.1 Definicja całki niewłaściwej

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(t) dt.$$

W tym przypadku mówimy, że  $b$  jest punktem niewłaściwym, lub „całka jest niewłaściwa w punkcie  $b$ ”.

Ten zapis ma charakter formalny - granica może istnieć i być liczbą skończoną (wówczas mówimy, że nasza całka niewłaściwa jest zbieżna), bądź nie. W tym drugim przypadku (lub gdy granica jest nieskończona) - mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna. Analogicznie, gdy  $\forall \alpha > a$  mamy całkowalność:  $f \in R[\alpha, b]$ , definiujemy  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(t) dt$ , wtedy  $a$  (lewy koniec przedziału) jest punktem niewłaściwym. Punkt niewłaściwy może się również pojawić wewnątrz przedziału całkowania, np. niech będzie to punkt  $c \in (a, b)$ . Wtedy wystarczy przyjąć

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

(Składniki po prawej stronie równości są już całkami z punktem niewłaściwym na krańcu odcinka- drogi całkowania.)

**Uwaga 1:** Mamy tu do czynienia z sumą dwu granic. Na przykład,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} \int_\eta^0 h(t) dt + \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \int_0^\kappa h(t) dt.$$

Podobnie,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \int_{-1}^\beta \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx + \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Zamienienie tego typu wyrażeń na granicę z punktami zbieżnymi symetrycznie do granic całkowania da zupełnie inne pojęcie - tzw. *wartości głównej* (ang. *principal value*) całki niewłaściwej, oznaczanej przez umieszczenie skrótu P.V. przed znakiem całki. Tak więc - na przykład,

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M g(t) dt,$$

co może dawać wartość skończoną (0 w przypadku  $g$  nieparzystej) nawet dla funkcji, dla których całka  $\int_0^{+\infty}$  nie istnieje. Podobnie,

$$P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{t} dt + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{t} dt \right) = 0,$$

choć całka niewłaściwa z tej funkcji jest rozbieżna. Tym niemniej, takie całki odgrywają ważną rolę zarówno w zastosowaniach w fizyce, jak i w teorii funkcji zmiennej zespolonej, która dostarcza bardzo efektywnych metod liczenia całek. Gdy istnieje „zwykła całka niewłaściwa”, to całka w sensie wartości głównej też istnieje i te całki są takie same.

**Ćwiczenie:** W naszej definicji całki niewłaściwej nie wykluczaliśmy sytuacji, gdy funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna na całym przedziale. Proszę sprawdzić, że w takim wypadku całki: zwykła i niewłaściwa są równe.

## 4.2 Warunek Cauchy’ego zbieżności

Sprawdzanie na podstawie definicji, czy ciąg liczbowy  $(x_n)$  jest zbieżny do pewnej granicy skończonej, lub czy istnieje granica funkcji - wymaga badania odległości między wyrazami ciągu (lub wartościami funkcji w pewnych punktach) a tą liczbą, która ma być granicą, czyli musimy znać wartość tej granicy. Jeśli interesuje nas tylko zbieżność, a wartości granicy nie znamy, musimy użyć

innej metody. W przypadku ciągów (funkcji) monotonicznych -wystarczy ograniczoność, aby ciąg był zbieżny (lub by funkcja miała granice 1-stronne). Ale w większości przypadków takiej monotoniczności nie możemy zakładać. Wówczas bardzo użyteczny jest tzw. *warunek Cauchy'ego*. Jak wiemy, dla ciągów taki warunek jest równoważny istnieniu granicy skończonej, czyli zbieżności. Przypomnijmy ten warunek (z I semestru):

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n, k \in \mathbb{N} \quad (n \geq M, k \geq M) \rightarrow |x_n - x_k| < \epsilon.$$

Dla istnienia skończonej granicy funkcji, np. granicy lewostronnej,  $\lim_{\beta \rightarrow b^-} F(\beta)$  funkcji  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, by

$$\forall \epsilon > 0 \exists \gamma < b \forall \alpha, \beta \in D \quad (\gamma < \alpha < b, \gamma < \beta < b) \Rightarrow |F(\alpha) - F(\beta)| < \epsilon. \quad (12)$$

Dodatkowe założenie:  $\alpha < \beta$  nie zmniejsza ogólności, a jest wygodne.

Warunek (12) implikuje zachodzenie jego ciągowego odpowiednika dla wszystkich ciągów  $\alpha_n$  zbieżnych do  $b$  o wartościach mniejszych od  $b$  (należących do dziedziny:  $D$ ). Z twierdzenia Cauchy'ego dla ciągów otrzymamy istnienie granicy skończonej dla każdego z ciągów o wyrazach  $F(\alpha_n)$ . Łatwo wykazać, że jest to jednakowa wartość (powiedzmy,  $g$ ) dla wszystkich takich ciągów ( $\alpha_n$ ), więc warunek Heinego implikuje relację  $g = \lim_{\beta \rightarrow b^-} F(\beta)$ .

Dla ciągów z warunku Cauchy'ego -wnioskujemy ograniczoność. Faktycznie, dobierając  $M$  dla  $\epsilon_0 = 1$  mamy -poza zbiorem  $\{x_1, \dots, x_M\}$  skończonym, więc ograniczonym -ograniczenie  $|x_j - x_M| < 1$ , więc  $|x_j| < |x_M| + 1$  dla  $j \geq M$ . Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, pewien podciąg  $(x_{n_k})$  ciągu  $(x_n)$  jest więc zbieżny do jakiejś granicy  $g \in \mathbb{R}$ . Teraz dla dowolnie ustalonego  $\epsilon > 0$  dobieram  $M$  jak w warunku Cauchy'ego. Dzięki zbieżności naszego podciągu znajdziemy  $n_k > M$  takie, by  $|x_{n_k} - g| < \epsilon$ . Ale dla  $j > M$  jest  $|x_j - x_{n_k}| < \epsilon$ , więc zastosowanie nierówności trójkąta dla  $|x_j - g| = |x_j - x_{n_k} + x_{n_k} - g|$  pozwoli oszacować  $|x_j - g|$  przez  $2\epsilon$  dla  $j > M$ , dowodząc zbieżności.

Na odwrót, gdy  $g = \lim_{\beta \rightarrow b^-} F(\beta)$ , to zachodzi warunek Cauchy'ego. Istotnie, z definicji granicy,  $\forall \epsilon > 0 \exists \gamma < b \forall \alpha \in D \quad \gamma < \alpha < b \Rightarrow |F(\alpha) - g| < \epsilon$ . Analogicznie jest dla  $\beta \in (\gamma, b) \cap D$ , więc nierówność trójkąta dla takich  $\alpha, \beta$  daje  $|F(\alpha) - F(\beta)| \leq |F(\alpha) - g| + |g - F(\beta)| < 2\epsilon$ .

Stosując warunek Cauchy'ego dla  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  oraz fakt, że dla  $\alpha < \beta$  jest  $|F(\beta) - F(\alpha)| = |\int_\alpha^\beta f(t) dt|$ , otrzymujemy następujący:

**Wniosek (Kryterium Cauchy'ego zbieżności całki niewłaściwej):** Całka niewłaściwa (w punkcie  $b$ ) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists \gamma < b \forall \alpha, \beta \in D \quad (\gamma < \alpha < \beta < b) \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta f(t) dt \right| < \epsilon. \quad (13)$$

### 4.3 Kryterium porównawcze

Kryterium to sformułujemy w przypadku, gdy górna granica całkowania jest punktem niewłaściwym. Zakładamy, jak zwykle, że  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , przy czym  $\forall \beta \in (a, b) f \in R[a, \beta]$ . Analogiczne założenia dotyczą drugiej funkcji:  $g$

**Twierdzenie. (KRYTERIUM PORÓWNAWCZE)** *Gdy funkcja  $g$  majoryzuje  $f$  w tym sensie, że  $\forall t \in [a, b) |f(t)| \leq g(t)$ , a ponadto całka niewłaściwa  $\int_a^b g(t) dt$  jest zbieżna, to zbieżna będzie również całka  $\int_a^b f(t) dt$ .*

Dla uzasadnienia tego kryterium wystarczy sprawdzić warunek Cauchy'ego (13) dla  $f$ . Wykorzystamy tu fakt, iż taki warunek spełnia funkcja  $g$ . Z „całkowej nierówności trójkąta”, (a następnie z zakładanej majoryzacji:  $|f| \leq g$ , mamy dla  $\alpha < \beta < b$  oszacowania:

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t) dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(t)| dt \leq \int_\alpha^\beta |g(t)| dt.$$

Ostatnia całka będzie dowolnie mała ( $< \epsilon$ ) dla  $\alpha$  dostatecznie bliskich  $b$ , czyli dla  $\gamma < \alpha < b$  przy odpowiednio dobranym  $\gamma$ .

Na przykład,  $\int_1^\infty \frac{\sin(3x^3+2x+1)}{x^2+\ln(x+2)} dx$  jest zbieżna, bo moduł funkcji podcałkowej jest nie większy od funkcji  $\frac{1}{x^2}$ , której całka  $\int_1^\infty$  jest zbieżna (równa

$\lim_{M \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{M} - (-\frac{1}{1})) = 1$ . Badanie zbieżności pierwszej całki w sposób bezpośredni jest wręcz niewykonalne (nie znajdziemy funkcji pierwotnej). Idea oszacowań ułamków polega na oszacowaniu od góry modułu licznika (tu przez 1) i oszacowaniu od dołu mianownika, ale tak, by otrzymać w wyniku całkę zbieżną.

Dla pewnych funkcji całka niewłaściwa może być zbieżna, chociaż kryterium porównawcze nie może być stosowane, gdyż całka z modułu funkcji podcałkowej już jest rozbieżna, a tym bardziej, całka z dowolnej majoranty.

Całka z modułu jest rozbieżna gdy np.  $|f(t)| = \frac{1}{t}, t \in [1, +\infty)$ . Jeśli  $f(t) = \frac{1}{t}$  dla  $t \in [2k-1, 2k), k \in \mathbb{N}$  oraz  $f(t) = -\frac{1}{t}$  dla  $t \in [2k, 2k+1)$ , można wykazać zbieżność całki  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ , podczas gdy  $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt = +\infty$ . Podobnie jest w przypadku  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

W obu przypadkach należy skorzystać z tzw. *kryterium Dirichleta*: (nie jest ono dla Państwa obowiązkowe. Sformułujemy je dla  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .)

**Twierdzenie** Jeśli funkcja  $\phi$  ma całki ograniczone:  $\sup\{|\int_a^M \phi(t) dt|, M < \infty\} < +\infty$ , zaś  $\psi$  jest funkcją monotoniczną, zmierzającą do zera:  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$ , to całka niewłaściwa  $\int_a^{+\infty} \phi(t)\psi(t) dt$  jest zbieżna.

## 5 Rachunek różniczkowy wielu zmiennych -wstęp

Dla funkcji dwu (i analogicznie, w przypadku większej ilości) zmiennych podstawową metodą analizy jest **ustalenie jednej ze zmiennych**. Na przykład, badając zachowanie się funkcji  $f$  [zmiennych  $(x, y)$  w punkcie o współrzędnych  $(7, 3)$ ], możemy rozważać dwie funkcje jednej zmiennej:  $f(x, 3)$  -jako funkcję zmiennej  $x$  oraz  $f(7, y)$ - funkcję zmiennej  $y$ . Matematycy często używają zapisu bezargumentowego (np. wolimy mówić o funkcjach:  $\sin, \arccos, \ln, \exp$ , niż o "funkcjach  $\sin(\phi), \arccos(x), \ln(t), \exp(z)$ " -bo ten ostatni zapis przedstawia w zasadzie wartości danych funkcji w konkretnych punktach:  $\phi, x, t, z$ . Dla funkcji 2 zmiennych używa się zapisu, w którym „aktywną zmienną” zastępujemy przez kropkę. Dlatego w wielu tekstach można spotkać oznaczenie  $f(x_0, \cdot)$ , które przedstawia funkcję od drugiej zmiennej (z pierwszą zmienną ustaloną na wartości  $x = x_0$ ).

Jeśli, na przykład, ustalimy drugą zmienną (np.  $y = 3$ ) w funkcji  $f(x, y) = x^y$ , to otrzymamy funkcję potęgową:  $f(x, 3) = x^3$ . Ustalenie pierwszej zmiennej da funkcję wykładniczą -np. dla  $x = 7$  otrzymamy  $f(7, y) = 7^y$ , co można też wyrazić jako  $\ln 7 \exp(y)$ . Można więc w tym przypadku zapisać bezargumentowo:  $f(7, \cdot) = \ln 7 \exp(\cdot)$ , lub nawet  $f(7, \cdot) = \ln 7 \exp$ .

Gdy  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją liniową, to dla pewnych stałych  $A, B$  mamy  $f(x, y) = Ax + By$ . (Po prostu,  $A = f(1, 0), B = f(0, 1)$ .) Wówczas ustalając  $x = x_0$  otrzymamy funkcję  $f(x_0, y) = Ax_0 + By$ , która będzie tzw. funkcją afiniczną (jej wykresem jest linia prosta), ale nie będzie to funkcja liniowa zmiennej  $y$ , jeżeli  $Ax_0 \neq 0$ . Odwzorowanie  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  nazwiemy *odwzorowaniem dwuliniowym*, gdy  $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  odwzorowania 1 zmiennej powstałe przez ustalenie pozostałych zmiennych, czyli odwzorowania:  $F(x_0, y)$  (zmiennej  $y$ ) oraz  $F(x, y_0)$  (zmiennej  $x$ ) są liniowe.

Takie odwzorowanie ma postać  $F(x, y) = xy\mathbf{w}$  dla pewnego wektora  $\mathbf{w}$  z przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ .

W przypadku funkcji  $n$  zmiennych -będziemy ustalać  $n - 1$  zmiennych i otrzymamy w ten sposób  $n$  funkcji zależnych od 1 zmiennej. Gdy wszystkie te funkcje są ciągle w danym punkcie (dokładniej, w odpowiednich współrzędnych tego punktu, będziemy mówili, że  $f$  jest *ciągła ze względu na każdą ze zmiennych z osobna*). Możemy obliczać pochodne z takich funkcji, otrzymując tzw. „pochodne cząstkowe”  $f$ .

### 5.1 Pochodne cząstkowe

Jeśli funkcja  $f(x_0, \cdot)$  jest różniczkowalna (czyli ma pochodną) względem drugiej zmiennej (oznaczonej tu przez kropkę), to wartość takiej pochodnej w punkcie

$y_0$  nazwiemy pochodną cząstkową z funkcji  $f$  ze względu na drugą zmienną w punkcie  $(x_0, y_0)$  i oznaczmy ją symbolem  $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0)$  albo  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Czasami wygodniejszy bywa zapis

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x, y)|_{(x_0,y_0)}.$$

Bardziej skrótowa wersja, to oznaczenie  $f'_x(x_0, y_0)$ , lub nawet  $f_x(x_0, y_0)$  na symbol  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ . Tak więc naszą definicję możemy zapisać następująco:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \quad (14)$$

Analogicznie, pochodna cząstkowa względem  $x$  w danym punkcie, to

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Dotychczas pisaliśmy  $x_0, y_0$  -by oznaczyć w sposób szczególny te ustalone wartości, ale równie dobrze możemy nie używać dolnego indeksu -tak będzie w następujących przykładach, czy zadaniach. Na przykład, dla

$$f(x, y) = x^4 + x^3y + xy^2 + 6y + 132$$

mamy  $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = 4x^3 + 3x^2y + y^2$ , zaś  $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) = x^3 + 2xy + 6$ . Z kolei,  $\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x$ . Podobnie,  $\frac{\partial}{\partial y}(Ax + By + Cxy) = B + Cx$ .

**Przyrostem funkcji** (lub przyrostem wartości funkcji)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  między punktami  $P, Q \in D$  nazwiemy różnicę wartości  $f$  w tych punktach, czyli liczbę

$$\Delta f := f(P) - f(Q).$$

Gdy punkty  $P, Q$  różnią się tylko jedną ze współrzędnych (np.  $x$ ), to mówimy o przyroście  $f$  ze względu na tę zmienną, lub o przyroście częściowym. Możemy przyrost  $f$  ze względu na zmienną  $x$  oznaczyć  $\Delta_x f$ . Zapis ten nie jest precyzyjny, (nie zawiera informacji o punktach  $P, Q$ ), ale dość sugestywny. Na przykład,  $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$  (dla uproszczenia rozpatrujemy funkcje dwu zmiennych:  $(x, y)$ ) w tym przypadku  $P = Q + (\Delta x, 0)$  -suma wektorów w  $\mathbb{R}^2$ ). W przeciwnym (a raczej - w ogólnym) przypadku mówimy o przyroście całkowitym. Podobnie, jak dla jednej zmiennej, słowo „przyrost” ma znaczenie formalne- może być  $\Delta x < 0$ .

Prostym, lecz bardzo ważnym narzędziem jest możliwość wyrażenia przyrostu całkowitego jako sumy przyrostów względem poszczególnych (tu 2) zmiennych:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = (f(x_1, y_1) + f(x_0, y_1)) - (f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)),$$

co nieformalnie możemy zapisać w postaci

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f.$$

(Dla funkcji  $n$  zmiennych  $\Delta f$  jest sumą  $\sum_{j=1}^n \Delta_{x_j} f$ .)

Stosując do funkcji  $f(x_0, \cdot)$  zależnej od 1 zmiennej  $y$  twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, otrzymujemy następujący

**Lemat o przyrostach** *Gdy dla ustalonej wartości  $x_0$  funkcja  $f$  ma pochodne cząstkowe  $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y)$  dla wszystkich  $y \in [y_0, y_1]$ , to istnieje  $y_\beta \in (y_0, y_1)$  taki punkt pośredni między  $y_0$  oraz  $y_1$ , że*

$$f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0) = (y_1 - y_0) \frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_\beta),$$

czyli

$$\Delta_y f = (\Delta y) \frac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_\beta).$$

Podobnie, przyrost całkowity wyrazi się wzorem (15), który podajemy poniżej

Punkt pośredni wygodnie będzie zapisywać w postaci

$$y_\beta = y_0 + \beta(y_1 - y_0) = y_0 + \beta\Delta y, \quad \text{gdzie } \beta \text{ jest pewnym punktem z odcinka } (0, 1).$$

Na przykład,  $y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_1 + y_0)$  jest punktem na środku odcinka łączącego  $y_0, y_1$ . Zaletą tego zapisu jest możliwość jego stosowania niezależnie od tego, czy  $y_0 < y_1$ , czy też  $y_1 < y_0$ .

Jeśli założymy istnienie obydwu pochodnych cząstkowych (tu oznaczanych jako  $f'_x, f'_y$ ) w większym zbiorze, to otrzymamy następujące uogólnienie tego lematu wynikające z rozpisania „przyrostu całkowitego” funkcji  $f$  w postaci sumy przyrostów względem poszczególnych zmiennych i z zastosowania naszego lematu do każdego ze składników. Przyrost całkowity,  $\Delta f := f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$  jest dany wzorem

$$\Delta f = (x_1 - x_0)f'_x(x_0 + \alpha(x_1 - x_0), y_1) + (y_1 - y_0)f'_y(x_0, y_0 + \beta(y_1 - y_0)) \quad (15)$$

dla pewnych  $\alpha, \beta \in (0, 1)$ . Ze wzoru tego wkrótce skorzystamy.

## 5.2 Przykład negatywny

Niestety, metoda ustalania zmiennych nie jest do końca skuteczna -przynajmniej będziemy musieli zbadać, w jakich sytuacjach możemy ją stosować. Gdyby bowiem przyjąć, że różniczkowalność oznacza jedynie istnienie pochodnych cząstkowych w każdym punkcie, to okaże się, że złożenie takich funkcji nie musi być różniczkowalne, a nawet ciągłe! Oto przykład:

Niech  $h(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  gdy  $x \neq 0$  lub  $y \neq 0$ . Jeśli określimy  $h(0, 0) = 0$ , to otrzymamy funkcję na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ , która jest ciągła względem każdej ze zmiennych z osobna oraz ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie. W punkcie  $(0, 0)$  pochodnych cząstkowych nie liczymy ze wzoru na pochodną ilorazu (tak możemy postąpić w innych punktach), lecz z definicji. Ponieważ  $h(0, y) = 0 = h(x, 0) \forall x, y$ , bez problemu zauważamy, że  $h'_x(0, 0) = h'_y(0, 0) = 0$ .

Jeśli teraz  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami różniczkowalnymi 1 zmiennej  $t$ , to możemy utworzyć funkcję złożoną:  $g(t) = h(x(t), y(t))$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Można się spodziewać, że złożenie funkcji różniczkowalnych będzie, jak w przypadku jednej zmiennej, funkcją różniczkowalną. Ale dla „bardzo porządných funkcji”  $x(t) = t = y(t)$  nasze złożenie nie będzie nawet funkcją ciągłą!  $g(t) = h(t, t) = \frac{1}{2}$  dla  $t \neq 0$ . natomiast dla  $t = 0$  będzie  $g(0) = 0$ .

Gdyby natomiast w liczniku ułamka zamiast  $xy$  umieścić  $x^3$ , otrzymamy funkcję ciągłą (def. poniżej), mającą w każdym punkcie wszystkie pochodne cząstkowe. Tym razem definiujemy  $\phi(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$  poza punktem  $(0, 0)$  i z nierówności  $|\phi(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  wynika, że granica w zerze  $\phi$  istnieje i jest równa zero. Teraz  $\phi'_x(0, 0) = 1, \phi'_y(0, 0) = 0$ , dla  $x(t) = t = y(t)$  pochodna złożenia:  $\phi(t, t) = \frac{1}{2}t$  względem  $t$ , równa  $\frac{1}{2}$ , nie daje się wyrazić wzorem (16), który będzie obowiązywał w „przypadku regularnym”. To oznacza, że musimy wprowadzić inną definicję różniczkowalności dla funkcji wielu zmiennych. W tym celu będzie niezbędne pojęcie granicy funkcji w punkcie, a także pojęcie ciągłości. Okaże się, że założenie ciągłości pochodnych cząstkowych funkcji  $f$  pozwoli na otrzymanie wspomnianego przed chwilą wzoru:

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t). \quad (16)$$

## 5.3 Długość wektora, odległość punktów

Przestrzenie  $\mathbb{R}^2$  oraz  $\mathbb{R}^3$  są przykładami przestrzeni wektorowych. Elementy przestrzeni wektorowej, nazywane wektorami, można dodawać, mnożyć przez skalary (liczby rzeczywiste, lub zespolone -w przypadku przestrzeni wektorowych nad ciałem  $\mathbb{C}$  liczb zespolonych). Te dwa działania mają spełniać odpowiednio aksjomaty algebraiczne (np. rozdzielność dodawania wektorów wzgl.



mnożenia, łączność mnożenia skalara przez wektor:  $(ab)\mathbf{w} = a(b\mathbf{w})$ ). (Dla odróżnienia skalarów od wektorów będziemy często te ostatnie oznaczać tłustym drukiem. Są też inne sposoby, np. mniej wygodne- umieszczanie strzałki nad wektorem:  $\vec{w}$ ).

Sumą wektorów  $\mathbf{w} = (x, y, z)$  oraz  $\mathbf{w}' = (x', y', z')$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  jest  $\mathbf{w} + \mathbf{w}' = (x + x', y + y', z + z')$ . Dla skalara  $a \in \mathbb{R}$  mamy  $a\mathbf{w} = (ax, ay, az)$ . Iloczyn skalarny  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}' = xx' + yy' + zz'$ .

**UWAGA!** Czasami iloczyn skalarny oznaczany jest symbolem  $\mathbf{w} \circ \mathbf{w}'$ , lecz prowadzi to do mylenia z operacją złożenia dwu funkcji! W pewnych sytuacjach użycie symbolu  $\cdot$  jest niewskazane, wtedy proponuję iloczyn skalarny oznaczać albo symbolem  $\mathbf{w} \bullet \mathbf{w}'$ , albo  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle$ . Ten ostatni zapis jest szczególnie korzystny w przestrzeniach wektorowych, których elementami są funkcje. Wówczas symbol  $\cdot$  sugeruje raczej iloczyn dwu funkcji. Tymczasem iloczyn skalarny np. dla funkcji  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in C[a, b]$  o wartościach rzeczywistych definiujemy najczęściej wzorem  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \int_a^b \mathbf{u}(t)\mathbf{w}(t) dt$ .

**Definicja normy.** Jeżeli dla każdego wektora  $\mathbf{w}$  przestrzeni wektorowej  $X$  jest określona liczba  $\|\mathbf{w}\|$ , zwana *normą (lub długością) wektora  $\mathbf{w}$*  taka, że

- $\mathbf{w} \neq 0 \Rightarrow \|\mathbf{w}\| > 0$  (*warunek dodatniości*),
- $\|\alpha\mathbf{w}\| = |\alpha|\|\mathbf{w}\|$  (*warunek jednorodności normy*),
- $\|\mathbf{w} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{v}\|$  (*nierówność trójkąta dla normy*),

to mówimy, że para  $(X, \|\cdot\|)$  jest *przestrzenią unormowaną*. Punkty w  $\mathbb{R}^2$  lub  $\mathbb{R}^3$  traktować możemy jako wektory zaczepione w początku układu. Podobnie, elementy przestrzeni wektorowej możemy nazywać zarówno punktami, jak i wektorami.

**Definicja odległości punktów.** Dla punktów  $\mathbf{w}, \mathbf{v}$  danej przestrzeni unormowanej  $(X, \|\cdot\|)$  ich odległością nazywamy liczbę  $d(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$ , czyli długość łączącego je wektora. Odległością euklidesową w  $\mathbb{R}^3$  nazwiemy odległość zdefiniowaną przez tzw. normę euklidesową:

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Analogicznie definiujemy normę i odległość euklidesowe w  $\mathbb{R}^2$  (pomijając trzecią współrzędną). W dowolnej przestrzeni wektorowej  $X$ , w której określony jest iloczyn skalarny,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ , możemy określić normę euklidesową jako

$$\|\mathbf{w}\| := \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}.$$

Przypomnijmy, że iloczyn skalarny ma być symetryczny, liniowy względem każdej zmiennej z osobna oraz dodatnio określony:  $\forall \mathbf{w} \in X \setminus \{0\} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} > 0$ .

Pierwszy z warunków z definicji normy wynika właśnie z tej dodatniej określoności. Ponadto  $(a\mathbf{w}) \cdot (a\mathbf{w}) = |a|^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ , skąd po spierwiastkowaniu stronami otrzymamy warunek jednorodności normy. Jedyny nieoczywisty jest w sprawdzaniu warunek nierówności trójkąta. Tu trzeba skorzystać z dwuliniowości iloczynu skalarnego. Wystarczy sprawdzić nierówność trójkąta podniesioną stronami do kwadratu, gdyż norma jest nieujemna. Czyli mamy wykazać, że

$$\|\mathbf{w} + \mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|^2.$$

Lewa strona tej nierówności, dzięki dwuliniowości oraz symetrii, jest równa  $(\mathbf{w} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|^2$ . Porównując stronami widzimy, że wystarczy wiedzieć, że zachodzi następująca nierówność (dla dowolnej pary wektorów):

**Nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza:**  $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}| \leq \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{u}\|$ .

Jej dowód można uzyskać z dwuliniowości i nieujemności: funkcja  $\phi(t)$  zmiennej  $t$  określona wzorem  $\phi(t) := (\mathbf{w} + t\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{w} + t\mathbf{u}) = \|\mathbf{w}\|^2 + 2t\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + t^2\|\mathbf{u}\|^2$ , jako stale nieujemny trójmian kwadratowy (względem  $t$ ) ma wyróżnik niedodatni: ten wyróżnik, to  $4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 - 4\|\mathbf{w}\|^2\|\mathbf{u}\|^2$ . Pierwiastkując stronami otrzymaną nierówność:  $4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})^2 \leq 4\|\mathbf{w}\|^2\|\mathbf{u}\|^2$ , dzieląc stronami przez 2, otrzymamy tezę.

Czasami wygodnie jest używać innych norm, np.  $\|(x, y, z)\|_1 := |x| + |y| + |z|$  –normy, która definiuje tzw. *odległość taksówkową*,  $d_1$ . W przypadku 2 zmiennych nazwę można uzasadnić mierząc odległość między dwoma punktami na ulicach miasta, które są wzajemnie równoległe bądź prostopadłe. Odległość, to minimalna droga, jaką musimy przebyć z jednego punktu do drugiego jadąc taksówką, która nie może przecież jechać na przelaj (po przekątnej prostokąta), tylko musi poruszać się wzdłuż sieci ulic.

Jeszcze inną normę otrzymamy, biorąc  $\|(x, y, z)\|_\infty$ , oznaczane też jako  $\|(x, y, z)\|_{\max}$ , równe największej spośród wartości modułów współrzędnych,  $\|(x, y, z)\|_\infty := \max\{|x|, |y|, |z|\}$ . Wówczas

$$d_{\max}((x, y, z), (x', y', z')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|, |z - z'|\}.$$

W przypadku jednowymiarowym ( $X = \mathbb{R}$ ), wszystkie te normy są równe modułowi liczby. W niektórych podręcznikach normę euklidesową w  $\mathbb{R}^d$  oznacza się też pojedynczymi kreskami (jak moduł), pisząc  $|\mathbf{w}|$  zamiast  $\|\mathbf{w}\|$ .

W przestrzeni unormowanej definiujemy *kulę* (otwartą) o środku w punkcie  $\mathbf{u}_0$  i o promieniu  $R > 0$  jako zbiór

$$B(\mathbf{u}_0, R) := \{\mathbf{w} \in X : \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_0\| < R\}.$$

Używamy też oznaczeń  $\bar{B}(\mathbf{u}_0, R) := \{\mathbf{w} \in X : \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_0\| \leq R\}$  -dla kuli domkniętej oraz  $\partial B(\mathbf{u}_0, R) := \{\mathbf{w} \in X : \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_0\| = R\}$  -dla sfery o promieniu  $R$  i środku w  $\mathbf{u}_0$ .

**Definicja** Mówimy, że *zbiór*  $A \subset X$  jest *otoczeniem punktu*  $\mathbf{u}_0$ , gdy zawiera on pewną kulę o środku  $\mathbf{u}_0$ , czyli gdy istnieje  $R > 0$  takie, że zachodzi implikacja:  $(\mathbf{w} \in X, \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_0\| < R) \Rightarrow \mathbf{w} \in A$ . Zbiór, który jest otoczeniem każdego ze swoich punktów nazywamy *zbiorem otwartym*.

(Na wykładzie pokazałem, jak używając nierówności trójkąta sprawdzić, że dowolna kula  $B(\mathbf{u}_0, R)$  jest zbiorem otwartym.)

Mówimy, że punkt  $\mathbf{v}_0$  jest punktem brzegowym dla zbioru  $E \subset X$ , co zapisujemy jako warunek  $\mathbf{v}_0 \in \partial E$ , gdy ani zbiór  $E$ , ani jego dopełnienie (czyli zbiór  $X \setminus E$ ) nie są otoczeniami tego punktu. Jest to równoważne następującemu warunkowi:  $\forall r > 0 \exists \mathbf{w} \in E \exists \mathbf{v} \notin E \|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\| < r, \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < r$ .

Brzegiem zbioru  $E$  nazywamy zbiór  $\partial E$  wszystkich jego punktów brzegowych.

Na wykładzie sprawdzamy, że wcześniejsze oznaczenie  $\partial B(\mathbf{u}_0, R)$  dla sfery jest zgodne z obecnym określeniem- czyli brzegiem kuli jest sfera (o takich samych: środku i promieniu), a każdy punkt z kuli otwartej jest jej punktem wewnętrznym.

Punkt  $\mathbf{v}_0$  nazwiemy punktem skupienia zbioru  $E$ , gdy każda kula o środku w tym punkcie zawiera jakieś punkty z zbioru  $E$  różne od  $\mathbf{v}_0$ . (Wówczas musi ona zawierać nieskończenie wiele takich punktów.)

Na koniec, możemy zdefiniować, co znaczy, że ciąg wektorów  $\mathbf{w}_n$  w przestrzeni unormowanej jest zbieżny do pewnego wektora  $\mathbf{w}_0$ :

$$\lim \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_0 \quad (\text{lub} \quad \mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}_0) \quad \Leftrightarrow \quad \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0\| \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad n \rightarrow \infty.$$

W przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^3$  dla  $\mathbf{w}_n = (x_n, y_n, z_n)$  taka zbieżność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie zbieżności zachodzą dla każdej ze współrzędnych:  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, z_n \rightarrow z_0$ .

## 5.4 Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Gdy  $\mathbf{v}_0$  jest punktem skupienia dziedziny  $D$  funkcji  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , to granicą tej funkcji w punkcie  $\mathbf{v}_0$  nazwiemy taką liczbę  $\gamma$ , że

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad (0 < \|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\| < \delta, \mathbf{w} \in D) \Rightarrow |f(\mathbf{w}) - \gamma| < \epsilon.$$

Wówczas piszemy

$$\gamma = \lim_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}_0} f(\mathbf{w}).$$

Analogiczna jest definicja granicy odwzorowania  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ , należy jedynie zastąpić  $|f(w) - \gamma|$  przez  $\|F(\mathbf{w}) - \gamma\|$ . Odwzorowanie  $F$  o wartościach w  $\mathbb{R}^k$  traktujemy jako zestawienie  $k$  funkcji  $f_1, \dots, f_k$  o wartościach skalarnych, czyli  $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$ . Przypadek  $k > 1$  nie jest wcale trudniejszy od przypadku  $k = 1$ , bo granice z odwzorowania  $F$  możemy liczyć dla każdej z „funkcji współrzędnych”  $f_j$ . Mamy bowiem (dość prosty w dowodzie) lemat:

**Lemat** (O ZBIEŻNOŚCI PO WSPÓLRZĘDNYCH) Gdy  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{R}^k$ , to

$$\mathbf{g} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \forall_{j \leq k} g_j = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}).$$

Mówimy, że funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{v}_0 \in D$ , gdy albo  $\mathbf{v}_0$  nie jest punktem skupienia jej dziedziny, albo

$$\lim_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}_0} f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}_0).$$

Analogicznie można określić ciągłość odwzorowania  $F$  o wartościach wektorowych. Warunek ciągłości (np. dla  $F$ ) można w sposób równoważny zapisać tak:

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists \delta > 0 (\|\mathbf{w} - \mathbf{v}_0\| < \delta, \mathbf{w} \in D) \Rightarrow \|F(\mathbf{w}) - F(\mathbf{v}_0)\| < \epsilon.$$

Definicję granicy oraz ciągłości można w sposób równoważny wyrazić używając ciągów (warunki Heinego):

$$\gamma = \lim_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}_0} f(\mathbf{w}) \Leftrightarrow [(\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_n \in D \setminus \{\mathbf{v}_0\}) \Rightarrow f(\mathbf{w}_n) \rightarrow \gamma].$$

Funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $\mathbf{v}_0 \in D$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów z jej dziedziny, zbieżnego do punktu  $\mathbf{v}_0$ , wartości funkcji w punktach tego ciągu zbieżają do  $f(\mathbf{v}_0)$ .

Dowody są identyczne, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej. Wynika stąd też, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Ponieważ funkcja przypisująca liczbie  $y \in \mathbb{R}$  punkt  $(x_0, y) \in \mathbb{R}^2$  jest ciągła, z ciągłości  $f$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  wynika ciągłość względem drugiej zmiennej w tym punkcie, czyli ciągłość funkcji  $f(x_0, \cdot)$  w punkcie  $y = y_0$ .

Funkcje ciągłe są więc ciągłe względem każdej ze zmiennych z osobna. Ale nie na odwrót! Przykładem jest funkcja  $h$  z podpunktu 5.2. Jest ona ciągła ze względu na każdą ze zmiennych z osobna. Natomiast jej granica w punkcie  $(0, 0)$  nawet nie istnieje. Można to sprawdzić, biorąc np. ciąg  $(x_n, y_n) = ((-1)^n \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ . Wartości  $h$  na tym (zbieżnym do zera) ciągu są równe  $(-1)^{n \frac{1}{2}}$ , tworzą więc ciąg rozbieżny.

Liczenie granic metodą ustalania zmiennych, jak widzimy, nie prowadzi do celu. Wprowadza się pojęcie *granic iterowanych w punkcie*  $(x_0, y_0)$ : Przypuśćmy, że dla  $x$  z pewnego otoczenia  $x_0$ , ale  $x \neq x_0$  istnieje  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \alpha(x)$ . Podobnie, dla  $y \neq y_0$ ,  $y$  dostatecznie bliskich  $y_0$  założymy, że istnieje  $\beta(y) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ . Wówczas mamy dwie funkcje  $\alpha, \beta$ , które możemy nazwać granicami częściowymi. Jeśli istnieją granice:  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$  oraz  $B = \lim_{y \rightarrow y_0} \beta(y)$ , to nazywamy je *granicami iterowanymi funkcji*  $f$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  (od włoskiego słowa „iterare”-powtarzać).

Niestety, z istnienia i równości granic iterowanych nie wynika istnienie granicy podwójnej. Dla funkcji  $h$  z podpunktu 5.2 mamy  $A = B = 0$ , lecz jak wiemy, granica nie istnieje. Na odwrót, z istnienia granicy (podwójnej) nie wynika istnienie granic iterowanych, a nawet granic częściowych. Tu przykładem może być  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$  dla  $y \neq 0$  oraz  $f = 0$  na osi  $OX$  (tzn. dla  $y = 0$ ). Granica przy  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  istnieje i równa jest zero, ale dla  $x \neq 0$  powyższa  $\alpha(x)$  nie istnieje.

**Twierdzenie.** *Gdy istnieje granica podwójna oraz granice częściowe, to istnieją w danym punkcie obydwie granice iterowane i są one równe ( $A = B$ ).*

(Istnienie granicy podwójnej można jednak wywnioskować z charakteru zbieżności granicy częściowej: jeśli dla pewnego  $\delta > 0$  wartości

$$\sup\{|f(x, y) - \alpha(x)| : 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

zbieżają do zera przy  $y \rightarrow y_0$ , to granica podwójna istnieje) Szczegóły pomijamy.

## 6 Różniczkowalność

### 6.1 Jeszcze o granicach podwójnych

Ponieważ pojęcie granicy podwójnej będzie kluczowe dla badania różniczkowalności, prześledźmy na przykładach metodę badania, czy takie granice istnieją. Ponieważ  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  dokładnie wtedy, gdy  $(x - x_0, y - y_0) \rightarrow (0, 0)$ , czyli gdy równocześnie  $x - x_0 \rightarrow 0$  oraz  $y - y_0 \rightarrow 0$ , ograniczymy się do badania granic w zerze ( $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  jest początkiem układu współrzędnych).

**Przykład 1**  $f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x} \sin(xy^2) \sqrt[3]{y^2}}{x^2 + y^4}$  dla  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Czy trudno jest wykazać, że  $f$  zmierza do zera przy  $(x, y) \rightarrow \mathbf{0}$ ? -zależy (od metody). Spróbujmy metody oszacowań: Niech  $M$  oznacza mianownik. ( $M = M(x, y)$  zmierza do zera, podobnie jak licznik.) Szacujemy:  $|x| \leq M^{\frac{1}{2}}, |y| \leq M^{\frac{1}{4}}$ . Możemy to wykorzystać do oszacowania licznika przez  $M^r$ . Jeśli uda się takie oszacowanie dla pewnego  $r > 1$ , to  $|f(x, y)| \leq M^{r-1}$ , co zmierza do zera przy  $M \rightarrow 0$  (a tak jest gdy  $(x, y) \rightarrow \mathbf{0}$ ), bo  $r - 1 > 0$ . Licznik jest tu iloczynem, jeśli każdy z czynników oszacujemy z osobna przez pewne potęgi  $M$ , to  $r$  otrzymamy sumując wykładniki. Np.  $|\sqrt[3]{x}| \leq M^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = M^{\frac{1}{6}}$ . Natomiast  $|\sin t| \leq |t|$  dla  $t = xy^2$  daje  $|\sin(xy^2)| \leq M^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2} = M$ . Na koniec - jeszcze  $y^2 \leq M^{\frac{1}{2}}$ . Otrzymamy  $r = \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} > 1$ , więc szukaną granicą jest zero.

Trochę gorzej jest w przypadku ułamków o mianowniku zmiennego znaku (np.  $x - y^3$ ). W takich przypadkach należy szukać raczej ciągów, dla których mianownik szybciej zmierza do zera niż licznik, wówczas granicy (skończonej) nie będzie. (Czynnik zmierzający do zera może czasami się uprościć np. dzięki wzorom skróconego mnożenia.) Nie będziemy się jednak tego typu granicami zajmowali, bo do badania różniczkowalności na ogół wystarcza granica o mianowniku typu  $(x^2 + y^2)^s$  dla  $s > 0$ .

**Przykład 2**  $g(x, y) = \frac{x(1 - \cos y)}{x^2 + y^4}$ . Ponieważ  $g(0, y) = 0 = g(x, 0)$ , granice iterowane istnieją i są równe zero. Aby wykazać nieistnienie granicy, wystarczy znaleźć ciąg  $(s_n, t_n) \rightarrow (\mathbf{0})$ , dla którego  $g(s_n, t_n)$  nie zmierza do zera. Trzeba pamiętać, że  $1 - \cos y = \cos 0 - \cos y = -2 \sin \frac{0+y}{2} \sin \frac{0-y}{2} = 2 \sin^2 \frac{y}{2}$ , więc  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{1 - \cos y} = 2$ , co pozwoli na pozbycie się funkcji trygonometrycznej. Dla  $g_1(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  znajdziemy odpowiednie  $s_n, t_n$ . Podstawienie  $s_n = t_n = \frac{1}{n}$  nie będzie skuteczne. Ale dla  $s_n = \frac{1}{n^2}, t_n = \frac{1}{n}$  mamy  $g_1(t_n^2, t_n) = \frac{1}{2}$ . Więc granica nie istnieje! Ale jak można do tego dojść?

(1) Bardziej skomplikowane funkcje zamieniamy na asymptotycznie równoważne wielomiany. (np. dla  $\phi(x)$  szukamy takiego  $k \in \mathbb{N}$ , aby  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{x^k} = C$ , gdzie  $0 < C < +\infty$ . Jeśli  $\phi$  jest jednym z czynników licznika funkcji  $g(x, y)$ , funkcję  $g$  możemy pomnożyć przez iloraz  $\frac{x^k}{\phi(x)}$ , otrzymując prostszą w badaniu funkcję  $g_1$ , w której na miejscu  $\phi$  występuje już  $x^k$  (na koniec stosując twierdzenie o granicy iloczynu).

(2) Przypuśćmy, że doprowadzimy do postaci, w której licznik i mianownik są wielomianami, lub iloczynami pewnych potęg, sumami takich iloczynów. Jeśli  $M(tx, ty) = t^s M(x, y)$  dla dowolnych  $t, x, y \in \mathbb{R}$ , to mówimy, że  $M$  jest funkcją jednorodną stopnia  $s$ . Czasami -jak w naszym ostatnim przykładzie, funkcja nie będzie jednorodna, lecz po podstawieniu nowej zmiennej ( $x^a = X$ , lub  $Y := y^b$ ) stanie się jednorodną funkcją zmiennych  $X, Y$ .

Jeśli po takim „ujednorodnieniu” otrzymamy w liczniku funkcję postaci  $X^k Y^l$ , gdzie  $k + l > s$ , granica równa zero wyniknie z oszacowań jak w przykładzie 1, o ile składniki mianownika są nieujemne (w parzystych potęgach). Jeśli natomiast  $k + l = s$ , to licznik  $L(x, y)$  i mianownik  $M(x, y)$  mają jednakowy stopień jednorodności, zaś ich iloraz będzie stały na prostych przechodzących przez początek układu. Są to proste o równaniach  $Ax + By = 0$ , np.  $y = cx$ . Ciągi  $(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$  zmierzają do zera, więc  $g(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$  zmierza do granicy funkcji w punkcie  $\mathbf{0}$ , o ile taka istnieje. Ale  $(\frac{1}{n})^s$  wyłączamy zarówno w liczniku, jak i w mianowniku, co się redukuje. Stąd wartości  $g$  na tych ciągach są stałe, równe  $g(1, c)$ . Jeśli granica w zerze istnieje, musi też być taka sama (równa  $g(1, c)$ ).

Funkcja jest stała na prostych przechodzących przez  $\mathbf{0}$ , ta wartość jest równa granicy w zerze, więc taka sama na każdej z tych prostych- w konsekwencji sama funkcja musi być stała. W przeciwnym razie- granica nie istnieje. Szukanie "kierunku podejścia do  $\mathbf{0}$  podyktowane jest więc procesem "ujednorodnienia mianownika".

(3) Czasami funkcja zależy jedynie od pewnego wielomianu zmiennych  $x, y$ , pojawiającego się w jej różnych miejscach- jest to podstawienie do funkcji zmiennej takiego typu pozwoli znaleźć granicę metodami granicy funkcji złożonej.

Do granic podwójnych możemy stosować twierdzenia znane z teorii granic zwykłych, dzięki równoważności definicji z warunkiem HEINEGO. Na przykład, granica sumy jest sumą granic, nierówności słabe zachowują się przy przejściu do granic. Ostre nierówności między granicami utrzymują się w pewnym sąsiedztwie punktu.

## 6.2 Różniczka zupełna

**Gradient funkcji**  $f(x, y, z)$  w punkcie  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  oznaczamy symbolem  $\nabla f(P_0)$  lub  $\text{grad}f(P_0)$  definiujemy jako wektor pochodnych cząstkowych, czyli wektor  $(f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0))$ . Analogicznie jest dla funkcji  $n$  zmiennych (czyli zmiennej wektorowej  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ )-np. dla  $n = 2$ .

Odwzorowanie  $F$  o wartościach w  $\mathbb{R}^k$  traktujemy jako zestawienie  $k$  funkcji  $f_1, \dots, f_k$  o wartościach skalarnych, czyli  $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$ .

**Macierzą Jacobiego** takiego odwzorowania  $F$  (w punkcie  $\mathbf{x}_0$  nazywamy macierz, której wierszami są kolejno (licząc od góry) gradienty funkcji  $f_1, \dots, f_k$ , czyli macierz oznaczaną symbolem

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad \text{lub, dokładniej:} \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0)$$

o wyrazach  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ . Wyznacznik tej macierzy (określony w przypadku  $k = n$ ) nazywamy jakobianem i oznaczamy  $\text{Jac}f(\mathbf{x}_0)$ , lub  $\text{Jac}_{\mathbf{x}_0}f$ . Podkreślmy, że macierz Jacobiego jest macierzą zależną od punktu  $\mathbf{x}_0$ , czyli tzw. macierzą funkcyjną. Podobnie, jakobian jest traktowany jako funkcja, przyjmująca w punkcie  $\mathbf{x}$  wartość  $\text{Jac}f(\mathbf{x})$ . Na przykład, dla  $F(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ ,  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , macierzą Jacobiego jest

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

i jak łatwo przeliczyć (korzystając z jedynki trygonometrycznej), jakobian tego odwzorowania w punkcie  $(r_0, \phi_0)$  wynosi  $r_0$ .

**Definicja** Mówimy, że określone w pewnym otoczeniu  $D$  punktu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  odwzorowanie  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest różniczkowalne, jeżeli istnieje takie odwzorowanie liniowe  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , że

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - L(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Wówczas odwzorowanie  $L$  nazywamy różniczką zupełną  $F$  w punkcie  $\mathbf{x}$ , oznaczając  $L = d_{\mathbf{x}}F$ .

Przyrostowi argumentu o wektor  $\mathbf{h}$  odpowiada przyrost wartości  $F$  o wektor  $\Delta F := F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x})$ . Różniczkowalność oznacza, że ten przyrost można „z dokładnością do  $o(\|\mathbf{h}\|)$  przy  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ ” przybliżyć przez wartość pewnego liniowego odwzorowania na wektorze  $\mathbf{h}$ . To sformułowanie oznacza, że pozostała w wyniku tego przybliżenia reszta:  $r(\mathbf{h}) := \Delta F - L(\mathbf{h})$  (błąd przybliżenia) podzielona przez  $\|\mathbf{h}\|$  nadal zmierza do zera. Oczywiście, gdy zarówno iloraz, jak i jego mianownik (tu  $\|\mathbf{h}\|$ ) zmierzają do zera, to licznik też musi zmierzać do zera. Ale odwzorowania liniowe na  $\mathbb{R}^n$  są zawsze ciągłe, więc  $L(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , co implikuje zmierzanie do zera samego przyrostu:  $\Delta F$ , gdy  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$  (=ciągłość  $F$ ).

**Wniosek.** *W punktach, w których funkcja jest różniczkowalna, jest ona również ciągła.*

**Przykład 1.** Odwzorowanie liniowe  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest różniczkowalne i w każdym punkcie  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  jego różniczka jest równa  $L$ . Wynika to z równości  $L(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{h})$ , więc licznik jest tu stale równy zero.

W ogólnym przypadku  $L(\mathbf{h})$  jest „liniową częścią przyrostu wartości  $F$  odpowiadającą przyrostowi zmiennej niezależnej (argumentu) o wektor  $\mathbf{h}$  w tym sensie, że błąd względny takiego liniowego przybliżenia tego przyrostu zmierza do zera. Gdy  $F$  jest liniowe, wspomniany błąd wynosi zero.

Różniczkowalne są też odwzorowania afiniczne, czyli postaci  $F(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \mathbf{C}$ , gdzie  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^k$  jest stałym wektorem, zaś  $L$  jest liniowe. Częścią liniową przyrostu, czyli różniczką, jest tu  $L$ .

**Przykład 2.** Gdy  $n = k = 1$ , odwzorowanie liniowe  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  musi być postaci „stała razy identyczność”, czyli dla pewnej stałej  $c$  ma być  $L(h) = ch$ . Tą stałą musi być pochodna,  $f'(x)$ . Faktycznie, wówczas zamiast norm w liczniku i mianowniku mamy moduł, więc występujący w definicji ułamek jest równy  $|\frac{f(x+h)-f(x)-ch}{h}| = |\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - c|$ , co zmierza do zera wtedy i tylko wtedy, gdy  $c = f'(x)$ .

**Przykład 3.** Dla  $n = 2, k = 1$  zamiast  $(x_1, x_2) = \mathbf{x}$  używamy pary zmiennych  $(x, y)$ . Zamiast  $\mathbf{h}$ - wektor przyrostu oznaczmy przez  $(h, k)$ . Ogólną postać liniowego  $L$  mamy daną wzorem  $L(h, k) = ah + bk$ . Wykażemy, że z różniczkowalności wynika istnienie pochodnych cząstkowych i równość

$$a = f'_x(x, y), b = f'_y(x, y).$$

Faktycznie, wystarczy ograniczyć się do  $(h, k)$  zmierzających do  $(0, 0)$  wzdłuż osi układu współrzędnych. Wzdłuż osi  $OX$  zmierzamy, gdy  $k = 0, h \rightarrow 0$ . Ponieważ w tym przypadku  $\|(h, 0)\| = |h|$ , zaś  $\Delta f = f(x + h, y) - f(x, y), L(h, 0) = ah$ , więc do zera zmierza iloraz  $\frac{1}{|h|}|\Delta f - ah| = |\frac{\Delta f}{h} - a|$ , stąd  $a = f'_x(x, y)$ . Podobnie jest dla  $b$  (i dla funkcji  $n$  zmiennych).

**Zapis bezargumentowy różniczki** Odwzorowania liniowe:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  przypisujące punktowi jego współrzędne na osiach  $OX$ , odp.  $OY$  oznaczamy symbolami  $dx, dy$ . Tak więc odwzorowanie  $L$  takie, że  $L(h, k) = ah + bk$  możemy zapisać bezargumentowo:  $L = a dx + b dy$ . Różniczkę zupełną zapisujemy najczęściej w postaci

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (17)$$

lub dokładniej,

$$d_{(x_0, y_0)} f = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) dy.$$

Analogicznie jest w  $\mathbb{R}^3$  („dochodzi  $dz$ ”). W  $\mathbb{R}^n$  mamy  $dx_j$  dla  $j = 1, \dots, n$ . Dla odwzorowań  $F = (f_1, \dots, f_k)$  jak wyżej, odwzorowanie  $L$  ma współrzędne  $(L_1, \dots, L_k)$  i norma z wektora różnicy  $\Delta F - L(\mathbf{h})$  jest większa lub równa modułowi z jego dowolnej ( $i$ -tej) współrzędnej, czyli liczbie  $|\Delta f_i - L_i(\mathbf{h})|$ .

Z kolei, ta norma (euklidesowa) jest oszacowana przez sumę modułów  $i$ -tych współrzędnych względem  $i = 1, \dots, k$ . Stąd wynika

**Wniosek.** Różniczkowalność odwzorowania  $F = (f_1, \dots, f_k)$  o wartościach wektorowych jest równoważna różniczkowalności każdej z jego współrzędnych  $f_i$  ( $i \leq k$ ) z osobna.

Ponadto otrzymujemy jako wniosek następujące własności

### 6.3 Własności różniczki

**Twierdzenie 1.** Różniczka zupełna jest odwzorowaniem liniowym, którego macierzą w bazach kanonicznych  $\mathbb{R}^n$  oraz  $\mathbb{R}^k$  jest macierz Jacobiego.

**Twierdzenie 2.** Jeśli pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  istnieją ( $\forall i \leq k, j \leq n$ ) w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{x}$  i są ciągłe w tym punkcie, to odwzorowanie  $F = (f_1, \dots, f_k)$  jest w tym punkcie różniczkowalne.

*Uzasadnienie:* W przypadku funkcji 2 zmiennych  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , we wzorze (15), s. 16, wstawiając  $x, x+h$  w miejsce  $x_0, x_1, x_\alpha := x + \alpha h$  punkt pomiędzy  $x$  oraz  $x+h$ ,

(i analogicznie dla zmiennej  $y$ ) otrzymamy  $\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f = hf'_x(x_\alpha, y + k) + kf'_y(x, y_\beta)$ , więc

$$\Delta f - ah - bk = h[f'_x(x_\alpha, y + k) - f'_x(x, y)] + k[f'_y(x, y_\beta) - f'_y(x, y)].$$

Tu korzystamy z równości  $a = f'_x(x, y), \dots$ . Po podzieleniu przez  $\|(h, k)\|$  każdej z liczb  $|h|, |k|$  otrzymamy wartości ograniczone przez 1, więc iloraz (występujący w warunku różniczkowalności) będzie zmierzał do zera. Faktycznie, do zera zmierzają wyrażenia w nawiasach kwadratowych (z zakładanej ciągłości  $f'_x, f'_y$  w punkcie  $(x, y)$ ). Przypadek większej ilości zmiennych nie stwarza żadnych dodatkowych trudności.

Jak łatwo sprawdzić, *Suma funkcji różniczkowalnych w danym punkcie jest różniczkowalna, o różniczkę równej sumie różniczek:*

$$d_{\mathbf{x}}(f + g) = d_{\mathbf{x}}f + d_{\mathbf{x}}g.$$

**Twierdzenie 3.(Reguła łańcucha)** *Złożenie odwzorowań różniczkowalnych jest różniczkowalne, a różniczka złożenia jest złożeniem różniczek. Dokładniej,*

$$d_{\mathbf{x}}(G \circ F) = d_F(\mathbf{x})G \circ d_{\mathbf{x}}F.$$

Macierzą złożenia dwu odwzorowań liniowych jest iloczyn odpowiednich macierzy, więc macierz Jacobiego dla  $G \circ F$  otrzymamy mnożąc odpowiednie macierze Jacobiego dla  $G$  (w punkcie  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ ) oraz macierz Jacobiego (w punkcie  $\mathbf{x}$ ) dla  $F$ . W szczególności, gdy  $G$  jest funkcją  $g$  o wartościach skalarnych, jej macierz Jacobiego jest jednowierszowa (równa wektorowi gradientu  $g$ ). Jeśli ponadto  $F$  jest układem funkcji 1 zmiennej:  $F = (f_1, \dots, f_k)$ , otrzymamy stąd (zapowiedziany w (16), s. 16) wzór na pochodną złożenia:

$$\frac{d}{dx}g(f_1(x), \dots, f_k(x)) = g'_{x_1}(\mathbf{y})f'_1(x) + \dots + g'_{x_k}(\mathbf{y})f'_k(x).$$

(Korzystamy tu z faktu, że pochodna w punkcie  $x \in \mathbb{R}$  z funkcji  $h$  jednej zmiennej jest równa wartości  $d_x h(1)$  różniczki tej funkcji -w punkcie 1. Tu  $h = g \circ F$ . Można też korzystać bezpośrednio z definicji pochodnej, wyrażając przyrost wzorem (15), s. 16, co w przypadku  $k = 2$  przeliczyliśmy na wykładzie, przy założeniu o ciągłości pochodnych cząstkowych.) Podobne wzory otrzymamy dla pochodnych cząstkowych  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  złożenia, które są równe wartości różniczki zupełnej na  $j$ -tym wektorze z bazy kanonicznej 0-1 kowej. Z kolei, wartość różniczki zupełnej na dowolnie ustalonym wektorze  $\mathbf{w}$  o długości 1 ma ważną interpretację, o której opowiem w następnym wykładzie

## 7 Pochodne kierunkowe

**Definicja.** *Pochodną kierunkową  $\partial^{\mathbf{w}} f(\mathbf{x})$  dla funkcji  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  w kierunku wektora  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  nazywamy granicę*

$$\partial^{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{w}) - f(\mathbf{x})}{t}. \quad (18)$$

Geomerycznie rzecz ujmując, wektor  $\mathbf{w}$  wyznacza kierunek i zwrot (o ile jest  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ). Gdy założymy, że jego długość (norma euklidesowa) wynosi 1, to kierunek i zwrot wyznaczają ten wektor jednoznacznie. Półprosta wychodząca w tym kierunku z punktu  $\mathbf{x}$ , to zbiór  $L_+ := \{\mathbf{x} + t\mathbf{w} : t \geq 0\}$  i zawężenie  $f$  do tej półprostej  $L_+$  możemy traktować jako funkcję zmiennej  $t \in [0, +\infty)$ . Wykres tej funkcji otrzymamy przecinając (w przypadku  $n = 2$  powierzchnię) będącą wykresem  $f$  z płaszczyzną pionową  $L_+ \times \mathbb{R}$ . Pochodna kierunkowa, to współczynnik kierunkowy stycznej (prawostronnej) w punkcie początkowym tej krzywej. Jest to informacja o tym, czy i jak szybko funkcja wzrasta w tym punkcie w kierunku półprostej  $L_+$ . Długość wektora  $\mathbf{w}$  wpływa tu na parametryzację tej półprostej.

**Uwaga!** Niektóre podręczniki podają w definicji  $\partial^{\mathbf{w}} f(\mathbf{x})$  granicę obustronną. Na przykład, dla  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$  gdy  $\|\mathbf{w}\| = 1$ , pochodna kierunkowa w zerze istnieje i jest równa 1 według naszej definicji. Wspomniana wyżej funkcja zmiennej  $t$ , równa tu  $\|t\mathbf{w}\| = |t|$  ma pochodne jednostronne w zerze, ale nie ma pochodnej (obustronnej granicy jej ilorazów różnicowych). Na ogół będziemy jednak mieli do czynienia z funkcjami, dla których te definicje pokrywają się. Zachodzi bowiem następujące

**Twierdzenie.** *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w danym punkcie  $\mathbf{x}$ , to ma ona pochodne kierunkowe w kierunku wszystkich wektorów  $\mathbf{w}$ , przy czym*

$$\partial^{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{w}.$$

(Jako ćwiczenie proponuję sprawdzenie, że z różniczkowalności funkcji  $f$  wynika istnienie granicy obustronnej w (18).)

Ponieważ iloczyn skalarny, to iloczyn długości wektorów pomnożony przez cosinus kąta między nimi, przy stałej długości:  $\|\mathbf{w}\| = 1$ , pochodna kierunkowa osiąga wartość największą w kierunku gradientu (dla wektora unormowanego  $\|\nabla f(\mathbf{x})\|^{-1} \nabla f(\mathbf{x})$  wynosi ona  $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ ), natomiast wartości dodatnie w kierunkach tworzących kąt ostry z wektorem gradientu. Pochodna w kierunku prostopadłym do gradientu -zeruje się.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że gdy funkcja jest różniczkowalna, to zależność pochodnej kierunkowej  $\partial^{\mathbf{w}} f(\mathbf{x})$  od wektora  $\mathbf{w}$  musi być liniowa. Czasami to dość szybki sposób na wykazanie, że funkcja nie jest w danym punkcie różniczkowalna. Przykładem może być funkcja typu  $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ , równa 0 w  $(0, 0)$ .  $f$  ma pochodne w kierunku wektorów  $(\alpha, \beta)$ . (Proszę sprawdzić, jakie).

Pochodne cząstkowe -o ile istnieją, są równe pochodnym w kierunku wektorów odpowiednich osi (są to wektory z kanonicznej bazy 0-1 -kowej).

## 7.1 Ekstrema lokalne, punkty stacjonarne

Podobnie, jak w przypadku funkcji 1 zmiennej ekstrema lokalne dzielimy na: maksima i minima lokalne. Jeśli istnieje otoczenie  $U$  punktu  $P_0$ , w którym funkcja rzeczywista  $f$  jest określona i przyjmuje wartości nie większe, niż w tym punkcie, czyli

$$\forall P \in U f(P) \leq f(P_0),$$

to mówimy, że  $f$  ma maksimum lokalne w punkcie  $P_0$ . Silne maksimum lokalne oznacza, że dla pewnego otoczenia  $U$  tego punktu mamy  $f(P) < f(P_0)$  dla wszystkich  $P \in U \setminus \{P_0\}$ . Odwracając kierunek nierówności otrzymamy definicję minimum lokalnego.

Może się zdarzyć, że dla pewnych prostych  $L$  przechodzących przez  $P_0$  zawężenia  $f$  do tych prostych mają ekstrema lokalne, ale różnego typu. Mówimy wówczas o punktach siodłowych. Na przykład, w punkcie  $P_0 = (0, 0)$  funkcja  $f(x, y) = x^2 - y^2$  ma silne minimum lokalne na prostych przechodzących przez punkt  $(\alpha, \beta)$  taki, że  $|\alpha| > |\beta|$ . (Dla  $\alpha = 1, \beta = 0$  jest to oś  $OX$ ). Gdy  $|\alpha| < |\beta|$ , to  $t \neq 0 \Rightarrow f(\alpha t, \beta t) < 0$ , czyli jest maksimum.

Jednym z ważniejszych zastosowań rachunku różniczkowego jest znajdowanie ekstremów lokalnych. Na razie podamy warunki konieczne istnienia takiego ekstremum.

**Twierdzenie.** *Jeśli funkcja ma w danym punkcie ekstremum lokalne, to wszystkie pochodne cząstkowe są w tym punkcie równe zero.*

Taki punkt, w którym gradient odwzorowania jest równy zero, nazwiemy punktem stacjonarnym dla tego odwzorowania. (Uwaga: jeśli nie zakładamy różniczkowalności, a jedynie istnienie pochodnych kierunkowych, to teza dla pochodnych cząstkowych nie ma na ogół odpowiednika dla pochodnych kierunkowych -np. dla  $\sqrt{x^2 + y^2}$  w punkcie  $(0, 0)$ .) Jeśli założymy różniczkowalność, to różniczka zupełna musi się zerować w punktach ekstremów lokalnych. Jeśli więc  $f$  ma skończenie wiele punktów stacjonarnych, możemy próbować wykazywać bezpośrednio, że w którymś z tych punktów jest ekstremum. Nie zawsze się uda -może być tam np. jedynie punkt siodłowy. Nawet gdy po zawężeniu do



dowlnej prostej przechodzącej przez  $P_0$  jest minimum lokalne, w każdym otoczeniu  $P_0$  na płaszczyźnie mogą pojawić się punkty, w których  $f(P) < f(P_0)$ . Przykładem może być funkcja 2 zmiennych:  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 4x^2)$ . Dowlonie blisko zera  $f$  przyjmuje wartości dodatnie ( $f(0, y) = y^2$ ), jak i ujemne:  $f(x, 2x^2) = -2x^4$ . Na prostych przechodzących przez  $(0, 0)$  (o równaniu  $y = kx$  lub  $x = 0$ )  $f$  jest dodatnia dla  $0 < |x| < \frac{1}{4}|k|$ , osiągając wartość zero w punkcie  $(0, 0)$ . Dlatego potrzebne będą warunki sformułowane w terminach pochodnych 2. rzędu.

## 7.2 Formy kwadratowe

Rozważać będziemy tu jedynie macierze o wyrazach rzeczywistych. Jeśli  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  oznacza wektor w  $\mathbb{R}^n$ , to na ogół przyjmuje się, że jest on zapisywany jako macierz jednokolumnowa o  $n$  wierszach. Operacja transpozycji przypisuje macierzy  $A = [a_{ij}]_{i \leq k, j \leq n}$  o  $n$  kolumnach i  $k$  wierszach macierz  $A^T = [a_{ji}]_{j \leq n, i \leq k}$  o  $n$  wierszach i  $k$  kolumnach. W przypadku macierzy kwadratowej  $n \times n$  transpozycja oznacza przeniesienie wyrazów macierzy poprzez symetrię względem głównej przekątnej. Transpozycją wektora  $\mathbf{x}$  jest macierz 1-wierszowa o  $n$  kolumnach, zaś iloczyn macierzowy  $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$  jest zwykłym iloczynem skalarnym wektora  $\mathbf{x}$  przez ten sam wektor, czyli kwadratem jego długości. Gdy  $A$  jest macierzą kwadratową symetryczną, czyli taką, że  $a_{ij} = a_{ji} (\forall i, j \leq n)$ , to odwzorowanie przypisujące wektorowi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  iloczyn macierzowy

$$Q_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = \sum_{i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \in \mathbb{R} \quad (19)$$

nazywamy *formą kwadratową skojarzoną z macierzą  $A$* . Na przykład, w  $\mathbb{R}^2$  wektory zapisujemy raczej w postaci  $(x, y)$  i wówczas formę kwadratową 2 zmiennych możemy zawsze zapisać w postaci  $Q_A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ . Jest to forma odpowiadająca macierzy  $2 \times 2$  postaci

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Każdy wielomian jednorodny stopnia 2 jest formą kwadratową i istnieją wzory algebraiczne (tzw. „wzory polaryzacyjne”) pozwalające odtworzyć macierz symetryczną  $A$  na podstawie wartości jej formy kwadratowej.

**Definicja** Mówimy, że macierz kwadratowa symetryczna  $A$  jest *dodatnio określona*, gdy  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} Q_A(\mathbf{x}) > 0$ . Macierz nazywamy *nieujemną*, lub *półokreśloną dodatnio*, gdy w powyższym warunku zachodzą słabe nierówności, czyli gdy jej forma kwadratowa jest w każdym punkcie nieujemna. Analogicznie, *ujemna określoność macierzy  $A$*  może być zdefiniowana jako dodatnia określoność macierzy  $-A$ .

Dla macierzy diagonalnych  $[d_{ij}]$ , czyli takich, że  $d_{ij} = 0$  dla wszystkich  $i \neq j$ , dodatnia określoność jest równoważna dodatniości wszystkich wyrazów z przekątnej:  $\forall_i d_{ii} > 0$ . Półokreśloność oznacza, że  $d_{ii} \geq 0$  w tym przypadku. Wówczas zbiór  $\{d_{11}, \dots, d_{nn}\}$  jest zbiorem wszystkich wartości własnym tej macierzy, a odpowiadającymi im wektorami własnymi są wektory z kanonicznej bazy 0-1 -kowej.

Ogólnie, dla macierzy symetrycznej rzeczywistej wyznaczającej odwzorowanie liniowe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  istnieje zawsze pewna baza (ortonormalna) w  $\mathbb{R}^n$  złożona z wektorów własnych i w tej bazie to odwzorowanie ma macierz diagonalną. Na przekątnej takiej macierzy są wartości własne. Można wykazać, że jest zawsze co najwyżej  $n$  wartości własnych, ich znak dodatni (odp. ujemny) odpowiada dodatniości (ujemności) jak w przypadku diagonalnym. Przypomnijmy, że liczba  $\lambda$  jest wartością własną odwzorowania  $T$ , gdy istnieje niezerowy wektor  $w$  taki, że  $T(w) = \lambda w$ . Wówczas  $w$  nazywamy wektorem własnym. Aby znaleźć wektory własne macierzy  $A$ , najpierw należy znaleźć jej wartości własne, a te są rozwiązaniami tzw. równania charakterystycznego:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Tu  $I$  oznacza macierz identycznościową, czyli macierz diagonalną z samymi 1 na przekątnej. Liczba  $\lambda$  jest pierwiastkiem, gdy macierz  $A - \lambda I$  jest macierzą odwzorowania nieodwracalnego (więc nieiniektywnego). Wówczas rozwiązania równania  $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$  są wektorami własnymi. Nie są one wyznaczone jednoznacznie, bo każda skalarna wielokrotność też jest wektorem własnym, co więcej, wektory własne tworzą podprzestrzeń wektorową, zwaną podprzestrzenią własną. Dla nas ważne jest kryterium dodatniej określoności nie odwołujące się do równania charakterystycznego, ani nie wymagające znajomości wartości własnych danej macierzy.

*Minorem macierzy* nazywamy wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn. *Minory główne*, to minory powstałe po skreśleniu wraz z  $j$ -tą kolumną, również  $j$ -tego wiersza (tak więc skreślamy parę wierszy i odpowiadających im kolumn o tym samym numerze). *Minor kątowy główny stopnia  $k$*  dla macierzy kwadratowej  $A$ , to wyznacznik

$$M_k(A) := \det[a_{ij}]_{i,j \leq k}$$

(czyli wyznacznik macierzy powstałej po wykreśleniu kolumn i wierszy o numerach większych od  $k$ ).

**Twierdzenie KRYTERIUM SYLVESTERA** *Macierz kwadratowa  $A$  jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej minory kątowe główne są dodatnie. Natomiast ujemna określoność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $(-1)^k M_k(A) > 0 \forall k \leq n$ , czyli  $M_1(A) < 0, M_2(A) > 0, \dots$  (znak zmienia się za każdym razem).*

(Warunkiem równoważnym nieujemności macierzy jest nieujemność wszystkich minorów głównych)

Na przykład, macierz  $2 \times 2$  mająca wartości 1 na przekątnej głównej, zaś w pozostałych narożnikach -wartości 2 -nie jest nieujemna, gdyż jej wyznacznik (równy w tym przypadku  $M_2(A)$ ) jest ujemny. Faktycznie, dla wektora  $(x, y) = (1, -1)$  mamy  $Q_A(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 = -2 < 0$ . Jest tak pomimo dodatniości wyrazów macierzy. Z kolei, macierz formy  $x^2 + xy + y^2$  jest, oczywiście, dodatnio określona. Dla macierzy dodatnio określonej musi być  $a_{11} > 0$ , podobnie  $a_{ii} = Q_A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) > 0$ , gdzie  $\mathbf{e}_i$  jest wektorem  $i$ -tej osi, co czasami pozwala stwierdzić na pierwszy rzut oka, że dana macierz nie jest dodatnio określona. Dla macierzy  $2 \times 2$  macierz jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno jej wyznacznik, jak i któryś z wyrazów z przekątnej głównej, są dodatnie. Natomiast ujemna określoność w tym przypadku oznacza, że któryś z wyrazów na przekątnej głównej jest ujemny, zaś wyznacznik jest dodatni.

## 8 Pochodne wyższych rzędów.

Pochodne rzędu 2,  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x})$  definiujemy jako pochodne cząstkowe od odpowiednich pochodnych, czyli jako  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) (\mathbf{x})$ . W przypadku funkcji 3 zmiennych (oznaczanych jako  $(x, y, z)$ ), zamiast  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} f$  piszemy często  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ . Na przykład,  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} (xy^2 + 3xy + x^2 \sin y) = \frac{\partial}{\partial y} 2xy + 3x + x^2 \cos y = 2x - x^2 \sin y$ . Dla formy kwadratowej  $q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dyz + ez^2 + fzx$  mamy  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} q = 2c$ . Podobnie,  $\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f \right) (\mathbf{x})$ , na przykład,  $\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} x \cos z + yz + x^2 z^3 = -\cos z + 12xz$ .

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem różnych zmiennych określamy jako „pochodne mieszane”. Na przykład,  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} q = \frac{\partial}{\partial y} (dy + 2ez + fx) = 2e$ . Widzimy więc, że tak można znaleźć poszczególne współczynniki formy (i jej macierz). Proste przeliczenie wskazuje, że ostatnia pochodna jest równa  $\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} q$ . To nie przypadek. Mamy bowiem następujące twierdzenie o symetrii.

**Twierdzenie Schwarz’a** *Gdy pochodne cząstkowe rzędu 2 funkcji  $f$  są określone w otoczeniu danego punktu  $\mathbf{x}$  oraz ciągle w tym punkcie, to pochodne*

mieszane są równe bez względu na kolejność różniczkowania:

$$\forall_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\mathbf{x}).$$

Można nawet zakładać mniej: istnienie granicy (podwójnej) jednej z pochodnych mieszanych

$$\alpha = \lim_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}).$$

Wówczas istnieją obydwie pochodne mieszane:  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$  oraz  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$  w punkcie  $\mathbf{x}$  i są one równe  $\alpha$ .

**Definicja** *Macierzę Hessego*  $H_f(\mathbf{x})$  dla odwzorowania  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy macierz kwadratową pochodnych cząstkowych drugiego rzędu:

$$H_f(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \right]_{i,j \leq n}.$$

Funkcje, których wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 2 są określone i ciągle w zbiorze otwartym  $D$  nazywamy funkcjami klasy  $C^2$  w tym zbiorze, oznaczając ogół takich funkcji symbolem  $C^2(D)$ . Tak więc, dla  $f \in C^2(D)$ , na mocy twierdzenia Schwarz'a, macierz Hessego jest symetryczna.

### 8.0.1 Druga różniczka

Formę kwadratową skojarzoną z tą macierzą  $H_f(\mathbf{x})$  oznaczamy  $d_{\mathbf{x}}^2 f$  i nazywamy *różniczką drugiego rzędu (lub drugą różniczką) funkcji  $f$  w punkcie  $\mathbf{x}$* . Podobnie, jak w przypadku różniczki pierwszego rzędu (wzór (17), s.22), jest to na razie zapis bezargumentowy. Jeśli  $dx_j$  oznacza funkcjonał liniowy  $dx_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie dla  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$  mamy  $dx_j(\mathbf{w}) = w_j$ , to

$$d_{\mathbf{x}}^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) dx_i dx_j.$$

W dalszym ciągu będziemy rozważali jedynie funkcje klasy  $C^2$ , co zapewni symetrię (macierzy Hessego). Na przykład, w przypadku  $n = 2$  (jak zwykle zmiennymi są tu  $(x, y)$ , a nie  $(x_1, x_2)$ , zamiast  $\mathbf{w}$ - bierzemy wektor  $(h, k)$ ) ze względu na tę symetrię, mamy

$$(d_{(x,y)}^2 f)(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k^2.$$

Jako ćwiczenie proszę sprawdzić, jaki jest związek między formą kwadratową a jej drugą różniczką (w przypadku dwu i w przypadku 3-wymiarowym).

## 8.1 Ekstrema lokalne -warunek wystarczający

Wreszcie możemy podać warunek wystarczający na to, by w danym punkcie stacjonarnym funkcja miała maksimum (odp. minimum) lokalne.

**Twierdzenie** *Jeśli funkcja  $f$  jest klasy  $C^2$  w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x}$ , zaś macierz Hessego w tym punkcie jest ujemnie określona, to  $f$  w tym punkcie ma (silne) maksimum lokalne. Dodatnia określoność  $d^2 f$  w punkcie stacjonarnym implikuje, że jest tam silne minimum lokalne. Natomiast gdy forma nie jest półokreślona (ani dodatnio, ani ujemnie), to w tym punkcie nie ma ekstremum lokalnego (jest to wówczas „punkt siodłowy”).*

Można też wykazać, że gdy macierz Hessego jest półokreślona dodatnio w każdym punkcie z pewnego otoczenia  $U$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x}$ , to w punkcie  $\mathbf{x}$  jest minimum lokalne. Co więcej, jeśli  $U$  jest zbiorem wypukłym, to  $\forall \mathbf{z} \in U$  mamy  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z})$ , czyli w takim wypukłym otoczeniu wartość  $f(\mathbf{x})$  jest najmniejsza.

Zarówno twierdzenie, jak i ta ostatnia teza, wynikają z następującego twierdzenia.

**Twierdzenie (WZÓR TAYLORA)** Dla  $f$  klasy  $C^2$  w wypukłym otoczeniu  $U$  punktu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , jeśli  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  jest takim wektorem, że  $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U$ , to istnieje punkt  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{h}$  leżący na odcinku łączącym punkty  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  (opisany przez odpowiednio dobrany parametr  $\lambda \in (0, 1)$ ) taki, że

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + d_{\mathbf{x}}f(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}d_{\mathbf{z}}^2f(\mathbf{h}). \quad (20)$$

Faktycznie, w punkcie stacjonarnym  $d_{\mathbf{x}}f = 0$ , więc kierunek nierówności pomiędzy wartościami:  $f(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  oraz  $f(\mathbf{x})$ , czyli znak ich różnicy, jest uzależniony jedynie od znaku liczby  $d_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{h})$ . Gdy  $U$  jest wypukły, to wraz z punktami  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ , do  $U$  należą wszystkie punkty z łączącego je odcinka, w szczególności punkt  $\tilde{\mathbf{x}}$  występujący we wzorze Taylora. Znak wartości drugiej różniczki na wektorze  $\mathbf{h}$  powinien być więc stały w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{x}$  (odpowiednio w zbiorze  $U$ ). Skąd wziąć takie otoczenie w dowodzie twierdzenia? -z kryterium Sylwestera i z tezy o zachowywaniu się ostrej nierówności w pewnym otoczeniu punktu.

Dokładniej, minor kątowy główny macierzy Hessego  $H_f(\mathbf{z})$  (macierzy drugiej różniczki)  $d_{\mathbf{z}}^2f$  stopnia  $k$ , czyli  $M_k(H_f(\mathbf{z}))$  oznaczmy chwilowo symbolem  $m_k(\mathbf{z})$ . Z założenia dodatniej określoności  $H_f(\mathbf{x})$  wynika, że  $m_k(\mathbf{x}) > 0$ . Założenie klasy  $C^2$  i wzór na wyznacznik (minor) macierzy implikują ciągłość tych funkcji  $m_k$ , znak dodatni zachowuje się więc w pobliżu  $\mathbf{x}$ , czyli w pewnej kuli o promieniu  $r_k > 0$ . Czyli gdy  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r_k$ , to  $m_k(\mathbf{z}) > 0$ . Promień  $r := \min(r_1, \dots, r_n)$  jest dodatni i dla  $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r$  mamy  $m_k(\mathbf{z}) > 0 \quad \forall k \leq n$ . Z kryterium Sylwestera, otrzymujemy teraz dodatnią określoność macierzy Hessego w takich punktach  $\mathbf{z}$ .

Teraz ustalmy dowolne wypukłe otoczenie  $W$  punktu  $\mathbf{x}$ , zawarte w dziedzinie  $f$ . Gdy macierz Hessego nie jest półokreślona, to dla pewnych dwu wektorów  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  jest  $d_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{w}) > 0$ ,  $d_{\mathbf{x}}^2f(\mathbf{v}) < 0$ . Ze względu na jednorodność, takie same znaki mają wartości  $d_{\mathbf{x}}^2f$  na wektorach postaci  $t\mathbf{w}$ ,  $t\mathbf{v}$ , które dla dostatecznie małych  $t > 0$  spełniają warunki  $\mathbf{x} + t\mathbf{w} \in W$ ,  $\mathbf{x} + t\mathbf{v} \in W$ . Znak funkcji ciągłych zmiennej  $\mathbf{z}$ , równych  $d_{\mathbf{z}}^2f(\mathbf{w})$ ,  $d_{\mathbf{z}}^2f(\mathbf{v})$  utrzymuje się (jest stały) w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{x}$ . Znaki przyrostów  $f$  od punktu  $\mathbf{x}$  do punktów  $\mathbf{x} + t\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$  będą więc (ze wzoru Taylora) przeciwne (dla dostatecznie małych  $t > 0$ ), nie ma więc w takim przypadku ekstremum lokalnego w punkcie  $\mathbf{x}$ .

Parę przykładów zastosowania tych metod podaje na wykładzie

## 8.2 Funkcje uwikłane, ekstrema warunkowe

Naszym następnym celem będzie pewna odmiana problemu ekstremów, tzw. ekstrema warunkowe.

**Przykład 8.2.1** Szukamy liczb nieujemnych  $x, y, z$  o z góry zadanej sumie (powiedzmy: niech  $x + y + z = 3S$ , gdzie  $S > 0$ ) takich, by iloczyn  $xyz$  był możliwie największy. Gradient funkcji  $f(x, y, z) := xyz$ , równy  $(yz, xz, xy)$  jest jednak różny od  $(0, 0, 0)$  w punktach zbioru  $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z = 3S\}$ . Ale funkcja ciągła  $f$  osiąga wartość największą na tym zbiorze  $E$  (bo  $E$  = fragment płaszczyzny prostopadłej do wektora  $(1, 1, 1)$ , wycięty płaszczyznami wyznaczonymi przez układ współrzędnych  $(OXY, OYZ, OXZ)$ , w kształcie trójkąta równobocznego). Tu łatwo sprowadzić zagadnienie do zwykłego maksimum lokalnego (podstawiając  $z = 3S - x - y$ ) dla funkcji  $h(x, y) = f(x, y, 3S - x - y)$  zależnej od pary zmiennych  $(x, y) \in E_1 := \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 3S\}$ . W punktach, gdzie  $x = 0$  lub  $y = 0$  lub  $x + y = 3S$  mamy  $h(x, y) = 0$ , więc nie ma tam wartości największej. Przyrównując gradient  $h$  do zera otrzymamy jedyny punkt stacjonarny dla  $h$  w punkcie  $(S, S)$  w obszarze  $E_1$ , a skoro wiemy już, że istnieje ekstremum (maksimum lokalne) w  $E_1$ , to musi to być szukany punkt, zaś wartość największa dla  $f$ , to  $f(S, S, S) = S^3$ . Nie musimy (lecz możemy -dla ćwiczenia) sprawdzić ujemną określoność macierzy Hessego dla funkcji  $h$  w tym punkcie stacjonarnym. Zresztą możemy tu również wykorzystać porównanie średniej geometrycznej i arytmetycznej liczb  $x, y, z$ . Rachunek różniczkowy dostarcza więc alternatywnego dowodu tej „nierówności  $A \geq G \geq H$ ”.

Sytuacja ta podlega pod pewien ogólny schemat:

Zbiór  $E$  opisany jako  $E = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ , gdzie  $g$  jest pewną funkcją klasy  $C^1$  chcemy przedstawić jako wykres pewnej funkcji 2 zmiennych:  $z = z(x, y)$ , gdzie  $(x, y) \in E_1$  dla pewnego obszaru  $E_1$  płaszczyzny  $R^2$ . Wówczas wartość największa funkcji  $f$  na zbiorze  $E$ , to będzie maksimum z funkcji  $f(x, y, z(x, y))$  na zbiorze  $E_1$ . (Zbiór  $E$  nie był otwarty, więc chociażby z tego powodu, nie można mówić o ekstremum lokalnym  $f$ .)

Dla uproszczenia zapisu, punkt o współrzędnych  $(x, y, z)$  oznaczmy jako  $P$ .

**Definicja** Mówimy, że w punkcie  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  funkcja  $f$  osiąga (silne) lokalne ekstremum warunkowe przy warunku  $g(P) = 0$ , jeśli  $g(P_0) = 0$  oraz dla pewnego  $r > 0$  z relacji:  $(0 < \|P - P_0\| < r, g(P) = 0)$  wynika, że  $f(P_0) < f(P)$ .

Tym, co różni tę definicję od warunku na maksimum lokalne jest dodatkowy warunek:  $g(P) = 0$ . Zauważamy więc funkcję do zbioru  $E = g^{-1}(\{0\})$ .

Aby stosować przedstawioną powyżej metodę, odpowiedzmy sobie na pytanie, czy i kiedy  $E$  jest wykresem pewnej funkcji  $z = z(x, y)$  klasy  $C^1$  od dwu zmiennych  $x, y$ . Sprawdzamy więc, czy równanie

$$g(x, y, z) = 0 \quad (21)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Odpowiedź jest, na ogół negatywna: np. dla  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  mamy dwa rozwiązania przeciwnych znaków:  $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , które są różne dla  $x^2 + y^2 < 1$ . Zbiór  $E$  jest tu sferą jedostkową, wykresami funkcji będą jedynie jej połówki: górna (znak + przed pierwiastkiem) i dolna. Gdy  $z \neq 0$  (poza „równikiem”) w dostatecznie małym otoczeniu każdego punktu (np. o promieniu  $|z|$ ) zbiór  $E$  wygląda jak wykres funkcji. Punkty „równikowe” -gdzie  $z = 0$ , to punkty, gdzie  $\frac{\partial g}{\partial z} = 0$  -tam w każdym otoczeniu  $E$  nie wygląda, jak wykres funkcji, zawiera punkty, w których znak  $z$  jest  $< 0$ , jak i takie, w których  $z > 0$ , odpowiadające takiej samej parze  $(x, y)$ .

Funkcję  $z = z(x, y)$  spełniającą równanie (21) nazwiemy funkcją uwikłaną w tym równaniu. Analogicznie, uwikłana w równaniu  $G(x, y) = 0$  będzie funkcja  $y = y(x)$  (oraz funkcja  $x = x(y)$  zmiennej  $y$ ). Można też rozpatrywać sytuację wielowymiarową, gdzie  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^k$ , traktując  $G = (g_1, \dots, g_k)$  przyrównane do zera jako układ  $k$  warunków:

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \dots, g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Dla uproszczenia sformułujmy tezę dla  $g = g(x, y, z), k = 1, m = 2$ .

**Twierdzenie o funkcjach uwikłanych** Jeżeli  $g$  jest funkcją klasy  $C^1$  w otoczeniu punktu  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  oraz  $g(P_0) = 0$ , zaś  $g'_z(P_0) \neq 0$ , to dla dostatecznie małych  $r > 0$  istnieje dokładnie jedna funkcja  $z = z(x, y)$  ciągła określona w otoczeniu  $U$  punktu  $(x_0, y_0)$  spełniająca warunek (21) oraz warunek  $z(x_0, y_0) = z_0$ . Taka funkcja jest wówczas klasy  $C^1$ . Ponadto jej pochodne cząstkowe wyrażają się w punktach  $(x, y)$  dostatecznie bliskich  $(x_0, y_0)$  wzorami

$$z'_x(x, y) = -\frac{g'_x(x, y, z(x, y))}{g'_z(x, y, z(x, y))}, \quad z'_y(x, y) = -\frac{g'_y(x, y, z(x, y))}{g'_z(x, y, z(x, y))}.$$

Tezę tego twierdzenia można też wypowiedzieć nieco inaczej, w bardziej geometryczny sposób: Gdy funkcja  $g$  spełnia powyższe założenia, to w pewnym otoczeniu postaci  $W = U \times (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$  punktu  $P_0$  zbiór  $g^{-1}(\{0\})$  jest wykresem pewnej funkcji różniczkowalnej  $z : U \rightarrow \mathbb{R}$ , czyli :

$$g^{-1}(\{0\}) \cap W = \{(x, y, z(x, y)) : (x, y) \in U\}.$$

Idea dowodu (jednego z paru możliwych, szczegóły pominiemy) polega w przypadku  $k = 1$  na zastosowaniu własności Darboux. Ponieważ  $g'_z(P_0) \neq 0$ , w pewnym otoczeniu  $W$  punktu  $P_0$  znak funkcji ciąglej:  $g'_z$  jest stały i funkcja zmiennej  $z$  postaci  $g(x_0, y_0, z)$  jest ściśle monotoniczna w otoczeniu  $z_0$ -punktu, w którym ta funkcja się zeruje, więc dla pewnej pary  $z_{\pm}$  wartości  $g(x_0, y_0, z_{\pm})$  mają przeciwny znak. Ta

sytuacja utrzyma się w pewnych otoczeniach zawierających zbiory postaci  $U \times \{z_{\pm}\}$ , gdzie  $U$  jest otoczeniem punktu  $(x_0, y_0)$  w  $\mathbb{R}^2$  (ogólnie - w  $\mathbb{R}^n$ ). Czyli

$$\forall_{(x,y) \in U} g(x, y, z_-)g(x, y, z_+) < 0.$$

W ten sposób zaznaczamy, że znaki  $g(x, y, z_{\pm})$  są różne. Z własności Darboux, istnieje dla dowolnego takiego punktu  $(x, y) \in U$  przynajmniej jedno rozwiązanie  $z(x, y)$  równania  $g(x, y, z(x, y)) = 0$ . Gdyby istniało jeszcze inne takie rozwiązanie  $z_1(x, y)$ , to wewnątrz odcinka o końcach  $z(x, y), z_1(x, y)$  (w pewnym punkcie  $z_0(x, y)$ ) pochodna cząstkowa:  $g'_z(x, y, z_0(x, y))$  powinna przyjmować wartość zero (z tw. Rolle'a), wbrew naszemu założeniu. Różniczkowalność i wzory na pochodne cząstkowe można otrzymać, stosując do liczników badanych ilorazów różnicowych twierdzenie Lagrange'a o przyrostach. Jednak sam wzór można sprawdzić (jeśli wiemy już, że istnieją pochodne cząstkowe) stosując wzór na pochodne cząstkowe złożenia  $g(x, y, z(x, y))$  ( $=0$ ).

Na przykład, oznaczając  $P = (x, y, z(x, y))$ , mamy

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z(x, y)) = g'_x(P)1 + g'_y(P)0 + g'_z(P)z'_x(x, y),$$

ponieważ  $\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ . Stąd wynika pierwszy z dowodzonych wzorów.

Pochodne drugiego rzędu można obliczać wykorzystując już powyższe wzory. Na przykład,  $z''_{xx} = (-g''_{xx}(g'_z)^2 - 2g''_{xz}g'_xg'_z + g''_{zz}(g'_x)^2)(g'_z)^{-3}$ . Tego wzoru będziemy używali jedynie w punktach stacjonarnych funkcji  $z$ , gdzie wszystkie, poza pierwszym, składniki licznika zerują się, dając

$$z''_{xx}(x, y) = \frac{-g''_{xx}(P)}{g'_z(P)} \text{ gdy } z'_x(x, y) = 0.$$

Macierz Hessego dla  $z$  w punkcie stacjonarnym tej funkcji otrzymamy z „częściowej macierzy Hessego” względem zmiennych  $(x, y)$  dla  $g$  przez podzielenie tej macierzy przez  $-g'_z$ , czyli przez takie dzielenie zastosowane do wszystkich wyrazów tej macierzy. W ustalonym punkcie  $P$  jest to więc skalarna wielokrotność macierzy, co powoduje zachowanie charakteru określoności macierzy w przypadku gdy  $g'_z(P) < 0$ , zmianę takiego charakteru (np. z dodatniej na ujemną określoność) gdy  $g'_z(P) > 0$ .

Dodatnia określoność tej „częściowej macierzy Hessego” dla  $g$  oznacza więc w punktach stacjonarnych istnienie maksimum lokalnego funkcji uwikłanej  $g$ . Zasada badania ekstremum lokalnego funkcji uwikłanej jest więc dość prosta. Na przykład, dla funkcji  $z = z(x, y)$  uwikłanej w równaniu  $g(x, y, z) = 0$ , ekstremum lokalne może być jedynie w punkcie  $(x_0, y_0)$  stacjonarnym, czyli takim, że dla  $P_0 = (x_0, y_0, z(x_0, y_0))$  jest  $g'_x(P_0) = 0, g'_y(P_0) = 0$ . Wówczas dodatniość hessianu częściowego, czyli warunek:

$$g''_{xx}(P_0)g''_{yy}(P_0) - g''_{xy}(P_0)^2 > 0$$

gwarantuje istnienie ekstremum lokalnego dla funkcji  $z$  w punkcie  $(x_0, y_0)$ . Jeżeli  $g'_z(P_0) > 0$ , jest to istotne maksimum lokalne, gdy  $g''_{xx}(P_0) > 0$ . Gdy znaki  $g'_z(P_0)$  oraz  $g''_{xx}(P_0)$  są przeciwne, mamy minimum lokalne  $z$  w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

**Przykład:** dla funkcji uwikłanej w równaniu  $g(x, y, z) = 0$ , gdzie  $g(x, y, z) = 6(x^2 + y^2 + z^2) + 4x - 8(y + z) + 5$  mamy  $\nabla g = (12x + 4, 12y - 8, 12z - 8)$ . Punkt stacjonarny  $(x_0, y_0)$  dla  $z(x, y)$  wyznaczamy z układu  $g'_x = 0 = g'_y$ , więc  $x_0 = -\frac{1}{3}, y_0 = \frac{2}{3}$ . Z równania  $g(x_0, y_0, z_0) = 0$  mamy  $z_0 = \frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{6})$ , w tych punktach  $g'_z$  wynosi  $\pm 2\sqrt{6}$ , zaś  $g'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Są więc 2 funkcje uwikłane. Macierz drugich pochodnych  $g$  względem zmiennych  $x, y$  jest diagonalna, o przekątnej (12,12) (bo pochodne mieszane są równe zero) i jest dodatnio określona. Wartość maksimum lokalnego wynosi więc  $\frac{1}{6}(4 + \sqrt{6})$ , minimum osiągnięte jest dla drugiej z funkcji uwikłanych i wynosi  $\frac{1}{6}(4 - \sqrt{6})$ .

### 8.3 Ekstrema warunkowe

W przypadku najprostszym (funkcji 2 zmiennych), gdy warunek jest postaci  $g(x, y) = 0$ , rozwikłując otrzymamy  $y = y(x), y'(x) = -g'_x(g'_y)^{-1}$ , więc badanie

ekstremum lokalnego  $f(x, y)$  (w punkcie  $P_0 = (x_0, y_0)$ ) przy takim warunku, możemy sprowadzić do badania ekstremum lokalnego funkcji 1 zmiennej  $x$  postaci  $f(x, y(x))$ . Mamy w punkcie  $x_0$  ekstremum pochodną równą zero, ta pochodna, to  $f'_x(P_0) + f'_y(P_0)y'(x_0)$ . Równość zera, pomnożona stronami przez  $g'_y(P_0)$  daje równanie  $f'_x(P_0)g'_y(P_0) + f'_y(P_0)g'_x(P_0) = 0$ . To jest wyznacznik pary gradientów, jest on zerem dokładnie wtedy, gdy te gradienty są liniowo zależne. Innymi słowy, dla pewnej liczby  $\lambda$  jest  $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ . (Przypadek  $\nabla f = 0$  chwilowo wykluczamy - odpowiada on sytuacji, gdy ekstremum  $f$  jest lokalne, a nie warunkowe - nie zależy od warunku  $g = 0$ ). W przypadku  $k$  równoczesnych warunków:  $G = (g_1, \dots, g_K) = 0$ , mamy podobne twierdzenie: **Twierdzenie o ekstremach warunkowych.** *Jeżeli funkcja  $f$  ma ekstremum lokalne warunkowe w punkcie  $P$  przy warunku  $g_1(P) = 0, \dots, g_k(P) = 0$ , to istnieją liczby  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  nie wszystkie równe zero i takie, że*

$$\lambda_0 \nabla f(P) + \lambda_1 \nabla g_1(P) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(P) = 0, \quad (22)$$

*czyli gradienty  $f$  oraz funkcji określających warunki, są liniowo zależne.*

Na ogół przyjmujemy, że  $\lambda_0 = 1$ . Innymi słowy, punkt ekstremum lokalnego warunkowego jest teraz punktem stacjonarnym tzw. funkcji Lagrange'a  $\Phi$  określonej wzorem

$$\Phi(P) := f(P) + \lambda_1 g_1(P) + \dots + \lambda_k g_k(P).$$

Faktycznie, lewa strona (22) jest równa gradientowi funkcji  $\Phi$ . Liczby  $\lambda_j$  nazywamy mnożnikami, lub mnożnikami Lagrange'a, a metodę określamy mianem metody mnożników Lagrange'a.

Przykładem, gdzie  $\lambda_0$  musi być zerem jest zagadnienie obliczenia minimum z funkcji  $f(x, y) = x$  przy warunku  $y^2 - x^3 = 0$  (tu znak  $x^3$  jest nieujemny, minimum wynosi 0 w punkcie (0,0) niespełniającym tezy tw. o funkcjach uwikłanych względem żadnej ze zmiennych. Stąd cały kłopot: tu  $\Phi(x, y) = x - \lambda y^2 + \lambda x^3$ , gradient  $\nabla \Phi = (1 + 3\lambda x^2, 2\lambda y^2) = (0, 0)$ , co daje  $y = 0, x \neq 0$ , wbrew relacji  $y^2 - x^3 = 0$ . W przypadku, gdy gradienty funkcji  $g_j$  opisujących warunek są liniowo zależne w punkcie  $P_0$ , jest to „warunek zdegenerowany” w tym punkcie i taki punkt („punkt osobliwy rozmaitości  $g^{-1}(\{0\})$ ”) trzeba badać oddzielnie, gdyż wtedy może być  $\lambda_0 = 0$ .

Wróćmy na chwilę do przykładu 8.2.1. Tu mamy

$$f(x, y, z) = xyz, \quad g(x, y, z) = x + y + z - 3S, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

Szukamy maksimum warunkowego przy nieujemnych  $x, y, z$ . Szukamy więc punktu stacjonarnego funkcji Lagrange'a  $\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 3S)$ . Przyrównując jej gradient do zera, mamy  $yz + \lambda = 0, xz + \lambda = 0, xy + \lambda = 0$ , co po wyrugowaniu  $\lambda$  daje  $xy = yz = xz$ . Dzieląc stronami pierwszą równość przez  $y$ , a drugą przez  $z$  mamy  $x = z = y$ , co przy „równaniu więzów”  $g(x, y, z) = 0$  daje spodziewany wynik. Wbrew pozorom, w porównaniu do metody wyliczania  $z$  z równania więzów (warunku  $g = 0$ ), jest to metoda rachunkowo prostsza (nie mamy tu równania stopnia 2 względem  $x$ ).

Poszukajmy jeszcze tą metodą maksimum dla  $f(x, y) = y^2 - 2xy$  na elipsie  $x^2 + ay^2 = 1$ , w zależności od stałej  $a > 0$ . To, że jest ono osiągnięte w jakimś punkcie- wiemy z własności funkcji ciągłych na zbiorach domkniętych i ograniczonych. Teraz  $\Phi(x, y)$  ma gradient  $(-2y + 2\lambda x, -2x + 2y + 2a\lambda y)$ , równy zeru, gdy  $\lambda x = y$  oraz  $x = (1 + a\lambda)y$ . Dla  $x = 0$  byłoby  $y = \lambda 0 = 0$ , lecz  $(0, 0)$  nie leży na elipsie. Podstawiając do równania elipsy, mamy  $(1 + a\lambda^2)x^2 = 1$ , zaś podstawiając do drugiego równania i dzieląc przez  $x$  mamy  $\lambda + a\lambda^2 = 1$ , więc dla  $\Delta = 1 + 4a$  mamy 2 pierwiastki rzeczywiste  $\lambda = (-1 \pm \sqrt{\Delta})/2a$  (np. gdy  $a = 2$ , to  $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1$ ). Następnie wstawiamy  $x = \pm(1 + a\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}$  (już 4 możliwe wartości) oraz  $y = \lambda x$ , porównując do siebie wartości  $f(x, y)$  w 4 punktach ustalamy, która jest największa.

Gdybyśmy szukali maksimum tej  $f$  na zbiorze  $\{(x, y) : x^2 + ay^2 \leq 1\}$ , to trzeba jeszcze znaleźć zwykle punkty stacjonarne  $f$  rozwiązując układ równań  $2y = 0, 2y - 2x = 0$ , dający jedyny punkt stacjonarny  $(0, 0)$ . Ale wartość

$f(0,0) = 0$  nie jest jednak ekstremum lokalnym. Tu  $f$  jest formą kwadratową, więc  $d^2f(x,y) = 2f(x,y)$ , forma ta nie jest półokreślona.

### 8.3.1 Obraz obszaru. Funkcje wypukłe

Własność Darboux osiągania wszystkich wartości pośrednich przez funkcje ciągłe  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  na zbiorze  $D \subset \mathbb{R}^n$  można łatwo wykazać np. dla takich zbiorów  $D$ , w których każde 2 punkty można połączyć pewną krzywą zawartą w zbiorze  $D$ , łączącą punkty  $P_0 := p(0)$  oraz  $P_1 := p(1)$ . Faktycznie, gdy np.  $p : [0, 1] \rightarrow D$  określa krzywą ciągłą, to złożenie  $F \circ p : [0, 1] \ni t \rightarrow F(p(t)) \in \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą osiągającą wszystkie wartości pośrednie pomiędzy wartościami  $F(P_0) = (F \circ p)(0)$  oraz  $F(P_1)$ . Jeżeli zbiór  $D$  jest ponadto domknięty i ograniczony (takie zbiory nazwiemy *obszarami domkniętymi*, to dla pewnych  $P_0, P_1$  wartości w tych punktach są równe odpowiednio:  $m := \min\{F(P) : P \in D\}$  oraz  $M := \max\{F(P) : P \in D\}$ , obrazem takiego zbioru  $D$  będzie więc cały przedział  $[m, M]$ . Pozostaje wyznaczyć te krańce przedziału. Już wiemy, jak to robić -to są ekstrema. Rozpatrujemy przy tym osobno 2 zagadnienia: ekstremum lokalnego w punktach wnętrza zbioru  $D$  oraz ekstrema na brzegu zbioru  $D$ . Na ogół brzeg opisany jest pewnym równaniem, więc ekstrema na brzegu, to ekstrema warunkowe. Ponieważ brzeg jest domknięty i ograniczony, te ekstrema muszą wystąpić, w przeciwieństwie do ekstremów lokalnych (w punktach z wnętrza  $D$ ), które mogą istnieć, lecz nie muszą, co pokazał ostatni przykład. Może się też zdarzyć, że w pewnym punkcie na brzegu nie są spełnione założenia tw. o funkcjach uwklanych -odpowiada to sytuacji, gdy warunek jest zdegenerowany, w równaniu (22) mamy  $\lambda_0 = 0$ . Takie punkty należy sprawdzić osobno, porównując, czy wartość w nich jest większa (mniejsza) od wartości w punktach stacjonarnych odpowiedniej funkcji Lagrange'a.

Przypomnijmy, że zbiór  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  jest wypukły, gdy dla dowolnych dwu jego punktów  $P_0, P_1 \in \Omega$  również każdy punkt  $p(t)$  postaci  $tP_0 + (1-t)P_1$ ,  $t \in [0, 1]$  należy do tego zbioru. Mówimy, że funkcja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła, gdy jej dziedzina  $\Omega$  jest ziosem wypukłym oraz zawężenia do odcinków zawartych w  $\Omega$  są funkcjami wypukłymi. Dokładniej, dla  $p(t)$  -powyższej parametryzacji odcinka o końcach  $P_0, P_1 \in \Omega$ , wypukła ma być funkcja złożona  $F \circ p : [0, 1] \ni t \rightarrow F(p(t))$ . Innymi słowy, dla każdego  $t \in [0, 1]$  ma być

$$F(tP_0 + (1-t)P_1) \leq tF(P_0) + (1-t)F(P_1).$$

Przypomnijmy, że dla  $n = 1$  „modelową funkcją wypukłą” jest funkcja wykładnicza  $t \mapsto e^t$  (funkcja wypukła jest „zwrócona wypukłością w dół osi”). Mówimy, że  $f$  jest wklęsła, gdy  $F(x) := -f(x)$  jest wypukła (przykładem jest logarytm naturalny). Jak łatwo sprawdzić gdy  $F$  jest klasy  $C^1$ , pochodna  $(F \circ p)'$  musi być niemalejąca, więc jeśli zmienia znak, to z ujemnego na dodatni, nie może mieć maksimum względem  $t$  w punkcie wewnętrznym odcinka -a jedynie na jego końcach. **MAKSIMUM FUNKCJI WYUKŁEJ NA ZBIORZE WYPUKŁYM  $\Omega$  MOŻE ISTNIEĆ (jest, jak wiemy, osiągnięte) JEDYNIEM W PUNKCIE  $P$  O NASTĘPUJĄCEJ WŁASNOŚCI: „ $P$  nie jest punktem wewnętrznym żadnego odcinka zawartego w  $\Omega$ .”** Takie punkty nazywamy *punktami ekstremalnymi zbioru  $\Omega$* . (Ta teza nie wymaga założenia o różniczkowalności.) Proszę na chwilę uruchomić swoją wyobraźnię przestrzenną i przekonać się, że

- Punkty ekstremalne nie mogą być punktami z wnętrza zbioru -muszą leżeć na brzegu
- Zbiorem punktów ekstremalnych koła domkniętego jest okrąg będący brzegiem. Podobnie jest w przypadku elipsy, kuli, elipsoidy, paraboloidy obrotowej.
- Dla stożka punkty ekstremalne, to wierzchołek i okrąg (brzeg podstawy). Dla walca -to są 2 okręgi.



- Dla wielościanu zbiór punktów ekstremalnych jest skończony -równy zbiorowi jego wszystkich wierzchołków. (To dobra wiadomość: szukając maksimum funkcji wypukłej (lub minimum funkcji wklęsłej) wystarczy porównać skończony zbiór jej wartości w wierzchołkach takiego wielościanu!)

Są jeszcze inne klasy funkcji, dla których ekstrema lokalne nie mogą wystąpić w punktach wewnętrznych: np. funkcję  $f(x, y)$  dwu zmiennych, klasy  $C^2$  nazwiemy *harmonijną* w obszarze  $\Omega$ , gdy ślad jej macierzy Hessego, tzw. *laplasjan*:  $f''_{xx} + f''_{yy}$  jest stale równy zero. Można wykazać, że takie funkcje nie osiągają ekstremów lokalnych w punktach wewnętrznych dziedziny. (Jeśli pochodne mieszane nie zerują się w danym punkcie, to brak półokreśloności macierzy Hessego jest oczywisty, gdyż na głównej przekątnej tej macierzy  $2 \times 2$  są zera. Dowód w przypadku ogólnym jednak musimy pominąć.)

## 8.4 Płaszczyzna styczna

Na zakończenie tej części wykładu poznamy wzór na równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni  $S$  o równaniu  $g(x, y, z) = 0$  w punkcie  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  takim, że  $g(P_0) = 0$ . Równanie płaszczyzny zawierającej punkt  $P_0$  można zapisać w postaci  $P - P_0 \perp \mathbf{w}$ , gdzie  $\mathbf{w}$  jest wektorem normalnym, czyli prostopadłym,  $P = (x, y, z)$  oznacza dowolny punkt płaszczyzny. Prostopadłość wektora o początku  $P$  i końcu  $P_0$  do  $\mathbf{w} = (A, B, C)$  zapisujemy przy użyciu iloczynu skalarnego w postaci  $(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$ . Wektorem normalnym do powierzchni  $S$  w punkcie  $P_0 \in S$  nazywamy wektor prostopadły do płaszczyzny stycznej do  $S$  w tym punkcie.

Przypomnijmy, że odległość punktu od płaszczyzny jest równa odległości tego punktu od jego rzutu prostopadłego na tę płaszczyznę. *Płaszczyznę styczną do  $S$  w punkcie  $P_0$*  możemy określić jako taką płaszczyznę, dla której odległość od punktu  $P \in S$  do jego rzutu prostopadłego (powiedzmy,  $Q$ ) na tę płaszczyznę, podzielona przez odległość od  $Q$  do  $P_0$  zmierza do zera, gdy  $P$  zmierza do  $P_0$ . (Równoważnie, oznacza to, że kąt pomiędzy płaszczyzną a prostą  $\overline{PP_0}$  będzie dowolnie mały, jeśli  $P \in S$  będzie dostatecznie blisko punktu  $P_0$ .)

**Twierdzenie** *Wektorem normalnym do powierzchni  $S = \{P \in \mathbb{R}^3 : g(P) = 0\}$  w punkcie  $P_0$  jest gradient funkcji  $g$  w tym punkcie. Równanie płaszczyzny stycznej ma więc postać*

$$(x - x_0)g'_x(P_0) + (y - y_0)g'_y(P_0) + (z - z_0)g'_z(P_0) = 0. \quad (23)$$

Gdy  $S$  jest wykresem funkcji 2 zmiennych  $f$  określonej w pewnym otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$ , czyli

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in U\},$$

to możemy  $f$  „uwikłać w równaniu:  $g(x, y, f(x, y)) = 0$ , gdzie  $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ . Ponieważ  $\nabla g = (f'_x, f'_y, -1)$ , równanie płaszczyzny stycznej do wykresu  $f$  ma postać

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

Na przykład, gdy  $(x_0, y_0)$  jest punktem stacjonarnym, ta płaszczyzna będzie płaszczyzną równoległą do  $OXY$ , o równaniu  $z - z_0 = 0$ , gdzie  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . W tym przypadku rzutem prostopadłym punktu  $P = (x, y, f(x, y))$  na tę płaszczyznę jest  $(x, y, z_0)$ , jego odległości od  $P$  oraz od  $P_0$ , to odpowiednio  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$  oraz  $\|(x - x_0, y - y_0)\|$  (norma euklidesowa), warunek styczności wynika z definicji różniczki.

## 9 Szeregi liczbowe

Zacznijmy od definicji szeregu liczbowego. Chodzi nam o to, by używać pojęcia „szeregu formalnego” niezależnie od tego, czy jego suma istnieje, czy też nie, gdyż będziemy czasami mieli do czynienia z szeregami rozbieżnymi.

**Definicja 1** Szeregiem liczbowym o wyrazach  $x_n \in \mathbb{C}$  będziemy nazywać ciąg „sum częściowych”  $(S_k)_{k=0,1,\dots}$ , gdzie

$$S_k := \sum_{n=0}^k x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_k.$$

Czasami wygodnie jest pisać  $S_k(x_n)$  zamiast  $S_k$ . Mówimy, że ten szereg jest zbieżny, o sumie równej  $S$ , co zapisujemy symbolem  $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , gdy ciąg  $(S_k)$  jest zbieżny do granicy skończonej, przy czym  $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ . Skrótowo, mamy więc

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k x_n.$$

Możemy też zdefiniować  $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$  jako szereg  $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ , gdzie  $y_0 = \dots = y_{p-1} = 0, y_n = x_n$  dla  $n \geq p$ . W szczególności często będziemy spotykali  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . W takim przypadku  $S_k = x_1 + \dots + x_k$ .

Zaczniemy od „trywialnych przykładów”, gdy  $x_1 = x_2 = \dots = 0$ , to  $S_k$  jest ciągiem stałym równym  $x_0$  i taka jest też suma badanego szeregu. Podobnie, gdy ciąg  $x_n$  jest równy zero od pewnego miejsca (dla  $n \geq M$ ), to ciąg  $S_k$  jest stały od tego miejsca, zaś suma szeregu jest wtedy równa sumie skończonej  $x_0 + \dots + x_M$ .

Bez wątpienia, najważniejszym szeregiem jest *szereg geometryczny* (o wyrazach zespolonych). Odpowiada on ciągowi geometrycznemu postaci  $x_n = aq^n$ , gdzie  $q \neq 0$  jest tzw. ilorazem ciągu geometrycznego. (Faktycznie,  $\forall_{n \in \mathbb{N}} q = \frac{x_n}{x_{n-1}}$ ). Dla ciągu samych zer możemy przyjąć  $a = 0, q = 1$ . Ogólnie,  $q^0 = 1$ , więc  $a = x_0, x_1 = aq, x_2 = aq^2, \dots$ . Tu mamy  $qS_k = S_k + aq^{k+1} - a$ , więc dla  $q \neq 1$  otrzymujemy  $S_k = \frac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$ . Szereg jest więc zbieżny do  $\frac{a}{1-q}$  gdy  $|q| < 1$ . (Ciąg geometryczny  $a^{q+1}$  jest zbieżny do zera przy  $|q| < 1$ , stały dla  $q = 1$  i rozbieżny gdy  $q \neq 1, |q| > 1, a \neq 0$ . Ciąg  $S_k$  jest rozbieżny dla  $a \neq 0, |q| \geq 1$ , bo dla  $q = 1$  mamy  $x_n = a$ , zaś  $S_k = (k+1)a$  w tym przypadku ( $q = 1$ ). Na przykład,  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2$ .

Zauważmy, że dla  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $x_n = S_n - S_{n-1}$ . Jeśli istnieje granica skończona  $S = \lim S_n$ , to również  $S = \lim S_{n-1}$ , więc wówczas  $\lim x_n = S - S = 0$ . Stosując arytmetykę granic, możemy więc sformułować następujące tezy:

**Twierdzenie 1** Dla szeregów zbieżnych mamy następujące własności:

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI Wyrazy szeregu zbieżnego muszą dążyć do zera
2. LINIOWOŚĆ Gdy szeregi  $\sum a_n$  oraz  $\sum b_n$  są zbieżne, to zbieżny jest też szereg sum  $a_n + b_n$ , przy czym  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . Podobnie, dla dowolnej stałej  $C$  mamy  $\sum_{n=0}^{\infty} C a_n = C \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .
3. Zbieżność szeregu nie zależy od początkowych wyrazów: Gdy tylko istnieje  $M \in \mathbb{N}$  takie, że  $\forall_n n \geq M \Rightarrow x_n = y_n$ , to ze zbieżności  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  wynika zbieżność  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ .
4. WARUNEK RÓWNOWAŻNY ZBIEŻNOŚCI Szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on następujący warunek Cauchy’ego

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists M \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \left| \sum_{n=M+1}^{M+k} x_n \right| < \epsilon.$$

5. Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny (do  $S = \sup\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego sum częściowych jest ograniczony.

Drugą tezę otrzymamy zauważywszy, że  $S_k(a_n + b_n) = S_k(a_n) + S_k(b_n)$ , zaś  $S_k(C a_n) = C S_k(a_n)$ . W następnej tezie zauważmy, że ciąg  $S_k(y_n) = S_k(x_n) + S_k(y_n - x_n)$ , różnica  $S_k(y_n) - S_k(x_n)$  jest więc ciągiem stałym od miejsca o indeksie  $k = M$ .

Na koniec -zauważmy, że pod modułem w warunku (4) jest suma skończona, równa  $S_{M+k} - S_M$ , więc jest to warunek Cauchy'ego dla ciągu  $(S_k)$ .

Dla szeregów o wyrazach  $x_n \geq 0$  ciąg  $(S_k)$  jest niemalejący, więc w tym przypadku jego zbieżność jest równoważna ograniczoności, zaś  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_k S_k$ .

W przypadku szeregów o wyrazach nieujemnych (i tylko takich!) zbieżność będziemy zapisywać w postaci warunku

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty, \quad \text{a rozbieżność -jako warunek} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty.$$

**Uwaga!** Warunek z tezy 1 ostatniego twierdzenia jest konieczny, ale nie wystarczający: chociaż  $\lim \frac{1}{n} = 0$ , wykażemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Gdyby bowiem ten szereg (zwany szeregiem harmonicznym) był zbieżny, to dla  $S_k = S_k(\frac{1}{n})$  powinno być  $\lim S_{2k} = \lim S_k$ , zaś  $\lim S_{2k} - S_k = 0$ . Tak jednak nie jest, gdyż mamy

$$S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k}$$

Składników w ostatniej sumie jest  $k$ , więc ta suma równa jest  $\frac{1}{2}$  i (wbrew naszemu przypuszczeniu) NIE ZMIERZA DO ZERA. Szereg harmoniczny jest więc rozbieżny.

Nietrywialny przykład szeregu zbieżnego, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ , zbieżny do 1 (sprawdzamy to na wykładzie). Niełatwo jest natomiast wyznaczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

tą sumą jest  $\frac{\pi^2}{6}$ . Sprawdzimy jedynie samą jego zbieżność. Ponieważ  $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ , sumy częściowe spełniają  $S_k(\frac{1}{(n+1)^2}) \leq S_k(\frac{1}{n(n+1)})$ , są więc ograniczone, bo już wiemy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$ . Ponieważ  $\lim_k S_k(\frac{1}{(n+1)^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , otrzymujemy dowodzoną zbieżność.

Do wykazania zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , gdzie  $\alpha > 1$  wygodnie jest użyć tzw. kryterium całkowego zbieżności szeregów:

**Twierdzenie 2** KRYTERIUM CAŁKOWE. *Jeśli  $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją nieujemną, nierosnącą, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  jest zbieżna.*

Najczęściej przy badaniu zbieżności szeregów korzystamy jednak z następującego kryterium

**Twierdzenie 3** KRYTERIUM PORÓWNAWCZE. *Jeśli moduły wyrazów  $x_n$  są mniejsze lub równe od wyrazów  $y_n$  pewnego szeregu zbieżnego  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ , to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  jest też zbieżny.*

Przez kontrapozycję otrzymujemy stąd warunek na rozbieżność  $\sum y_n$ : zachodzi ona, jeśli  $|x_n| \leq y_n$  ( $\forall_n$ ) oraz szereg  $\sum x_n$  jest rozbieżny. Pożyteczne jest też kryterium w nieco ogólniejszej postaci, ale dla  $x_n, y_n > 0$ :

WARIANT KRYTERIUM PORÓWNAWCZEGO *Jeśli tylko  $\lim \frac{x_n}{y_n} = C$ , gdzie  $0 < C < +\infty$ , to szereg  $\sum x_n$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sum y_n$  jest zbieżny.*

Dowodząc kryterium w wersji podstawowej, sprawdzamy warunek (4), szacując

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+k} x_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{M+k} |x_n| \leq \sum_{n=M+1}^{M+k} y_n.$$

Ostatnie sumy są dowolnie małe przy  $M$  dostatecznie dużych (niezależnie od  $k$ ), z tego samego kryterium dla szeregu zbieżnego  $\sum y_n$ .

Sztuka doboru majorant  $y_n$  jest istotna, jednak są szeregi zbieżne, dla których takich „sumowalnych majorant” nie ma. Minimalnymi majorantami są liczby  $|x_n|$ .

Mówimy, że szereg  $\sum x_n$  jest *bezwzględnie zbieżny*, gdy  $\sum |x_n| < +\infty$ . Wówczas też sam ciąg  $(x_n)$  o powyższej własności nazwiemy *ciągami sumowalnymi*. Dzięki kryterium porównawczemu, szereg bezwzględnie zbieżny musi być zbieżny. Jednak istnieją szeregi zbieżne, które nie są zbieżne bezwzględnie (nazywamy je *szeregi zbieżnymi warunkowo*). Takim szeregiem jest np. szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ . Nie jest on zbieżny bezwzględnie (moduły tworzą szereg harmoniczny rozbieżny:  $\sum \frac{1}{n}$ ). (Jak się okaże, jego sumą jest  $\ln 2$ .) jego zbieżność wynika z następującego **kryterium Leibniza**:

**Twierdzenie 4** *Jeśli ciąg  $a_n$  zmierza w sposób malejący (nierosnący) do zera, to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  jest zbieżny.*

Sprawdźmy np. „charakter zbieżności” dla  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{2n+1}}$ . W mianowniku mamy tu ciąg rosnący, bo funkcja  $\sqrt{\cdot}$  jest rosnąca. Licznik =  $C \cdot (-1)^{n+1}$ , gdzie  $C$  jest stałą  $C = -1$ . Z dokładnością do tego stałego czynnika, mamy więc ciąg spełniający założenia kryterium Leibniza, szereg jest zbieżny. Ale tylko warunkowo, bo tu  $|x_n| \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ , a ta stała wielokrotność szeregu harmonicznego jest rozbieżna. Nie zawsze zmiana znaku jest „regularna”, -np. gdy mamy szereg typu  $\sum \frac{\sin n}{n}$ . Wówczas przydatne jest *Kryterium Dirichleta*, które sformułujemy później w ogólniejszym przypadku -dla szeregów funkcyjnych.

W większości przypadków szeregi  $\sum x_n$ , z którymi będziemy mieli do czynienia będą jednak albo zbieżne, albo bezwzględnie zbieżne. W przestrzeniach unormowanych interesować nas będzie też głównie zbieżność bezwzględna, definiowana dla wektorów  $\mathbf{w}_n$  przez warunek  $\sum \|\mathbf{w}_n\| < +\infty$ . Prowadzi to zawsze do badania zbieżności pewnych szeregów o wyrazach nieujemnych (dla  $a_n = |x_n|$  lub  $a_n = \|\mathbf{w}_n\|$ ). Dla takich szeregów najczęściej będziemy korzystali z jednego z dwu następujących kryteriów:

#### Twierdzenie 5 PODSTAWOWE KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI

**KRYTERIUM D’ALEMBERTA** *Jeśli  $a_n > 0$  oraz  $g := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , to przy  $g < 1$  szereg jest zbieżny, zaś dla  $g > 1$  -rozbieżny.*

**KRYTERIUM CAUCHY’EGO** *Jeśli  $a_n \geq 0$  oraz  $\gamma := \lim \sqrt[n]{a_n}$ , to przy  $\gamma < 1$  szereg jest zbieżny, zaś dla  $\gamma > 1$  -rozbieżny.*

Założenia można nieco uogólnić, postulując zamiast  $g < 1$  zachodzenie dla pewnego  $q < 1$  warunku  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$  (a zamiast  $g > 1$  -warunek  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ) dla wszystkich  $n$  od pewnego miejsca począwszy. Analogicznie dla warunku  $\gamma < 1$ . (Takie tezy są zresztą pierwszym krokiem dowodu. Dla ich sformułowania można używać pojęć: granicy dolnej i granicy górnej ciągu, których jednak nie będziemy wprowadzali). Natomiast wystarcza, by  $\gamma \geq 1$  dla nieskończenie wielu  $n$ . Wówczas nie może zachodzić warunek konieczny (zbieżność ciągu wyrazów szeregu do zera). W przypadkach  $g < 1$  oraz  $\gamma < 1$  korzystamy z kryterium porównawczego, gdyż dla pewnej stałej  $C$  i dla dostatecznie dużych  $n$  otrzymamy oszacowania  $a_n \leq Cq^n$ .

Zauważmy, że w przypadku  $g = 1$  lub  $q = 1$  żadne z kryteriów nie rozstrzyga o zbieżności: Takie równości zachodzą zarówno dla szeregu harmonicznego (rozbieżnego)  $\sum \frac{1}{n}$ , jak i dla szeregu zbieżnego  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Można wykazać, że gdy kryterium d’Alemberta rozstrzyga (o zbieżności, bądź rozbieżności), to również rozstrzyga kryterium Cauchy’ego. Można więc zapytać, czy nie wystarczy znać tylko to drugie, silniejsze kryterium? Na ogół w przypadkach, gdy wyraz szeregu zawiera jako czynnik silnię -warto korzystać z kryterium d’Alemberta, gdyż po podzieleniu  $(n+1)!$  przez  $n!$  uzyskamy po prostu  $n+1$  jako odpowiedni czynnik. Liczenie granicy zawierającej jako czynnik  $\sqrt[n]{n!}$  jest bardzo trudne.

Jako ciekawostkę podajmy tu pewien wzór (tzw. wzór Stirlinga), pozwalający w praktyce przybliżać wartość silni dla dużych  $n$ :

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{\theta \in (0,1)} n! = \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Ciąg o wyrazach  $\sqrt[n]{n!}$  jest więc asymptotycznie równoważny z ciągiem o wyrazach  $\frac{n}{e}$ , czyli iloraz tych 2 ciągów zmierza do 1.

**Przykład** Zbadajmy, dla jakich  $a > 0$  kryterium d'Alemberta zagwarantuje zbieżność szeregu  $\sum a_n$ , gdzie  $\frac{a^{n+1}}{a^n}$ . Mamy

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = (a^{n+1}n!(n+1)n^n) : (a^n n!(n+1)^n(n+1)) = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}.$$

Granicą tego ciągu jest  $\frac{a}{e}$ , więc dla  $0 < a < e$  mamy szereg zbieżny, a dla  $a > e$  -rozbieżny. Gdy  $e = 1$ , to wzór Stirlinga pokazuje, że wówczas  $a_n > \sqrt{2\pi n} \rightarrow +\infty$  (rozbieżność). W tym przypadku kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga ( $g = 1$ ), podobnie jak kryterium Cauchy'ego.

Parę dalszych przykładów, w których warto stosować kryterium d'Alemberta:  $\sum \frac{n^n}{(3n)!}$  (tu  $g = 0$ ),  $\sum \frac{n^{2n}}{(2n)!}$  (tu  $g = (\frac{e}{2})^2 > 1$ ),  $\sum \frac{n^n}{n!(e+i)^n}$  (tu  $i$  oznacza jednostkę urojona,  $g = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1$ ). Kryterium Cauchy'ego możemy stosować np. dla  $\sum \frac{n}{6^n}(3+4i)^n$  (tu  $\gamma = \frac{5}{6}$ ), dla  $\sum \frac{\ln n}{2^n}$  (tu  $\gamma = \frac{1}{2}$ ), dla  $\sum \frac{n^3 3^n}{2^{n+4^n}}$  (tu  $\gamma = \frac{3}{4}$ ).

## 10 Zbieżność jednostajna, szeregi funkcyjne

Dla funkcji ograniczonej  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  na zbiorze  $D \subset \mathbb{R}^m$  określamy

$$\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Przestrzeń  $C_b(D)$  funkcji ciągłych ograniczonych na zbiorze  $D$  jest przestrzenią wektorową, gdzie sumą wektorów  $f, g \in C_b(D)$  jest funkcja  $f + g \in C_b(D)$  określona wzorem  $(f + g)(x) := f(x) + g(x) \forall x \in D$ . Podobnie, iloczyn funkcji  $f \in C_b(D)$  przez skalar  $\alpha$  - to funkcja  $D \ni x \rightarrow \alpha f(x)$ . Można łatwo sprawdzić, że  $\|\cdot\|_D$  jest normą (w sensie definicji ze strony 17). Gdy zbiór  $D$  jest domknięty i ograniczony, to (dzięki twierdzeniu Weierstrassa) każda funkcja ciągła na tym zbiorze jest ograniczona i jej moduł osiąga w pewnym punkcie wartość największą. Zamiast  $\sup$  możemy pisać wtedy  $\max$  w definicji  $\|f\|_D$  i zamiast  $C_b(D)$  piszemy wówczas  $C(D)$ .

Jeśli  $C \geq 0$  jest taką stałą, że  $\forall x \in D |f(x)| \leq C$ , to  $C$  nazwiemy *jednostajnym ograniczeniem dla  $|f|$  na zbiorze  $D$* . Wówczas  $\|f\|_D \leq C$ . Norma  $\|f\|_D$  funkcji  $f$  jest więc najmniejszym ograniczeniem  $|f|$ . W przestrzeniach funkcyjnych rozważane są też inne normy, zaś  $\|f\|_D$  nazywa się *normą jednostajną*, lub *normą Czebyszewa* tej funkcji.

**Definicja** Mówimy, że ciąg funkcji ograniczonych  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  nazywamy ciągiem zbieżnym jednostajnie do funkcji ograniczonej  $f$ , gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_D = 0.$$

Zbieżność jednostajną oznaczamy podwójną strzałką:  $\vec{\rightarrow}$ , pisząc  $f_n \vec{\rightarrow} f$  przy  $n \rightarrow \infty$ . Natomiast zachodzenie warunku  $\forall x \in D \lim f_n(x) = f(x)$  nazywamy *zbieżnością punktową ciągu  $(f_n)$  do funkcji  $f$*  i oznaczamy symbolem  $f_n \rightarrow f$  (na zbiorze  $D$ ), lub  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $x \in D$ .

W dowolnej przestrzeni unormowanej  $(X, \|\cdot\|)$  możemy rozpatrywać szeregi  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  zdefiniowane, podobnie jak w poprzednim przypadku (szeregów liczbowych) jako ciągi sum częściowych

$$S_k := \sum_{n=0}^k x_n.$$

Sumę szeregu o wyrazach wektorowych  $x_n$  definiujemy jako *granicę ciągu  $S_k$  jego sum częściowych*, czyli taki wektor  $S$  oznaczany symbolem  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , dla którego  $\lim \|S_k - S\| = 0$ . Jeśli  $X = C(D)$  zaś  $x_n = f_n$ , to ten szereg nazywamy *szeregiem funkcyjnym*. Tak więc  $S_k$  jest tu funkcją

$$S_k : D \ni z \rightarrow S_k(z) = \sum_{n=0}^k f_n(z) \in \mathbb{C},$$

zaś zbieżność jednostajną (odpow. punktową) tego szeregu rozumiemy jako odpowiednią zbieżność ciągu funkcji  $S_k$ . Najważniejszą rolę w analizie odgrywają dwa typy szeregów funkcyjnych: szeregi potęgowe (postaci  $\sum a_k z^k$ ) oraz szeregi Fouriera, odgrywające podstawową rolę w teorii sygnałów, w termodynamice i wielu innych zastosowaniach. Są to szeregi postaci  $\sum a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ .

Zacznijmy jednak od dokładniejszego przyjrzenia się pojęciom zbieżności punktowej i jednostajnej ciągów funkcyjnych. Warunek równoważny zbieżności jednostajnej można sformułować bez odwoływania się do normy:

**Lemat**  $f_n \xrightarrow{\rightarrow} f$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in D |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Faktycznie, ostatni warunek oznacza, że dla dostatecznie dużych  $n$  liczba  $\epsilon$  jest jednostajnym ograniczeniem na zbiorze  $D$  dla  $|f_n - f|$ , więc mamy wówczas  $\|f_n - f\|_D \leq \epsilon$ , co (dzięki dowolności  $\epsilon > 0$ ) implikuje zbieżność  $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$ .

Warunek zbieżności punktowej oznacza, że

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in D \exists n = n_x \forall n \geq n_x |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Jak widać, ten warunek różni się od warunku na zbieżność jednostajną wyłącznie kolejnością kwantyfikatorów. Ze zbieżności jednostajnej do funkcji  $f$  wynika zbieżność punktowa do tej samej funkcji, lecz implikacja przeciwna nie zachodzi (przykłady poniżej).

**Przykłady:** Ciąg  $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx)$  jest jednostajnie zbieżny do 0 (do funkcji stałej równej zero) na osi liczbowej  $\mathbb{R}$ , bo  $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Natomiast ciąg pochodnych:  $f'_n(x) = \cos(nx)$ , choć ograniczony, nie zmierza jednostajnie do zera.

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej można wykazać, że gdy ciąg pochodnych  $g'_n(x)$  jest jednostajnie ograniczony, to ze zbieżności ciągu  $g_n(t)$  dla punktów  $t$  tworzących jakiś podzbiór gęsty w zbiorze  $D$  (np. punktów wymiernych) wynika już zbieżność jednostajna.

Zauważmy, że gdy  $f_n(t) = t^n$  dla  $0 \leq t < 1$ , to  $\forall t \in [0,1) \lim f_n(t) = 0$ , lecz zbieżność tego ciągu nie jest jednostajna. Faktycznie, podstawiając  $f(t) = 0$ , mamy w tym przypadku  $\|f_n - f\|_{[0,1)} = \sup\{t^n : 0 \leq t < 1\} = 1$ .

Badanie zbieżności jednostajnej danego ciągu należy rozpocząć od wyznaczenia granicy punktowej  $f$  tego ciągu  $f_n$ . Następnie należy wyznaczyć (na przykład, badając ekstrema lokalne) kresy górne ciągu  $|f_n - f|$ . Dopóki nie znamy funkcji  $f$ , nie wiemy, co odjąć od  $f_n$ .

Na szczęście, podobnie jak dla ciągów liczbowych, istnieje warunek równoważny zbieżności jednostajnej, który nie odwołuje się do wartości granicy takiego ciągu. Co więcej, taki warunek można sformułować w ogólniejszym kontekście przestrzeni unormowanej  $(X, \|\cdot\|)$ .

**Definicja** Mówimy, że ciąg wektorów  $x_n$  w przestrzeni unormowanej jest ciągiem Cauchy'ego (czyli spełnia warunek Cauchy'ego), jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall k, m \geq n_0 \|x_k - x_m\| < \epsilon. \quad (24)$$

(W warunku tym, bez zmniejszania ogólności, wystarczy brać  $k > m$ ). Podobnie, jak dla ciągów liczbowych, każdy ciąg zbieżny spełnia ten warunek. W niektórych przestrzeniach wektorowych istnieją ciągi Cauchy'ego, które nie są zbieżne. Na przykład, można wykazać, że w przestrzeni ciągów liczbowych równych zero od pewnego miejsca (podobnie, jak w przestrzeni wielomianów) dla dowolnej normy istnieją ciągi Cauchy'ego niemające granicy w tej przestrzeni.

**Definicja** Przestrzeń Banacha nazywamy taką przestrzeń unormowaną, w której każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

(Jak wkrótce zobaczymy, przestrzenie Banacha, są to dokładnie te przestrzenie unormowane, w których wszystkie szeregi bezwzględnie zbieżne (czyli takie, że  $\sum \|x_n\| < +\infty$ ) są zbieżne.)

**Twierdzenie 6** Przestrzeń  $C_b(\Omega)$  funkcji ciągłych i ograniczonych z normą  $\|\cdot\|_D$  jest przestrzenią Banacha.

Idea dowodu polega na zauważeniu, że ciąg funkcji  $f_n$  spełniający jednostajny warunek Cauchy'ego (czyli warunek (24) względem normy  $\|\cdot\|_\Omega$ ) spełnia również w każdym (dowolnie ustalonym) punkcie  $\omega \in \Omega$  warunek (24) w  $\mathbb{C}$ , gdzie normą jest moduł. Faktycznie,  $|f_k(\omega) - f_m(\omega)| \leq \|f_k - f_m\|_\Omega < \epsilon$  dla  $k, m > n_0$ . Dla ciągów liczbowych warunek (24) implikuje zbieżność (jest to twierdzenie Cauchy'ego), więc istnieje  $f(\omega) := \lim f_n(\omega)$ . Na razie mamy tylko zbieżność punktową, ale przechodząc z  $m$  do granicy przy  $m \rightarrow \infty$  w nierównościach  $|f_k(\omega) - f_m(\omega)| < \epsilon$  otrzymamy  $|f_k(\omega) - f(\omega)| \leq \epsilon$  ( $\forall k \geq n_0, \omega \in \Omega$ ), czyli  $\epsilon$  jest jednostajnym oszacowaniem dla  $|f_k - f|$ , dając  $\|f_k - f\|_\Omega \leq \epsilon$  ( $\forall k \geq n_0$ ) -czyli zbieżność jednostajną  $f_n$  do  $f$ . Pozostaje sprawdzić, że  $f \in C_b(\Omega)$ . Fakt ten wyniknie z następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 7** *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła*

Zamiast dowodu (zastosowanie nierówności trójkąta) przedstawię parę ważnych przykładów i zastosowań tego twierdzenia.

Zauważmy, że gdyby ciąg  $f_n$  funkcji  $f_n(t) = t^n$  był zbieżny jednostajnie na zbiorze  $[0, 1]$ , to jego granica powinna być ciągła i równa granicy punktowej. Ale dla  $0 \leq t < 1$  jest  $f_n(t) \rightarrow 0$ , podczas gdy  $f_n(1) \rightarrow 1$ . Granica punktowa nie jest ciągła i badany ciąg nie jest zbieżny jednostajnie. W podobny sposób możemy czasami wykazać, że zbieżność nie jest jednostajna, nie licząc normy supremowej (co wymaga znajdowania wartości maksymalnej).

Granica ciągu  $f_n(x) = \frac{2}{1+(nx-1)^2}$  jest funkcja nieciągła, równa zero we wszystkich punktach osi  $\mathbb{R}$  z wyjątkiem punktu 0, gdzie wartość wynosi 1.

Nie oznacza to, że zbieżność zawsze musi być jednostajna w przypadku, gdy granica punktowa danego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła (tak jest tylko w szczególnych przypadkach -np. dla ciągów monotonicznych, o ile  $\Omega$  jest zbiorem domkniętym i ograniczonym w  $\mathbb{R}^n$ .)

Na przykład, ciąg  $f_n(x) := nx^n(1-x)$  zmierza do funkcji stałej równej 0 na odcinku  $[0, 1]$ . Ale  $\|f_n\|_{[0,1]} = (\frac{n}{n+1})^{n+1} \rightarrow e^{-1}$ , więc zbieżność nie jest jednostajna. Faktycznie,  $f'(x) = n^2x^{n-1} - n(n+1)x^n = nx^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$  dla  $x = 0$  lub  $x = \frac{n}{n+1}$  (punkt maksimum), więc  $\|f_n\|_{[0,1]} = f_n(\frac{n}{n+1})$ .

Funkcja ciągła może być granicą ciągu funkcji nieciągłych w żadnym punkcie (np. gdy  $f_n = \frac{1}{n}$  dla  $n \in \mathbb{Q}$  oraz  $f_n = 0$  dla  $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , to  $f_n \rightarrow 0$ ).

Jednym z najważniejszych wniosków ze zbieżności jednostajnej na przedziale  $[a, b]$  ciągu funkcji  $f_n \in R[a, b]$  (czyli całkowalnych w sensie Riemanna) jest zbieżność całek. Dzięki sformułowanemu poniżej twierdzeniu będziemy mogli zamieniać kolejność: obliczania granicy ciągu funkcji i obliczania całki, podobnie będzie można całkować szeregi metodą "wyraz po wyrazie" na przedziałach, w których zbieżność szeregu jest jednostajna.

**Twierdzenie 8** *Jeśli  $f_n \rightarrow f_0$  na przedziale  $[a, b]$ , to  $\int_a^b f(t) dt \rightarrow \int_a^b f_0(t) dt$ . Wynika to z liniowości całki oraz z nierówności:*

$$|\int_a^b f(t) dt| \leq (b-a)\|f\|_{[a,b]}.$$

(Wystarczy ją zastosować do  $f = f_0 - f_n$ .)

## 10.1 Zbieżność wraz z pochodnymi

Każda funkcja ciągła na odcinku jest jednostajną granicą pewnego ciągu wielomianów (jest to słynne *twierdzenie aproksymacyjne Weierstrasa*).

Wynika stąd, że w odróżnieniu od ciągłości, różniczkowalność nie zachowuje się po przejściu do granicy w ciągu jednostajnie zbieżnym. Zdefiniujemy więc nieco bardziej restrykcyjne pojęcie zbieżności jednosajnej wraz z pochodnymi. Na przykład, w przestrzeni  $C^1[a, b]$  funkcji klasy  $C^1$  na odcinku  $[a, b]$  (gdzie pochodne na końcach przedziału rozumiemy jako pochodne jednostronne), określmy normę<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jeśli wartość tej normy dla  $f$  wynosi  $C$ , to wszystkie ilorazy różnicowe dla  $f$  są ograni-

$\|f\|_{C^1[a,b]} := |f(a)| + \|f'\|_{[a,b]}$ . Można wykazać, że  $C^1[a, b]$  z taką normą jest przestrzenią Banacha zaś zbieżność w tej normie zachodzi dla ciągu  $f_n$  wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno ciąg  $f_n$  jest zbieżny jednostajnie do  $f$ , jak i ciąg pochodnych:  $f'_n$  zmierza jednostajnie do  $f'$ . Na przestrzeni  $C^k(\Omega)$  funkcji klasy  $C^k$  na odcinku domkniętym  $\Omega = [a, b]$  normę „odpowiedzialną za zbieżność jednostajną wraz z pochodnymi rzędu  $\leq k$ ” jest np. norma

$$\|f\|_{C^k[a,b]} := |f(a)| + |f'(a)| + \dots + |f^{(k-1)}(a)| + \|f^{(k)}\|_{[a,b]}.$$

Ponownie mamy do czynienia z przestrzenią Banacha. Zamiast punktu  $a$  (wiąże się to z pojęciem „warunku początkowego” w równaniach różniczkowych), można zdefiniować normę równoważną (dającą taką samą zbieżność) przy użyciu wartości  $|f^{(j)}(t_0)|$  dla dowolnie wybranego punktu  $t_0 \in [a, b]$ , gdzie  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . Uzasadnienie w przypadku  $k = 1$  naszkicowałem w notce na dole poprzedniej strony.

Najważniejszym narzędziem badania zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych jest następujące twierdzenie, znane jako „test majorant” lub „M-test”.

**Twierdzenie 9** M-TEST WEIERSTRASSA *Jeżeli dla pewnego ciągu  $M_n > 0$  mamy  $\|f_n\|_D \leq M_n$ , zaś  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ , to szereg funkcyjny  $\sum f_n(x)$  jest zbieżny jednostajnie na zbiorze  $D$ .*

Analogiczna teza zachodzi w przestrzeni  $C^k([a, b])$  dla zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi rzędu  $\leq k$ . Wystarczy, by dla pewnego ciągu sumowalnego  $M_n$  było  $\|f_n\|_{C^k[a,b]} \leq M_n$ . Podobna teza zachodzi też dla analogicznej przestrzeni funkcji wielu zmiennych i w dowolnej przestrzeni Banacha.

DOWÓD: Dla uproszczenia, zapiszę dowód oznaczając normę przez  $\|\cdot\|$ . Nasza przestrzeń funkcyjna jest przestrzenią Banacha, więc wystarczy sprawdzić, czy ciąg sum częściowych spełnia warunek Cauchy’ego (s. 38). Dla  $k > m$  mamy  $S_k - S_m = \sum_{m+1}^k x_n$ , więc dzięki nierówności trójkąta, mamy

$$\|S_k - S_m\| = \left\| \sum_{m+1}^k x_n \right\| \leq \sum_{m+1}^k \|x_n\| \leq \sum_{m+1}^k M_n.$$

Ostatnia suma jest różnicą  $k$ -tej i  $m$ -tej sumy częściowej dla szeregu liczbowego zbieżnego:  $\sum M_n$ , z warunku Cauchy’ego dla tego szeregu, jej wartość będzie więc dowolnie mała ( $< \epsilon$ ) dla dostatecznie dużych  $k, m$  (dla  $k > m \geq n_0$ ). Te nierówności dają więc warunek Cauchy’ego, a więc i zbieżność (w sensie normy) dla ciągu  $S_k$ .

Dodajmy, że łatwiej jest oszacować normę wektora, niż ją explicite policzyć, czasami nawet oszacowanie „zgrubsza” wystarczy, należy jednak pamiętać, że im bardziej zwiększymy stałe (majoranty)  $M_n$ , tym łatwiej wykazać, że  $\|x_n\| \leq M_n$ , ale z drugiej strony – tym trudniej zapewnić warunek  $\sum M_n < +\infty$ .

Na przykład, pierwszym z narzucających się oszacowań dla wyrażeń zawierających funkcję sinus w liczniku jest oszacowanie modułu:  $|\sin x| \leq 1$ . Dla szeregu  $\frac{\sin \frac{x}{n}}{n}$  przy  $x \in [0, 1]$  majoranta  $M_n = \frac{1}{n}$  nie jest jednak sumowalna. Trzeba dodatkowo wiedzieć, że  $|\sin t| \leq |t|$ , co daje jednostajne oszacowanie  $|\frac{\sin \frac{x}{n}}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$  -które już wystarcza. Nasz szereg jest więc jednostajnie zbieżny (do jakiejś funkcji ciągłej  $S$  na odcinku  $[0, 1]$ ). Proszę sprawdzić, czy ta  $S$  jest różniczkowalna ( a może dla jakichś  $k \in \mathbb{N}$  jest klasy  $C^k$ ?). Szereg  $\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  jest zbieżny jdnostajnie wraz ze wszystkimi pochodnymi w dowolnym ograniczonym podzbiorze płaszczyzny zespolonej  $\mathbb{C}$ . Jego sumę oznaczamy symbolem

$e^z$  (z tw. Lagrange’a o wartości średniej), więc w dowolnym punkcie  $t \in [a, b]$  jest  $|f(t)| \leq |f(a)| + C(b-a)$ , czyli  $\|f\|_{[a,b]} \leq (1 + (b-a))\|f\|_{C^1[a,b]}$ . Wynikają stąd dwa ważne wnioski: po pierwsze- spełniony jest postulat tożsamości z def. normy, po drugie, gdyby w definicji zamiast składnika  $|f(a)|$  użyć  $|f(t_0)|$  dla dowolnie ustalonego punktu  $t_0 \in [a, b]$ , lub nawet zastąpić ten składnik przez  $\|f\|_{[a,b]}$ , dostaniemy normę równoważną, czyli opisującą taką samą zbieżność. W dowodzie zupełności możemy wykorzystać wykazaną poprzednio zupełność  $C[a, b]$  względem normy  $\|f\|_{[a,b]}$ . Warunek Cauchy’ego da istnienie funkcji ciągłych  $f_0, g_0$  takich, że  $f_n \xrightarrow{\cdot} f_0$  oraz  $f'_n \xrightarrow{\cdot} g_0$ . Jedyne, co pozostaje sprawdzić, to różniczkowalność  $f_0$  oraz równość  $f'_0 = g_0$ . Ale dzięki twierdzeniu Newtona-Leibniza,  $f_n(x) = \int_a^x f'_n(t) dt$  i przejście graniczne w tych równościach daje  $f_0(x) = \int_a^x g(t) dt$ , dzięki twierdzeniu 8



$\exp(z)$ . Dla  $z \in \mathbb{R}$  jest to znana skądinąd funkcja wykładnicza. Różniczkując ten szereg wyraz po wyrazie otrzymamy równość  $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$ .

Pytanie o samą zbieżność szeregu jest zagadnieniem „jakościowym”, niekonstruktywność polega tu na przywołaniu warunku Cauchy’ego. Jeśli  $X$  jest przestrzenią Banacha względem normy  $\|\cdot\|$ , to wiemy jedynie, że istnieje  $S \in X$ -wektor będący sumą szeregu  $\sum x_n$ , czyli taki, że  $\lim \|S_n - S\| = 0$ . Na ogół chcemy jednak wiedzieć coś więcej o tej sumie szeregu. Jest na to sposób- należy prześledzić dowód zupełności przestrzeni. Na przykład, w przestrzeni  $C_b(D)$  funkcja  $S$ , jako granica (jednostajna) ciągu funkcji  $S_n$ , jest również granicą punktową, a wartość w punkcie  $\omega \in D$  jest już okraślona -jako suma szeregu liczbowego  $\sum x_n(\omega)$ . Nie zawsze możemy, niestety, tę ostatnią znaleźć. Czasami taka możliwość pojawi się dopiero dzięki głębszej analizie własności szeregów funkcyjnych, jak zobaczymy na przykładach typu:  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^{-1} = \ln 2$ , czy  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## 11 Szeregi potęgowe. Obszar zbieżności

Szereg funkcyjny  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$  zmiennej (rzeczywistej, lub zespolonej)  $z$ , gdzie  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$  dla pewnych  $a_n \in \mathbb{C}$ , nazywamy *szeregiem potęgowym o współczynnikach  $a_n$  i o środku  $z_0$* . Należy podkreślić, że  $f_0$  jest tu funkcją stałą, równą  $a_0$ . Na przykład, dla  $z_0 = 0$ , gdy  $a_n = a$ ,  $a \neq 0$  jest ciągiem stałym, mamy szereg geometryczny  $\sum az^n$  o ilorazie  $z$ , zbieżny dla  $|z| < 1$  (o sumie  $\frac{a}{1-z}$ ) i rozbieżny dla  $|z| \geq 1$ . Zbiór punktów zbieżności (czyli takich punktów  $z$ , dla których  $\sum f_n(z)$  jest zbieżny) jest więc w tym przypadku kołem otwartym o promieniu 1 na płaszczyźnie zespolonej (o środku w  $z_0$ ).

Jak się okaże, (z dokładnością do pewnych punktów na brzegu), zbiór punktów, w których zbieżny jest szereg potęgowy (taki zbiór nazwiemy *obszarem zbieżności danego szeregu potęgowego*) -będzie kołem o pewnym promieniu  $R$  i o środku w  $z_0$ . Innymi słowy, obszar zbieżności tego szeregu różni się od koła o promieniu  $R$  co najwyżej o pewien podzbiór zbioru  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ . Przyjmujemy tu konwencję, w myśl której takie koło dla  $R = 0$  jest równe  $\{z_0\}$  (wtedy obszar zbieżności redukuje się do tego punktu), zaś dla  $R = +\infty$ , kołem o nieskończenie dużym promieniu jest cała płaszczyzna zespolona  $\mathbb{C}$ .

**Twierdzenie 10** *Dla danego szeregu potęgowego  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  istnieje taka liczba  $R \in [0, +\infty]$  (zwana **promieniem zbieżności** tego szeregu), że*

- dla  $z \in \mathbb{C}$  takich, że  $|z - z_0| < R$  szereg jest zbieżny;
- dla  $|z - z_0| > R$  szereg nasz jest rozbieżny.

Ponadto gdy  $R > 0$ , to w każdym kole  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ , gdzie  $0 < r < R$  zbieżność szeregu jest jednostajna wraz z pochodnymi dowolnego rzędu.

Jeśli istnieje któraś z granic:  $g = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  lub  $\gamma = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ , to  $R = \frac{1}{g}$  (odpowiednio  $R = \frac{1}{\gamma}$ ). Tu przyjmujemy  $\frac{1}{0} = +\infty$ ,  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

Uwaga: Naśladując dowód kryterium d’Alamberta zbieżności szeregu można wykazać, że jeśli tylko istnieje powyższa granica  $g$ , to również istnieje druga z granic:  $\gamma$  i wówczas  $\gamma = g$ . Wynika stąd np., że  $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$ . Promieniem zbieżności  $\sum n!z^n$  jest więc 0, zaś promieniem zbieżności  $\sum \frac{z^n}{n!}$  jest  $+\infty$ , czyli ten ostatni szereg jest zbieżny dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ .

Dla większości ciągów żadna z granic:  $\gamma, g$  nie istnieje. Można wykazać, że w takiej sytuacji wystarczy zastąpić  $\gamma$  przez największą z granic podciągów zbieżnych ciągu  $\sqrt[n]{|a_n|}$ , tak zwaną *granicę górną* tego ciągu, oznaczaną symbolem  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ . Jest to największa spośród liczb  $\gamma$  o tej własności, że  $\gamma_1 < \gamma \Rightarrow (\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_1$  dla nieskończenie wielu  $n$ ). Granica górna jest też równa granicy ciągu monotonicznego  $b_n$ , gdzie  $b_n := \sup\{\sqrt[j]{|a_j|} : j \geq n\} \geq b_{n+1}$ .

W każdym przypadku, jeśli  $\gamma_2 > \gamma$ , to jedynie dla skończenie wielu  $n$  może być  $\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_2$ , czyli wówczas  $|a_n| \leq \gamma_2^n$  dla  $n$  dostatecznie dużych. Jeśli  $|z - z_0| \leq r$ , to  $r\gamma < 1$ , więc dla pewnego  $\gamma_2 > \gamma$  jest  $q := r\gamma_2 < 1$ . Wówczas

dla dostatecznie dużych  $n$  mamy oszacowanie (jednostajne w kole  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ ) postaci  $|a_n(z - z_0)^n| \leq q^n$ . Jest to oszacowanie normy supremowej po tym kole dla funkcji  $f_n(z) := a_n(z - z_0)^n$ . Pochodną z tej funkcji jest  $f'_n(z) = na_n(z - z_0)^{n-1}$ , którą możemy oszacować przez  $nr^{-1}q^n$  (korzystamy tu z faktu, że funkcja  $|f'_n|$  osiąga maksimum w kole  $\{z : |z - z_0| \leq r\}$  na jego brzegu, gdzie  $|z - z_0| = r$ ). Analogiczne oszacowania supremowe dla pochodnych wyższych rzędów -zawsze dają majoranty sumowalne. Zbieżność (jednostajna wraz z pochodnymi) wynika więc z  $M$ -testu Weierstrassa. Podobnie wykazuje się rozbieżność gdy  $|z - z_0| > R$  -wówczas dla pewnego  $\gamma_1 < \gamma$  jest  $\gamma_1|z - z_0| > 1$  i z oszacowania  $\sqrt[n]{|a_n|} > \gamma_1$  dla nieskończonego wielu  $n$  otrzymamy zaprzeczenie warunku koniecznego zbieżności:  $|a_n(z - z_0)^n| > 1$  dla nieskończonego wielu  $n$ .

Jeśli ograniczamy się do  $z, z_0$  rzeczywistych, mówimy o przedziale zbieżności szeregu potęgowego  $\sum a_n(x - x_0)^n$ , dla  $R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$  mamy zbieżność tego szeregu dla  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , rozbieżność dla  $|x - x_0| > R$ . Czy jest to szereg zbieżny, czy nie w końcach tego przedziału -zależy od samego ciągu  $a_n$ . Dla uproszczenia, niech  $x_0 = 0, R = 1$ . Gdy  $\sum a_n$  jest bezwzględnie zbieżny, zaś dla  $|x| > 1$  mamy rozbieżność  $\sum a_n x^n$ , to przedziałem zbieżności jest  $[-1, 1]$ . Dla  $a_n = \frac{1}{n}, a_0 = 0$  przedziałem zbieżności  $\frac{1}{n}z^n$  jest  $[-1, 1)$ , bo dla  $x = 1$  sumą jest  $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ . Dla  $x = -1$  mamy naprzemienny szereg zbieżny. Podobnie, dla  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  -przedziałem zbieżności jest  $(-1, 1]$ . Można wykazać, że można tak dobrać  $a_n$ , by dla żadnej liczby zespolonej  $z$  o module 1 szereg  $\sum a_n z^n$  nie był zbieżny, a obszarem zbieżności -było koło otwarte jednostkowe.

Można wykazać następujące **Twierdzenie Abela**: Jeżeli szereg potęgowy o środku  $x_0$  i promieniu zbieżności  $R \in (0, +\infty)$  jest zbieżny w którymś z punktów  $x_0 \pm R$  (na krańcu przedziału zbieżności), to jego suma jest funkcją ciągłą w tym punkcie, szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinku łączącym ten punkt z punktem  $x_0$ .

Jako zastosowanie, możemy wykazać, że  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ . Promień zbieżności szeregu potęgowego geometrycznego  $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_0^{\infty} (-x)^n$  wynosi 1, więc w przedziałach  $[-r, r]$  dla  $r < 1$  jego zbieżność jest jednostajna i możemy tam całkować szereg wyraz po wyrazie, otrzymując dla  $0 < x < 1$  rozwinięcie  $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_0^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_0^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ . Z twierdzenia Abela wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \sum_1^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

co daje naszą równość.

Szereg potęgowy  $\sum_0^{\infty} (-x^2)^n$  o sumie  $\frac{1}{1+x^2}$  możemy całkować stronami na przedziałach  $[0, x]$  dla  $|x| < 1$ , otrzymując rozwinięcie  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctg x$ . Dzięki twierdzeniu Abela ten wzór możemy też stosować w punkcie  $x = 1$ , otrzymując ciekawe przedstawienie liczby  $\pi$ :

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

## 11.1 Szereg Taylora i Maclaurina

Jak widać, niektóre funkcje można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego stosując całkowanie lub różniczkowanie szeregu potęgowego geometrycznego  $\sum x^n$  (z ewentualnymi podstawieniami w miejsce zmiennej  $x$  jakiegoś prostego wielomianu). Ale w ogólnym przypadku niełatwo jest znaleźć tą metodą współczynniki rozwinięcia. Na szczęście, jest inny sposób: Przypuśćmy, że promień zbieżności dla szeregu  $s(x) := \sum a_n(x - x_0)^n$  jest dodatni. Podstawianie wartości  $x = x_0$  do tego rozwinięcia funkcji  $s(x)$  a następnie do jej pochodnych rzędu  $k$  daje równości:  $s(x_0) = a_0, s'(x_0) = a_1, \dots, s^{(k)}(x_0) = k!a_k$ , gdyż w takim rozwinięciu wszystkie -z wyjątkiem jednego (dla  $n = k$ ) składniki zerują się w punkcie  $x_0$ . Jeśli więc tylko  $f(x)$  jest sumą typu  $s(x)$  -czyli sumą jakiegoś szeregu potęgowego zbieżnego w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  do  $f$ , to musi

już być  $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ . Szereg potęgowy o takich współczynnikach nazwiemy *szeregiem Taylora* w punkcie  $x_0$  dla funkcji  $f$ . W przypadku  $x_0 = 0$  szereg taki nazywamy *szeregiem Maclaurina*. Jeśli tylko 0 należy do wnętrza dziedziny  $f$ , to najprostszą i najczęściej używaną jest właśnie taka postać. Rzecz jasna, wymaga to znajomości poszczególnych pochodnych w punkcie 0. Dla niektórych funkcji są na to proste wzory: np. dla  $f(x) = e^x$  wszystkie pochodne są równe  $e^x$ , a w zerze przyjmują wartość 1. Dla funkcji sinus pochodne rzędu  $k$  w zerze zerują się dla  $k$  parzystych i są równe  $(-1)^m$  dla  $k = 2m + 1$ . Podobnie,  $\cos^{(k)}(0) = (-1)^j$  gdy  $k = 2j$ ,  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , zerując się dla  $k$  nieparzystych. Tu promieniem zbieżności jest  $+\infty$ . Dla funkcji  $\ln(1+x)$  promień zbieżności szeregu Maclaurina wynosi 1. Można wykazać, że wszystkie te szeregi mają sumy równe rozwijanym funkcjom, choć niełatwy dowód pominiemy. Można więc zapisać:

$$e^x = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Teraz wyjaśnię, dlaczego wprowadziłem na początku symbol  $s(x)$  dla sumy szeregu potęgowego. Może się zdarzyć, że promień zbieżności szeregu Taylora wynosi  $+\infty$ , lecz mimo to  $f(x) \neq s(x)$  dla  $x \neq x_0$ .

**Przykład** Tak jest w przypadku funkcji  $\phi(x) := \exp(-\frac{1}{x^2})$  dla  $x \neq 0$ , oraz  $\phi(0) := 0$ . Wszystkie jej pochodne w punkcie 0 istnieją (na wykładzie wykazałem to dla  $k = 1$ , lecz są równe zero, więc szereg Maclaurina dla  $\phi$  ma same zerowe współczynniki,  $s(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Natomiast  $\phi(x) > 0$  dla  $x \neq 0$ .

Nasuwa się pytanie: „kiedy jest źle, a kiedy dobrze” w sensie równości pomiędzy funkcją klasy  $C^\infty$  i jej sumą szeregu Taylora? Odpowiedź wymaga osobnej teorii, podamy jedynie definicję:

**Definicja** Mówimy, że funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest *analityczna* (dokładniej,  $\mathbb{R}$ -analityczna) na zbiorze otwartym  $D \subset \mathbb{R}$ , jeżeli dowolny punkt  $x_0 \in D$  ma otoczenie, w którym  $f$  jest równa sumie jakiegoś szeregu potęgowego. (Jak już wiemy, ten szereg musi być wówczas jej szeregiem Taylora.)

Ponieważ szereg potęgowy (mając wówczas dodatni promień zbieżności  $R$ ) jest zbieżny także poza osią rzeczywistą, dla  $z \in \mathbb{C}$  leżących w kole  $|z - x_0| < R$ , funkcje analityczne można przedłużyć na pewne otoczenie  $\Omega$  zbioru  $D$  na płaszczyźnie zespolonej  $\mathbb{C}$ . Gdy  $R = \infty$ , (np. dla  $\exp, \sin, \cos$ , sumując szereg Taylora otrzymamy przedłużenie tych funkcji dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ . Porównując szeregi Maclaurina dla funkcji  $\exp(ix), x \in \mathbb{R}$  z rozwinięciami funkcji trygonometrycznych, Euler doszedł do swego słynnego wzoru:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Funkcje analityczne na otwartych podzbiorach  $\Omega$  płaszczyzny zespolonej definiujemy analogicznie -jako równe sumie szeregów potęgowych w pewnych otoczeniach (w  $\mathbb{C}$ ) każdego punktu ze zbioru  $\Omega$ . Aby odróżniać te funkcje, zmienna w przypadku rzeczywistym oznaczamy symbolem  $x, t$  lub  $\phi$ , zaś w przypadku zespolonym -jednym z symboli:  $z, w, \lambda, \zeta$ . Można wykazać, że poza przypadkiem funkcji stałych, funkcja analityczna  $f(z)$  nie może przyjmować wyłącznie wartości rzeczywistych w otoczeniu (zespolonym) żadnego punktu. Ponadto przedłużenia analityczne funkcji  $\mathbb{R}$ -analitycznych na dany obszar  $\Omega$ , o ile istnieją, są wyznaczone jednoznacznie.

Możemy utożsamiać  $\mathbb{C}$  z  $\mathbb{R}^2$ . Zapisując  $u = \operatorname{Re} f, w = \operatorname{Im} f, x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ , możemy traktować  $f$  jako funkcję 2 zmiennych rzeczywistych  $(x, y) \in \Omega$  o wartościach  $(u(x, y), v(x, y))$  w  $\mathbb{R}^2$ . Wówczas para funkcji  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  klasy

$C^1$  stanowi części: rzeczywistą i urojoną pewnej funkcji analitycznej wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają one w każdym punkcie zbioru  $\Omega$  tzw. *Równania Cauchy'ego - Riemanna*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Innym warunkiem równoważnym jest istnienie w każdym punkcie  $z_0 \in \Omega$  granicy przy  $|z - z_0| \rightarrow 0$  z ilorazów różnicowych:  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ , nazywanej pochodną zespoloną w tym punkcie i oznaczanej symbolem  $f'(z)$ .

Analityczne są np. wielomiany postaci  $p(z) = \sum_0^k a_k z^k$ , funkcje wykładnicze, trygonometryczne powstałe przez rozszerzenie odpowiednich funkcji  $\mathbb{R}$ -analitycznych na pewne obszary w  $\mathbb{C}$ .

Suma, iloczyn, iloraz (poza miejscami zerowymi mianownika) dwu funkcji analitycznych w  $\Omega$  jest również analityczna. Również funkcje odwrotne do iniekcji analitycznych są analityczne. Przy tym obraz zbioru otwartego w  $\mathbb{C}$  przez funkcję analityczną różną od stałej - jest zawsze otwarty.

Można wykazać, że gdy jakieś koło  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  zawiera się w dziedzinie funkcji analitycznej, to promień zbieżności jej szeregu Taylora w punkcie  $z_0$  wynosi nie mniej, niż  $R$ . Jest więc inaczej, niż w  $\mathbb{R}$ . Na przykład, dziedziną funkcji  $\mathbb{R}$ -analitycznej  $\frac{1}{1+x^2}$  jest  $\mathbb{R}$ , lecz promień jej szeregu Maclaurina wynosi 1, gdyż w takiej odległości od punktu 0 znajdują się liczby  $\pm i$  -miejsca zerowe mianownika. (Jednoznaczny przedłużeniem analitycznym jest tu funkcja  $\frac{1}{1+z^2}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ , jej dziedzina nie może objąć tych miejsc zerowych mianownika, bo np. przy  $|z - i| \rightarrow 0$  mamy  $|f(z)| \rightarrow +\infty$ .)

## 12 Szeregi Fouriera

Oprócz rozwinięcia w szereg potęgowy, możemy rozważać rozwinięcie w tzw. szereg Fouriera. O ile szereg potęgowy przedstawić może jedynie bardzo regularne funkcje (funkcje analityczne), to szeregi Fouriera reprezentować mogą znacznie szerszą klasę (funkcje niekoniecznie ciągłe na przedziale). Szeregi Fouriera stanowią podstawowe narzędzie w analizie sygnałów, ich znaczenia dla rozwoju techniki (a także matematyki) nie sposób przecenić. Jedną z różnic będzie sposób, w jaki będzie badana zbieżność szeregu. Do opisu zbieżności posłużymy się pojęciem normy średniokwadratowej, która okaże się właściwym narzędziem do badania zbieżności szeregów Fouriera. Najpierw jednak określimy, jakie funkcje będziemy rozwijali w szeregi Fouriera.

### 12.1 Funkcje okresowe

Rozważać będziemy funkcje zmiennej rzeczywistej, określone na odcinku  $[a, b]$ . Najczęściej będzie to przedział  $[0, 1]$ ,  $[0, 2\pi]$  lub  $[-\pi, \pi]$ . Przy tak ustalonym przedziale  $[a, b]$  o długości  $d := b - a$  będziemy mówili, że *funkcja*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (lub  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  *jest okresowa*, gdy  $f(x + d) = f(x)$ , co w przypadku  $f$  określonej na  $[a, b]$  oznacza jedynie równość  $f(a) = f(b)$ ). Każdą funkcję określoną na przedziale  $[a, b]$  (jak również każdą funkcję okresową  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  można jednoznacznie przedłużyć do funkcji okresowej na całej osi rzeczywistej. Jeśli  $x \in \mathbb{R}$ , to istnieje  $k \in \mathbb{Z}$  taka, że  $x - kd \in [a, b]$  i wystarczy jako  $f(x)$  przyjąć wartość  $f(x - kd)$ .

W przypadku odcinka  $[0, 2\pi]$  najważniejsze przykłady funkcji okresowych, to  $f_n(t) = \sin(nt)$ ,  $g_n(t) = \cos(nt)$ ,  $e_k(t) = e^{ikt}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Funkcje  $e_k$  tworzą tzw. *zespolony układ trygonometryczny*, zaś  $f_n, g_n$  -rzeczywisty układ trygonometryczny. (Zauważmy, że  $\text{Re}(e_n) = g_n$ ,  $\text{Im}(e_n) = f_n$ ,  $g_0$  jest funkcją stałą równą 1, funkcji  $f_0$  równej stale zero nie zaliczamy do układu.) Fourier zaproponował, by każdą funkcję okresową  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  przedstawić

przy użyciu rzeczywistego szeregu (szereg trygonometryczny) postaci

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt),$$

lub w postaci zespolonego szeregu Fouriera

$$c_n e^{int}.$$

Jeśli traktujemy te szeregi jako szeregi formalne, to (również formalne) działania algebraiczne, czy operacje różniczkowania, lub całkowania będą dostarczać prostych wzorów, równania różniczkowe przekształcimy w równania algebraiczne dla poszczególnych współczynników. Cała trudność polega na zagadnieniu zbieżności takich szeregów. Jednostajną zbieżność otrzymamy jedynie dla funkcji okresowych klasy  $C^1$ , jednak najważniejsze są szeregi funkcji mniej regularnych, tam nawet zbieżność punktowa może nie mieć miejsca. Zdefiniujemy normę najbardziej odpowiednią dla naszych celów.

## 12.2 Norma $L^2$ (średniokwadratowa)

Jeśli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest całkowalna w sensie Riemanna, niech

$$\|f\|_2 := \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Taki sam wzór możemy zastosować dla funkcji zespolonej  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , o ile jej kwadrat modułu jest całkowalny (wystarczy, by części: rzeczywista i urojona z  $f$  były całkowalne). Taką normę nazywamy  $L^2$ -normą, lub normą średniokwadratową. Nazwę można uzasadnić zwłaszcza w przypadku, gdy długość przedziału  $b - a$  wynosi 1. Wówczas całka jest faktycznie średnią wartością z funkcji podcałkowej po przedziale  $[a, b]$ , licząc tę normę bierzemy wtedy średnią całkową z kwadratu modułu funkcji  $f$ . (Zbieżność względem analogicznej normy:  $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$ , czyli warunek  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  nazywa się czasami „przeciętną zbieżnością” lub zbieżnością w średniej. To uśrednianie jest typowe dla naszego postrzegania. Na przykład, patrząc na obraz nie widzimy poszczególnych punktów, bo te mają „rozmiar zerowy”, lecz średnie nasycenie i jasność konkretnych barw w danych (możliwe, że bardzo małych) obszarach danego obrazu. Podobnie analizujemy dźwięki w danych przedziałach czasowych. W „punkcie czasowym” nie moglibyśmy np. odczuć wysokości tonu (częstotliwości dźwięku). Odpowiedź na to, dlaczego używamy wykładnika 2, a nie 1 lub 4 przyjdzie nieco później - ma ona pewien związek z twierdzeniem Pitagorasa i z regułą równoległoboku, w naszych rozważaniach będziemy stosować geometrię euklidesową.

Czy jednak  $\|\cdot\|_2$  jest rzeczywiście normą? Za chwilę zobaczymy, że zachodzi nierówność trójkąta:  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ . Warunek jednorodności:  $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2$  jest oczywisty, gdyż stałą  $|\alpha|$  można wyłączyć przed znak całki. W przypadku funkcji ciągłych to faktycznie jest norma, bo postulat tożsamości:  $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = 0$  można w przypadku  $f$  ciągłej dość łatwo wykazać (metodą nie wprost). Ale rozważamy też funkcje nieciągłe i wtedy niestety, są dwa poważne mankamenty:

- postulat tożsamości a ogół nie zachodzi;
- przestrzeń  $R[a, b]$  z  $\|\cdot\|_2$  normą nie jest zupełna.

Są jednak „standardowe procedury” pozwalające ominąć te niedogodności: Utożsamiamy każde dwie funkcje  $f_1, f_2$ , dla których  $\|f_1 - f_2\|_2 = 0$ . Jest to proces tworzenia przestrzeni ilorazowej względem tak określonej relacji. Jest to relacja równoważności: przechodniość wynika z nierówności trójkąta, zaś symetria -z jednorodności normy. Na szczęście, ta relacja jest zgodna ze strukturą wektorową: (np. zgodność z dodawaniem oznacza, że gdy  $\|f_1 - f_2\|_2 = 0$

oraz  $\|g_1 - g_2\|_2 = 0$ , to sumy:  $h_1 := f_1 + g_1$  oraz  $h_2 := f_2 + g_2$  są równoważne, czyli  $\|h_1 - h_2\|_2 = 0$ ). Ponadto wówczas iloczynny przez dany skalar  $\alpha$  funkcji  $f_1, f_2$  są równoważne i normy  $\|f_1\|_2$  oraz  $\|f_2\|_2$  są równe, co pozwala przypisać taką wartość całej klasie równoważności (lub, jak kto woli, klasie abstrakcji), czyli zbiorowi  $[f]$  wszystkich funkcji równoważnych z daną  $f \in R[a, b]$ . Tak więc  $\|[f]\|_2 := \|f\|_2$ . W ten sposób odzyskamy postulat jednoznaczności -w przestrzeni wektorowej złożonej z takich klas, gdzie definiujemy działania  $[f] + [g] := [f + g], \alpha[f] := [\alpha f]$ . Łatwo wykazać, że tak zdefiniowane działania spełniają aksjomaty przestrzeni wektorowej. Wektorem zerowym jest tu klasa równoważności funkcji stałej 0, czyli zbiór  $[0] = \{f \in R[a, b] : \|f\|_2 = 0\}$ . Na przykład, funkcja równa 1 w punkcie  $a$  i w punkcie  $b$ , zaś równa zero wewnątrz naszego odcinka jest okresowa, całkowalna, należy do  $[0]$  (proszę sprawdzić). W praktyce klasę równoważności funkcji  $f$  zapisuje się takim samym symbolem  $f$ , co jest wygodne, lecz należy uważać, gdyż nie można w takim przypadku podać wartości  $f$  w danym punkcie. Jedyne, co można wtedy określić, to „wartości przeciętne na zbiorze (miary dodatniej)”. Jeśli w klasie  $[f]$  jest funkcja ciągła  $f_0$ , to jest ona wyznaczona jednoznacznie i wtedy jej wartości będą „najbardziej reprezentatywne” dla klasy  $[f]$  (o ile taka  $f_0$  jest okresowa).

Drugi problem jest znacznie poważniejszy: okazuje się, że można albo dokonać abstrakcyjnej konstrukcji rozszerzenia do przestrzeni zupełnej (tzw. uzupełnienie przestrzeni), albo rozszerzyć pojęcie całkowalności -wprowadzając tzw. całkowalność w sensie Lebesgue’a.

Uzupełnienie można uzyskać biorąc zbiór klas równoważności ciągów Cauchy’ego względem naszej normy. Ciągi  $(f_n), (g_n)$  uznaje się tu za równoważne, jeżeli  $\lim \|f_n - g_n\|_2 = 0$ . Ciągi takie dodajemy „wyraz po wyrazie”, otrzymując dodawanie wektorowe dla odpowiadających im klas. Normę klasy  $[(f_n)]$  definiujemy jako  $\lim \|f_n\|_2$ . Można wykazać, że te klasy równoważności tworzą przestrzeń Banacha. Szczegóły pomijam. Otrzymana przestrzeń Banacha, oznaczana symbolem  $L^2[a, b]$ , jest przestrzenią zawierającą klasy równoważności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna (względem relacji równoważności  $\|f_1 - f_2\|_2 = 0$ ) i do takich funkcji będziemy się w dalszym ciągu ograniczali.

(Cały dotychczasowy fragment materiału z tego podrozdziału, z wyjątkiem definicji  $\|f\|_2$  jest nadobowiązkowy, ma ułatwić korzystanie z bardziej zaawansowanej literatury.)

Kluczowe znaczenie odgrywa iloczyn skalarny. Dla  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  całkowalnych w sensie Riemanna definiujemy go wzorem

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (25)$$

Przestrzeń wektorową z iloczynem skalarnym nazywamy *przestrzenią Hilberta*, jeśli jest ona zupełna względem normy  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . Przestrzeń  $R[a, b]$  nie jest zupełna, ale jej rozszerzenie:  $L^2[a, b]$  już jest przestrzenią Hilberta. Będziemy jednak starali się ograniczać do funkcji całkowalnych w sensie Riemanna.

Oznaczeń  $f \cdot g, f \circ g$  nie możemy stosować dla iloczynu skalarnego funkcji  $f, g$ , bo pierwsze oznacza funkcję ( $[a, b] \ni t \rightarrow f(t)g(t)$ ), drugie jest symbolem złożenia funkcji. W wielu podręcznikach zamiast nawiasu graniastego, używa się zwykłych nawiasów, co moim zdaniem może mylić się z parą uporządkowaną  $(f, g)$ . W przypadku rzeczywistym kreska oznaczająca sprzężenie zespolone nie musi występować, operacja sprzężenia nie zmienia liczby rzeczywistej.

### Własności iloczynu skalarnego:

- liniowość względem pierwszej zmiennej:

$$\langle \alpha\phi + \beta\psi, g \rangle = \alpha\langle \phi, g \rangle + \beta\langle \psi, g \rangle;$$

- „skośna symetria”:  $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$  (w przypadku rzeczywistym jest to zwykła symetria);

- dodatniość:  $\langle f, f \rangle \geq 0$ , przy czym równość mamy wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  jest równoważna ze stałą funkcją zero (tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy zerowa jest miara Lebesgue'a zbioru tych  $t \in [a, b]$ , dla których  $f(t) = 0$ .)

Normę średniokwadratową wyliczamy ze wzoru

$$\|f\|_2 = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{czyli} \quad \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle.$$

Nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza ma postać

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

i jej dowód w przypadku rzeczywistym przedstawiłem wcześniej (w oparciu o własności iloczynu skalarnego). Wynika z niej nierówność trójkąta dla normy  $\|\cdot\|_2$  (też wykazana poprzednio na stronie 17). Jak łatwo przeliczyć,  $\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|_2^2$ . Stąd otrzymujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$\langle f, g \rangle = 0 \Rightarrow \|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2.$$

Mówimy, że wektory  $f, g$  są ortogonalne, czyli prostopadłe względem danego iloczynu skalarnego  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , gdy  $\langle f, g \rangle = 0$ . Fakt ten oznaczamy zapisując  $f \perp g$ .

Zauważmy, że gdy  $f \perp g$ , to również  $g \perp f$ , natomiast relacja  $f \perp f$  może zachodzić jedynie dla  $f = 0$ .

**Definicja** Układ wektorów  $(f_j)_{j \in J}$  nazwiemy *układem ortogonalnym*, gdy  $j \neq k \Rightarrow f_j \perp f_k$ . Układ ortogonalny wektorów o normie 1 nazwiemy *układem ortonormalnym*. Układ  $(e_j)_{j \in J}$  w przestrzeni  $H$  z iloczynem skalarnym nazwiemy *bazą ortonormalną*, gdy jest to taki układ ortonormalny, że jedynym wektorem prostopadłym do wszystkich  $e_j$  jest wektor zerowy:

$$(\forall_{j \in J} f \perp e_j) \Rightarrow f = 0. \quad (26)$$

Warunek ten, znany jako *warunek zupełności układu* jest równoważny temu, by każdy element  $f \in H$  z dowolną dokładnością dał się przybliżyć kombinacjami liniowymi wektorów  $e_j$ .

**Twierdzenie 11** W każdej przestrzeni Hilberta istnieją bazy ortonormalne. W przestrzeniach  $L^2(a, b)$  istnieją bazy przeliczalne  $(e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Co więcej, każdy wektor  $f \in H$  ma w takiej bazie dokładnie jedno rozwinięcie w tzw. abstrakcyjny szereg Fouriera postaci

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(f) e_j, \quad \text{gdzie} \quad c_j(f) = \langle f, e_j \rangle. \quad (27)$$

Równość  $S = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j$ , zapisywana też jako  $S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_j$  oznacza tu dla  $g_j \in H$ , że skończone sumy częściowe  $S_k := \sum_{j=-k}^k g_j$  zbiegają do wektora  $S$  względem normy, czyli

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_M \forall_{k \geq M, k \in \mathbb{N}} \|S - S_k\|_2 < \epsilon.$$

Zwróćmy uwagę, że sumy są nieskończone, nie jest to więc zwykła baza algebraiczna, z jaką mieliśmy np. do czynienia w  $\mathbb{R}^n$  (tam baza kanoniczna zero-jedynkowa jest, faktycznie ortonormalna i np. dla  $n = 3, f = (x, y, z)$  mamy  $c_1(f) = x, c_2(f) = y, c_3(f) = z, e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ ). Pojęcie bazy algebraicznej, gdzie każdy wektor z przestrzeni jest skończoną kombinacją liniową wektorów bazowych, w przypadku przestrzeni funkcyjnych, jest nieodpowiednie (w przestrzeniach zupełnych takie bazy powinny być nieprzeliczalne!)

Zauważmy tylko parę istotnych dla dowodu faktów: iloczyn skalarny jest ciągle względem pierwszej współrzędnej w normie  $\|\cdot\|_2$ , bo z nierówności Schwarza, mamy  $|\langle f_1, e \rangle - \langle f_2, e \rangle| = |\langle f_1 - f_2, e \rangle| \leq \|f_1 - f_2\|_2 \|e\|_2$ . Jeśli więc istnieje  $S :=$

$\lim S_k$ , to  $\langle S, e_n \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle S_k, e_n \rangle$ . Ale dla sum częściowych naszego szeregu Fouriera (27), dzięki liniowości iloczynu skalarnego wzgl. pierwszej zmiennej, mamy  $\langle S_k, e_n \rangle = \sum_{j=-k}^k c_j(f) \langle e_j, e_n \rangle = c_n(f)$  dla  $k > |n|, n \in \mathbb{Z}$ . Jest to więc ciąg stały od pewnego miejsca i faktycznie, mamy wówczas  $\langle S, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle$ . Odejmując stronami, otrzymamy  $\langle S - f, e_n \rangle = 0$ , czyli relację prostopadłości  $S - f \perp e_n$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{Z}$ . Warunek zupełności układu  $(e_n)$  da wówczas równość  $S = f$ . Wystarczy więc tylko jeszcze sprawdzić, że faktycznie ciąg  $S_k$  sum częściowych szeregu (27) jest zbieżny, do czego wystarczy, by zachodził warunek Cauchy'ego (tu jest jedyne miejsce, w którym korzystamy z zupełności  $H$ ). Ponieważ jak łatwo zauważyć, również  $S_k - f \perp e_n$ , a w konsekwencji,  $f - S_k \perp S_k$ , z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy  $\|f\|^2 = \|f - S_k\|^2 + \|S_k\|^2 \geq \|S_k\|^2 = \sum_{j=-k}^k |c_j(f)|^2$ . Dowodzi to zbieżności szeregu kwadratów norm współczynników  $f$  względem naszej bazy. Ponieważ  $c_j(f) = \langle f, e_j \rangle$ , wynika stąd też ważne oszacowanie, które wykazał Bessel:

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{dla wszystkich } f \in H. \quad (28)$$

Zachodzi ono nie tylko dla baz, ale i dla dowolnych układów ortonormalnych. Z niego wynika też warunek Cauchy'ego dla ciągu  $S_k$ : dla  $m > k$  mamy  $\|S_m - S_k\|^2 = \|\sum_{k < |j| \leq m} c_j(f) e_j\|^2 = \sum_{k < |j| \leq m} |c_j(f)|^2 < \epsilon$  dla  $k$  dostatecznie dużych,  $m > k$ . (Ostatnia z równości wynika z twierdzenia Pitagorasa dla wzajemnie prostopadłych wektorów  $c_j(f) e_j, j = k + 1, k + 2, \dots, m$  i z równości  $\|c_j(f) e_j\| = |c_j(f)|$ .)

Ponieważ  $\|f\| = \lim \|S_k\|$  (bo norma jest ciągła), otrzymujemy z tego rozumowania również relację zwaną *tożsamością Parsevala*:

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad \text{dla wszystkich } f \in H. \quad (29)$$

. Uwaga: Gdyby układ  $(e_j)$  nie był zupełny, to rozwinięcie  $f$  w szereg Fouriera (27) byłoby nadal możliwe -ale jedynie dla tych wektorów  $f$ , dla których zachodzi tożsamość (29), a to są dokładnie takie wektory, które należą do domkniętej podprzestrzeni generowanej przez zbiór  $E = \{e_j : j \in \mathbb{Z}\}$  elementów danego układu ortonormalnego.

Przykładem na układ niezupełny jest tzw. ciąg funkcji Rademachera. Jest to układ funkcji przyjmujących jedynie dwie wartości  $-1, 1$  na odcinku  $[0, 1]$ :  $e_0(t) = 1 (\forall t)$ ,  $e_1(t) = 1$  dla  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $e_1(t) = -1$  dla  $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Jeśli  $e_1$  przedłużymy do funkcji okresowej na całej osi  $\mathbb{R}$ , to niech  $e_2(t) = e_1(2t), \dots, e_j(t) = e_1(2^{j-1}t), t \in [0, 1]$ .

## 13 Klasyczne szeregi Fouriera

Dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  całki z funkcji  $s_k(x) := \sin(kx)$ ,  $c_k(x) := \cos(kx)$  po przedziale  $[0, 2\pi]$  (jak również po przedziale  $[-\pi, \pi]$ ) są równe zero z jednym wyjątkiem: dla  $k = 0$  funkcja  $c_0$  jest stała, równa 1. Oczywiście,  $s_0 = 0, s_{-k} = -s_k, c_{-k} = c_k$ , więc ze znanych wzorów trygonometrycznych:

$$2s_m c_n = s_{m-n} + s_{m+n}, 2s_m s_n = c_{m-n} - c_{m+n}, 2c_m c_n = c_{m-n} + c_{m+n}$$

wynika, że dla  $m \neq n, m, n \in \mathbb{Z}$  iloczyny skalarne:

$$\langle c_m, s_n \rangle, \langle c_m, c_n \rangle, \langle s_m, s_n \rangle$$

są równe zero (ortogonalność układu). Dla  $n \in \mathbb{N}$  mamy zaś

$$\langle c_m, c_m \rangle = \pi \quad \text{oraz} \quad \langle s_n, s_n \rangle = \pi.$$

Ponadto dla funkcji stałej  $c_0$  jest  $\langle c_0, c_0 \rangle = 2\pi$ .

Jak można wykazać, układ utworzony przez funkcje  $c_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  oraz  $s_n, n \in \mathbb{N}$  jest układem zupełnym. Nazywamy go *układem trygonometrycznym*. Jest on ortogonalny, lecz normy średniokwadratowe jego elementów (z wyjątkiem  $c_0$ ) wynoszą  $\sqrt{\pi}$ . Jego pierwsza część, utworzona przez funkcje  $\cos(nx)$



rozpina podprzestrzeń funkcji okresowych parzystych w  $L^2[-\pi, \pi]$ , druga -może służyć do rozwinięcia dowolnej funkcji nieparzystej. Ponieważ układ jest nie-ormonowany, aby skorzystać z ogólnej teorii szeregów Fouriera, należy go normować. Niech

$$\tilde{c}_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_0, \quad \tilde{s}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}}s_n, \quad \tilde{c}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}}c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas współczynniki Fouriera funkcji okresowej  $f : [-\pi, \pi]$  dla  $n \in \mathbb{N}$  są równe:

$$\tilde{a}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \tilde{b}_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

zaś  $\tilde{a}_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ . Ponieważ chcemy dojść do rozwinięcia postaci  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_n c_n + b_n s_n$ , zaś z twierdzenia 11 dla bazy ortonormalnej  $\tilde{c}_n, \tilde{s}_n$  mamy  $f = \tilde{a}_0 \tilde{c}_0 + \sum_1^{\infty} \tilde{a}_n \tilde{c}_n + \tilde{b}_n \tilde{s}_n$ , otrzymujemy

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (30)$$

Są to tak zwane *Wzory Fouriera-Eulera* dla współczynników rozwinięcia funkcji  $f \in L^2[-\pi, \pi]$  w szereg Fouriera:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Tożsamość Parsewala daje relację  $\|f\|_2^2 = |\tilde{a}_0|^2 + \sum_1^{\infty} |\tilde{a}_n|^2 + |\tilde{b}_n|^2$ , co daje jej „klasyczną postać”:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (31)$$

Dla  $n = 0$ , wyliczając  $a_0$ , chcemy (i możemy) użyć tego samego wzoru, bo  $c_0(x) = \cos(0x) = 1 \forall x$ . W tym przypadku łatwo się pomylić, bo w abstrakcyjnym szeregu Fouriera występował składnik  $\tilde{a}_0 \tilde{c}_0$ , zaś w naszym rozwinięciu używamy  $\frac{a_0}{2} c_0$ , czyli  $\frac{a_0}{2}$ . Dla  $n = 0$  współczynnik  $a_n$  we wzorze (30) nie jest, jak w przypadku pozostałych  $n$  -iloczynem skalarnym  $f$  przez funkcje  $c_n$  (odp.  $s_n$ ) podzielonym przez kwadrat  $L^2$ - normy  $c_n$  (odp.  $s_n$ ) równy  $\pi$ , gdyż taki kwadrat normy dla  $c_0$  jest równy  $2\pi$ . Jeśli chcemy ujednolicić powstać wzorów Eulera-Fouriera, to w samym rozwinięciu Fouriera musimy za  $a_0$  przyjąć nie składnik stały, lecz jego podwojoną wartość:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Uwaga: W rozwinięciu  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  w szereg Fouriera zbieżność (sum częściowych tego szeregu do  $f$ ) jest średniokwadratowa. W ogólnym przypadku ciągi zbieżne średniokwadratowo nie muszą być zbieżne punktowo nawet w sensie zbieżności „prawie wszędzie”, jedynie pewne ich podciągi muszą być zbieżne prawie wszędzie. Dopiero w latach 60. XX wieku matematyk szwedzki, Lennart Carleson (laureat Nagrody Abela) wykazał, że szereg Fouriera funkcji całkowalnej z kwadratem jest zbieżny do tej funkcji prawie wszędzie. Można wykazać, że dla  $f$  okresowej, klasy  $C^1$  zbieżność szeregu do  $f$  jest jednostajna.

Jeśli, na przykład, rozwiniemy funkcję  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  (nie jest ona okresowa, bo  $f(2\pi) = -\frac{3}{4}\pi \neq f(0)$ ), otrzymamy współczynniki  $a_0 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $a_n = 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ . Norma średniokwadratowa podniesiona do kwadratu wyniesie  $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} (\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{4}) \, dx = \pi^3 (\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{8}{12}) = \pi^3 (\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$ , co łatwo wyliczyć, więc z tożsamości Parsewala (31),

$\pi^3(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}) = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2})^2 + \pi \sum \frac{1}{n^2}$ . Z tej równości, skracając, otrzymamy wykazaną przez Eulera tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Jednym z typowych zadań sprawiającym z początku pewien kłopot interpretacyjny, jest polecenie rozwinięcia danej funkcji  $f : [0, \pi]$  w szereg cosinusów (odp. w szereg sinusów). Chodzi tu o szeregi  $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos nt$  (odp.  $\sum_1^{\infty} b_n \sin nt$ ). Jak tę samą funkcję można rozwinąć w 2 różne szeregi, czy nie kłóci się to z zasadą jednoznaczności rozwinięć? Otóż, nie. Zagadnienie polega na tym, że funkcja nie jest określona na przedziale długości  $2\pi$ , a taką sugeruje długość okresu funkcji z układu trygonometrycznego. Aby mówić o parzystości/nieparzystości -powinniśmy mieć dziedzinę symetryczną wzgl. zera, czyli przedział  $[-\pi, \pi]$ . Funkcje mające szereg Fouriera czysto cosinusowy ( $b_n = 0 \forall n$ ) muszą być parzyste, wówczas całki we wzorach na współczynniki wystarczy liczyć po przedziale  $[0, \pi]$ , wynik mnożąc przez 2. Dokładniej, będzie  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt$ . Podobnie, rozwinięcie w szereg sinusów implikuje nieparzystość. Iloczyn dwu funkcji nieparzystych (u nas:  $f(t) \sin(nt)$  jest parzysty, więc w rozwinięciu  $f$  w postaci  $\sum_1^{\infty} b_n \sin nt$  mamy  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt$ .

Rozwijając np. funkcję  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  rozważaną przed chwilą - tym razem w szereg sinusów w przedziale  $[0, \pi]$ , otrzymamy inne, niż poprzednio, rozwinięcie:  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2n} \sin(2nt)$  dla  $0 < x < \pi$ .

Funkcja  $f(t) = t$  jest nieparzysta w całym  $[-\pi, \pi]$ , tam (poza końcami przedziału, jest sumą szeregu  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nt$ . Natomiast w przedziale  $[0, \pi]$  jest ona częścią funkcji parzystej  $|t|$  określonej dla  $t \in [-\pi, \pi]$ . Rozwinięcie kosinusowe, to  $t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} \cos(2kt - t)$ .

.

.