Zagadnienia z teorii (II sem. analizy, WMS) w 2015

1. Definicja *całki Riemanna*, przykład f niecałkowalnej ograniczonej, ograniczoność funkcji całkowalnych, sumy całkowe Darboux (dolne i górne), ich zachowanie po rozdrobnieniu podziału.

2. Definicja całki dolnej (i górnej), *twierdzenie Darboux* (=kryterium całkowalności) i lemat o sumach dolnych dla ciągu normalnego podziałów, *kryterium Riemanna* całkowalności funkcji ograniczonej.

3. Dowód *całkowlaności funkcji ciągłych*. Całkowalność *sumy i iloczynu* funkcji całkowalych

4. Pierwsze twierdzenie *o wartości średniej* dla całek, tw. *Newtona-Leibniza*

5. *Kryterium porównawcze* zbieżności całki niewłaściwej.

6. *Kryterium całkowe* zbieżności szeregów.

7. Drugie tw. o wartości średniej (*wzór Bonneta*), *kryterium Dirichleta* dla całek

8. *Tw. o przyrostach* dla funkcji o wartościach wektorowych $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, wzór na pochodną długości łuku krzywej, wzór na *długość łuku* krzywej. Przykład krzywej nieprostowalnej.

9. *Wahanie całkowite*, krzywe prostowalne, norma przestrzeni $BV[a,b]$, oszacowanie wahania dla funkcji monotonicznych i dla funkcji klasy C^1, lub spełniających warunek Lipschitza. Definicja *całki Riemanna-Stjeltjesa* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ w przypadku f ciągłej, $g \in BV[a,b]$ (bez dowodów zbieżności sum całk.).

10. *Iloczyn skalarny* $\langle f, g\rangle$ zdefiniowany dla $f, g \in R(a,b)$ przez całkę. Porównanie (=podanie nierówności typu $\|f\|_j \leqslant C\|f\|_k$) norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$, $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}$ oraz $\|f\|_{[a,b]} := \sup_{[a,b]} |f|$, ciągłość funkcjonału $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ względem tych norm. *Całkowanie szeregów* wyraz-po wyrazie.

11. Zupełność przestrzeni $C[a,b]$ oraz $B(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \|f\|_\Omega < \infty\}$ z normą $\|f\|_\Omega := \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

12. Zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ spełniających warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ *(bezwzględnie zbieżnych)* w przestrzeni Banacha, „*Test majorant*" Weierstassa.

13. Twierdzenie *o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi* (zbieżność $f_n(a)$ i zbieżność jednost. $f_n' \rightrightarrows g$ w $[a,b]$ implikują zb. jednost. $f_n \rightrightarrows f$, gdzie $f \in C^1[a,b]$, $f' = g$.) Zupełność przestrzeni $C^1[a,b]$

14. Szereg potęgowy -*promień i koło zbieżności*, zbieżność jednostajna wraz z pochodnymi na zwartych podzbiorach koła zbieżności.

15. *Twierdzenie Abela* o szeregach potęgowych zbieżnych na końcu przedziału zbieżności, zastosowanie do przedstawienia $\ln 2$ jako $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

16. Definicja zbiorów *zwartych*, charakteryzacja zwartych podzbiorów w $\mathbb{R}^n$, "warunek pokryć skończonych" -jego dowód dla $[a,b] \subset \mathbb{R}$, ograniczoność i osiąganie maksimum przez funkcje ciągłe na zbiorach zwartych w $\mathbb{R}^n$.

17. *Zasadnicze Twierdzenie Algebry.*

18. Twierdzenie Pitagorasa dla normy określonej przez iloczyn skalarny. *Lemat o współczynnikach* wektora $g = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$ względem układu ortonormalnego (e_n). *Nierówność Bessela* dla układów ortogonalnych.

19. Ortogonalność układu trygonometrycznego (rzeczywistego i w postaci zespolonej), *szereg Fouriera* - wzory na współczynniki i na sumy częściowe, *tw. Dirichleta* (zarys dow.)

20. *Twierdzenie Fejéra*, *zupełność* układu trygonometrycznego.

21. Zbieżność szeregu Fouriera $S[f]$ (średniokwadratowa). *Tożsamość Parsevala.*

22. Granice iterowane. Pierwsze *tw. o granicy podwójnej*, jakiś przykład braku równości 2 granic iterowanych.

23. Pochodne cząstkowe a *różniczkowalność funkcji* n zmiennych (Tw.: ciągłość wszystkich poczh. cząstkowych $\partial f/\partial x_j \Rightarrow$ różniczkowalność f), definicja $C^1(\Omega)$.

24. Różniczka złożenia i jej postać macierzowa. Dowód „*Reguły Łańcucha*".

25. *Pochodne kierunkowe* (jednostronne), ich związki z gradientem, *twierdzenie o wartości średniej i o przyrostach.*

26. Druga różniczka, macierz Hessego, szkic dowodu twierdzenia *o symetrii drugiej różniczki* funkcji klasy C^2.

27. *Wzór Taylora* z resztą Lagrange'a (wyprowadzenie dla rzędu 2, w przypadku 2 zmiennych).

28. Warunki na istnienie *ekstremów lokalnych* (np. maksimum) dla $f \in C^2(\Omega)$.

29. Równanie *płaszczyzny stycznej* do wykresu (=do powierzchni $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in \Omega\}$) -szkic uzasadnienia. *Wektor normalny.*

30. Otwartość zbioru macierzy nieosobliwych i ciągłość operacji odwracania macierzy (względem normy operatorowej).

31. Tw. *o lokalnej odwracalności* (*dow. fragmentu o lokalnej injektywności i o różniczkowalnosci $(f|_U)^{-1}$) pewnej kuli).

32. Tw. *o funkcjach uwikłanych* (dow. dla przypadku 2 zmiennych, lub ogólnym). Pochodne *funkcji uwikłanej*

33. Warunek wystarczający dla istnienia ekstremum lok. funkcji uwikłanej konieczny -dla *ekstremum warunkowego* (mnożniki Lagrange'a). Uzasadnienie dla ekstremum f(x,y) przy warunku g(x,y)=0 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

(1)

Podziałem $[a,b]$ nazywamy skończony układ punktów $\tau_n = (a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b)$.

Średnica podziału to największa z wartości długości kolejnych odcinków podziału τ_n. $\delta(\tau_n) := \max\{(t_k - t_{k-1}) : k = 1, \ldots, n\}$

Ciąg podziałów (τ_n) jest normalny, gdy $\delta(\tau_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Układem Λ_n punktów pośrednich dla podziału τ_n nazywamy układ $\Lambda_n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, gdzie $\lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

Suma całkowa dla f związana z τ_n i Λ_n to: $S(f, \tau_n, \Lambda_n) := \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1})$

(I) Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna, gdy dla każdego ciągu normalnego podziałów i dla dowolnych układów punktów pośrednich istnieje wspólna granica ciągu sum częściowych / całkowych?, którą oznaczamy:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\delta(\tau_n)\to 0} S(f, \tau_n, \Lambda_n) = \lim_{\delta(\tau_n)\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1})$$

(II) Przykład funkcji niecałkowalnej ograniczonej (funkcja Dirichleta):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Niech $\forall_{\substack{j \\ \Lambda_n}} \lambda_j \in \mathbb{Q}$. Wtedy $S(f, \tau_n, \Lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) = t_n - t_0 = b - a$

Niech $\forall_{\substack{j \\ \Lambda_n}} \lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wtedy $S(f, \tau_n, \Lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0$

Sumy całkowe są różne, więc funkcja jest niecałkowalna

(III) Twierdzenie: Funkcje całkowalne są ograniczone.

Dowód: (nie wprost)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Niech $\sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} f(t) = +\infty$ dla pewnego k

Wiemy, że dla każdego ciągu normalnego podziałów τ i dla każdego układu punktów pośrednich Λ

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1})$$

①

Weźmy teraz taki układ punktów pośrednich Λ', by
$|S(f,\tau,\Lambda) - S(f,\tau,\Lambda')| > 1$ (jeśli ograniczone od dołu to ... <1)

Na tych odcinkach podziału, gdzie supremum jest skończone przyjmijmy $\lambda_j' = \lambda_j$, zaś λ_k' dobieramy tak, by
$$f(\lambda_k') > \frac{1}{t_k - t_{k-1}} + f(\lambda_k)$$
Wtedy:
$$|S(f,\tau,\Lambda) - S(f,\tau,\Lambda')| = |f(\lambda_k)(t_k - t_{k-1}) - f(\lambda_k')(t_k - t_{k-1})| =$$
$$= |f(\lambda_k) - f(\lambda_k')|\underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{\geq 0} > \left|f(\lambda_k) - \frac{1}{t_k - t_{k-1}} - f(\lambda_k)\right|(t_k - t_{k-1}) = 1$$
bo sumy całkowe miały być równe ↯

Ⓘⓥ <u>Sumy dolne</u> $s(f,\tau_n)$ definiujemy dla f i dla podziału τ_n wzorem $s(f,\tau_n) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]} f\,(t_j - t_{j-1})$

zaś <u>sumy górne</u> wzorem $S(f,\tau_n) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f\,(t_j - t_{j-1})$

Ⓥ Po rozdrobnieniu podziału <u>sumy dolne rosną, a sumy górne maleją.</u>

Tw. Jeśli τ jest drobniejszym podziałem niż τ_n ($\tau \supset \tau_n$), to $s(f,\tau_n) \leq s(f,\tau)$

Dowód:

Niech $|\tau| = |\tau_n| + 1$ i $\Delta = [t_{k-1}, t_k]$ będzie podzielony na dwa przedziały w przedziale τ, tzn. na Δ_1 i Δ_2. Wtedy $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ i $|\Delta| = |\Delta_1| + |\Delta_2|$.

Wówczas $s(f,\tau) - s(f,\tau_n) = \inf_{\Delta_1} f\,|\Delta_1| + \inf_{\Delta_2} f\,|\Delta_2| - \inf_{\Delta} f \cdot |\Delta| \geq$

$\geq \min\{\inf_{\Delta_1} f, \inf_{\Delta_2} f\} \cdot (|\Delta_1| + |\Delta_2|) - \inf_{\Delta} f\,|\Delta| =$

$= \inf_{\Delta} f \cdot |\Delta| - \inf_{\Delta} f\,|\Delta| = 0$

czyli $s(f,\tau) \geq s(f,\tau_n)$ ∎

① **Całka dolna** (Darbout) z funkcji f nazywamy kres górny sum dolnych dla podziału $\tau = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ i oznaczamy:

$$\int_{a*}^{b} f(t)dt := \sup \sum_{j=1}^{n} \inf_{t\in[t_{j-1},t_j]} f \,(t_j - t_{j-1}) \qquad \left(\text{lub } \int_{\underline{a}}^{b} f(t)dt\right)$$

Całka górna z funkcji f nazywamy kres dolny sum górnych i oznaczamy:

$$\int_{a}^{b*} f(t)dt := \inf \sum_{j=1}^{n} \sup_{t\in[t_{j-1},t_j]} f\,(t_j - t_{j-1})$$

⑪ **Twierdzenie Darbout** (kryterium całkowalności)

Gdy f jest ograniczona w $[a,b]$, to f jest całkowalna ($f \in R[a,b]$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{a*}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{b*} f(t)dt \; \left(= \int_a^b f(t)dt\right)$

Dowód:

$(\Rightarrow)$ $\int_{a*}^{b} f(t)dt \leqslant \int_{a}^{b*} f(t)dt$ – zachodzi zawsze

Dla $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_0 : \delta(\tau) < \delta_0$ $\forall$ układu punktów pośrednich Λ

$\left| S(f,\tau,\Lambda) - \int_a^b f(t)dt \right| < \varepsilon$ (z tego, że całka jest granicą sumy całkowej)

Jeśli teraz punkty $\lambda_{j*} \in [t_{j-1}, t_j]$ z układu punktów pośrednich Λ_* dla każdego j dobrać tak, by

$$0 \leqslant f(\lambda_*) - \inf_{[t_{j-1},t_j]} f < \frac{\varepsilon}{n(t_j - t_{j-1})}$$

to wtedy $\exists \Lambda_*$ układ punktów pośrednich, że

$$|S(f,\tau,\Lambda_*) - s(f,\tau)| < \varepsilon \quad , \text{bo}$$

$$S(f,\tau,\Lambda_*) - s(f,\tau) = \sum_{j=1}^{n} \left(f(\lambda_{j*}) - \inf_{[t_{j-1},t_j]} f \right)(t_j - t_{j-1}) <$$

$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n(t_j - t_{j-1})} \cdot (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon \text{, więc}$$

$$\int_a^b f(t)dt + 2\varepsilon > \int_a^{b*} f(t)dt > \int_{a*}^{b} f(t)dt \geq S(f,\tau,\Lambda_*) - \varepsilon > \int_a^b f(t)dt - 2\varepsilon \text{, czyli}$$

$$\left(\text{bo } \int_a^b f(t)dt + 2\varepsilon > S(f,\tau,\Lambda^*) + \varepsilon > \int_a^{b*} f(t)dt > \int_a^b f(t)dt > \int_{a*}^{b} f(t)dt > \dots\right)$$

$$4\varepsilon > \int_a^{b*} f(t)dt > \int_{a*}^{b} f(t)dt$$

$$\int_a^{b*} f(t)dt - \int_{a*}^{b} f(t)dt < 4\varepsilon$$

ale ε – dowolne, zatem $\int_a^{b*} f(t)dt \leqslant \int_{a*}^{b} f(t)dt$, a to mamy $\int_{a*}^{b} f(t)dt = \int_a^{b*} f(t)dt$

② (III) Lemat Darboux o sumach dolnych dla ciągu normalnego podziałów

Gdy $\delta(\tau_n) \to 0$, to $s(f,\tau_n) \to \int_{a*}^{b} f(t)dt$

$\left(i \; S(f,\tau_n) \to \int_a^{b*} f(t)dt \right)$

Dowód:

Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Wtedy $\exists \tau' = (a = t_0' < t_1' < \ldots < t_{k_0}' = b)$ taki, że

$$\int_{a*}^{b} f(t)dt - \varepsilon < s(f,\tau') < s(f,\tau) < \int_{a*}^{b} f(t)dt$$

Weź τ to wspólne rozdrobnienie podziałów τ' oraz τ_n

czyli $\tau = \tau' \cup \tau_n$. Oznaczamy $\Delta = [\alpha,\beta]$, $|\Delta| = \beta - \alpha$

Chcemy, by $\left| \int_{a*}^{b} f(t)dt - s(f,\tau_n) \right| \xrightarrow{\delta(\tau_n) \to 0} 0$, tzn.

$$\left| \int_{a*}^{b} f(t)dt - s(f,\tau_n) \right| \leqslant \left| \int_{a*}^{b} f(t)dt - s(f,\tau) \right| + \left| s(f,\tau) - s(f,\tau_n) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + |s(f,\tau) - s(f,\tau_n)|$$

Jeśli Δ_i to ten odcinek podziału τ_n, w którego wnętrzu leżą jakieś punkty z podziału τ', które dzielą go na podzięty $\Delta_i = \Delta_1' \cup \ldots \cup \Delta_p'$ i wtedy $|\Delta_i| = |\Delta_1'| + \ldots + |\Delta_p'|$, to

$$|s(f,\tau) - s(f,\tau_n)| = \left| \sum_{i=1}^{k_0} \left(\inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| - (\inf_{\Delta_1'} f \cdot |\Delta_1'| + \ldots + \inf_{\Delta_p'} f |\Delta_p'|) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{i=1}^{k_0} \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| + (\inf_{\Delta_1'} f |\Delta_1'| + \ldots + \inf_{\Delta_p'} f |\Delta_p'|) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k_0} \left| \inf_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| \right| + \left(\inf_{\Delta_1'} f |\Delta_1'| + \ldots + \inf_{\Delta_p'} f \cdot |\Delta_p'| \right) \leqslant$$

$m = \sup\{ \inf_{\Delta_i'} f, \ldots, \inf_{\Delta_p'} f \}$

$\inf_{\Delta_i} f \leqslant m$

$$\leqslant k_0 \cdot 2 \cdot |\Delta_i| \cdot m \leqslant k_0 \cdot 2 \cdot \delta(\tau_n) \cdot m < \varepsilon$$ dla dostatecznie dużych n, bo wtedy $\delta(\tau_n) \to 0$

Ostatecznie $|s(f,\tau_n) - s(f,\tau)| < \varepsilon$, więc $\left| \int_{a*}^{b} f(t)dt - s(f,\tau_n) \right| < 2\varepsilon$

(II) Dowód tw. Darboux ($\Leftarrow$)

Niech τ_n – ciąg normalny podziałów z punktami pośrednimi Λ_n

Wiemy, że:

$$s(f,\tau_n) \leq s(f,\tau_n,\Lambda_n) \leq S(f,\tau_n)$$

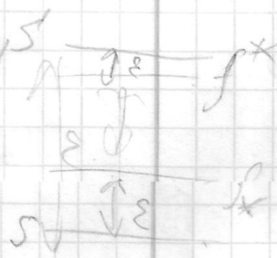
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_{a*}^{b} f(t)dt \qquad\qquad \int_{a}^{b*} f(t)dt$$

a z zał. $\int_{a*}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{b*} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt$

więc z tw. o 3 ciągach: $s(f,\tau_n,\Lambda_n) \to \int_a^b f(t)dt$ ■

(IV) Wniosek z tw. Darboux: Kryterium Riemanna całkowalności funkcji ograniczonej



f ograniczona jest całkowalna $\iff$

$\iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\text{podział } \tau'}: S(f,\tau') - s(f,\tau') < \varepsilon$

Dowód:

($\Leftarrow$) Niech $\varepsilon > 0$. Z lematu Darboux:

$\exists_{\tau'}: \left|S(f,\tau') - \int_a^{b*} f(t)dt\right| < \varepsilon$

$\exists_{\tau''}: \left|s(f,\tau'') - \int_{a*}^{b} f(t)dt\right| < \varepsilon$

$\to |S(f,\tau''') - s(f,\tau''')| < \varepsilon$, $\tau''' = \tau' \cup \tau''$

$\Rightarrow \left|\int_{a*}^{b} f(t)dt - \int_a^{b*} f(t)dt\right| < 3\varepsilon$,

czyli $\int_{a*}^{b} f(t)dt = \int_a^{b*} f(t)dt \xRightarrow{\text{kryt. Darboux}} f \in R[a,b]$

($\Rightarrow$) Nie wprost:

zał: $f \in R[a,b] \wedge \exists_{\varepsilon>0} \forall_{\tau}\ S(f,\tau) - s(f,\tau) \geq \varepsilon$.

(dowód można też przeprowadzić metodą wprost)

$f \in R[a,b] \overset{\text{tw. Darboux}}{\iff} \int_{a*}^{b} f(t)dt = \int_a^{b*} f(t)dt$

Z lematu Darboux wiemy, że $\exists_{\tau} \left|S(f,\tau) - \int_a^{b*} f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz

$\left|s(f,\tau) - \int_{a*}^{b} f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Podejść stronami:

$$\Big|S(f,\tau) - s(f,\tau) + \underbrace{\int_{a*}^{b} f(t)dt - \int_a^{b*} f(t)dt}_{0}\Big| \leq \left|S(f,\tau) - \int_a^{b*} f(t)dt\right| + \left|s(f,\tau) - \int_{a*}^{b} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

↯ z zał.

① Twierdzenie: Funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna.

Dowód:

$Z \iff \forall_{y\in[a,b]} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in[a,b]} |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Z twierdzenia Weierstrassa (o przyjmowaniu kresów)

$\exists \alpha_k, \beta_k \in [t_{k-1}, t_k] = \Delta_k : f(\alpha_k) = \inf_{\Delta_k} f, \; f(\beta_k) = \sup_{\Delta_k} f$

Dla podziału $\tau_n = (a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b)$

$|\alpha_k - \beta_k| \leqslant t_k - t_{k-1} \leqslant \delta(\tau_n) \to 0$ dla ciągów normalnych podziałów

Dla $\varepsilon>0$ z tw. Cantora (o jednostajnej ciągłości)

$\exists_{\delta_0>0} |\alpha-\beta|<\delta_0 \Rightarrow |f(\alpha)-f(\beta)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\exists_{n_0} \forall_{n\geq n_0} \delta(\tau_n)<\delta_0 \Rightarrow \forall_n |\alpha_n - \beta_n|<\delta_0$

$S(\tau_n) - s(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\Delta_k} f \,(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \inf_{\Delta_k} f \,(t_k - t_{k-1}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|(t_k - t_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}(t_k - t_{k-1})\right) \leqslant$

$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cdot \cancel{b-a} = \varepsilon$ ∎

Ⅱ Całkowalność sumy funkcji całkowalnych

$f,g \in R[a,b] \Rightarrow f+g \in R[a,b]$ oraz $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

Dowód:

Bierzemy podział $\tau = (a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b)$ - dowolny

$\lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} ((f+g)(\lambda_i))(t_i - t_{i-1}) = \lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(\lambda_i)+g(\lambda_i))(t_i - t_{i-1}) =$

$= \lim_{\delta(\tau)\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i)(t_i - t_{i-1})\right) =$ z całkowalności f,g wiemy, że te granice istnieją

$= \lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(t_i - t_{i-1}) + \lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt,$

więc $\lim_{\delta(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} ((f+g)(\lambda_i))(t_i - t_{i-1})$ istnieje i jest równa

$\int_a^b ((f+g)(t))\,dt$ ∎

③

(III) Całkowalność iloczynu funkcji całkowalnych

$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$

Dowód:

Wiemy, że funkcje całkowalne w sensie Riemanna są ograniczone, tj.

$\exists_{M_1} \forall_t \; |f(t)| \leqslant M_1$

$\exists_{M_2} \forall_t \; |g(t)| \leqslant M_2$

$|f(s) \cdot g(s) - f(t) \cdot g(t)| = |f(s)g(s) - f(s)g(t) + f(s)g(t) - f(t)g(t)| \leqslant$

$\leqslant |f(s)| \cdot |g(s) - g(t)| + |g(t)| |f(s) - f(t)| \leqslant$

$\leqslant M_1 |g(s) - g(t)| + M_2 |f(s) - f(t)|$

Sprawdzamy warunek z kryterium Riemanna:

(?) $S'(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g) < \varepsilon$

Z powyższego różnicę $S'(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau)$ możemy oszacować przez $M_1 |S'(g, \tau) - s(g, \tau)| + M_2 |S'(f, \tau) - s(f, \tau)|$

gdzie $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

τ_1 - taki podział, by $S'(f, \tau_1) - s(f, \tau_1) < \frac{\varepsilon}{2M_1}$

τ_2 - taki podział, by $S'(g, \tau_2) - s(g, \tau_2) < \frac{\varepsilon}{2M_2}$

Wtedy spełniony jest warunek z kryterium Riemanna, toteż $f \cdot g$ jest całkowalny. ∎

① I twierdzenie o wartości średniej dla całek

$f, g \in R[a;b]$

Gdy g – stałego znaku na $[a;b]$ oraz $\forall_{t\in[a,b]}\ m \leq f(t) \leq M$, to

$$\exists_{\gamma\in[m,M]}\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \gamma \int_a^b g(t)\,dt$$

Dowód:

I przypadek: $a<b$

Załóżmy, że $g \geq 0$

$$\forall_t \quad m\cdot g(t) \leq f(t)g(t) \leq M\cdot g(t) \quad \Big/ \int_a^b$$

$$m\cdot\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b f(t)\,dt \quad (*)$$

Gdy $\int_a^b g(t)\,dt = 0$, to z powyższej nierówności wynika, że

$\int_a^b f(t)g(t) = 0$ i dla każdego γ teza zachodzi.

Gdy $\int_a^b g(t)\,dt > 0$, to nierówność $(*)$ dzielimy stronami przez $\int_a^b g(t)\,dt$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leq M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \gamma\int_a^b g(t)\,dt$$

II przypadek: $a>b$

$g\geq 0$

$$\forall_t \quad m\cdot g(t) \leq f(t)g(t) \leq M\cdot g(t) \quad \Big/ \int_a^b$$

$$m\int_a^b g(t)\,dt \geq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \geq M\int_a^b g(t)\,dt$$

$$-m\int_b^a g(t)\,dt \leq -\int_b^a f(t)g(t)\,dt \leq -M\int_b^a g(t)\,dt \quad /:(-1)$$

$$M\int_b^a g(t)\,dt \geq \int_b^a f(t)g(t)\,dt \geq m\cdot\int_b^a g(t)\,dt$$

i dalej rozumowanie analogiczne

(4)

Ponadto, gdy f – ciągła, to

$$\exists_{c\in[a,b]} \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\cdot\int_a^b g(t)\,dt$$

Dowód:

$m=\min_{[a,b]} f$, $M=\max_{[a,b]} f$ wtedy: $\begin{cases} m\cdot g(t)\leq f(t)g(t)\leq M\cdot g(t) & g\geq 0 \\ m\, g(t)\geq f(t)g(t)\geq M\cdot g(t) & g\leq 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\cdot\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\cdot\int_a^b g(t)\,dt \\ m\cdot\int_a^b g(t)\,dt \geq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \geq M\cdot\int_a^b g(t)\,dt\end{cases}$$ o ile $\int_a^b g(t)\neq 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}\leq M$$ $\Rightarrow$ z własności Darboux

$$\exists_{c\in[a,b]}\ f(c)=\frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \Rightarrow \exists_{c\in[a,b]} \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\cdot\int_a^b g(t)\,dt$$ ∎

(11) Wzór Newtona – Leibniza

Gdy Φ jest funkcją pierwotną dla $f\in C[a,b]$ (tzn. $f=\Phi'$), to

$$\int_a^b f(s)\,ds = \Phi(b)-\Phi(a)$$

Dowód:

Dla F danej wzorem $F(t)=\int_a^t f(s)\,ds$ istnieje stała C:

$$\int_a^b f(s)\,ds = F(b)=\Phi(b)+C$$

$$F(a)=\int_a^a f(s)\,ds = 0 = \Phi(a)+C \Rightarrow C=-\Phi(a)$$

Wtedy $\int_a^b f(s)\,ds = \Phi(b)-\Phi(a)$ ∎

Dowód, że F – różniczkowalna i $F'=f$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(s)\,ds - \int_a^x f(s)\,ds\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} 1\cdot f(s)\,ds \overset{\text{I tw. o wartości średniej}}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot f(\xi)\cdot\int_x^{x+h} ds = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi) = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

$\xi\in[x,x+h]$

Analogicznie dla $h<0$

① Kryterium porównawcze zbieżności całki niewłaściwej

b - punkt niewłaściwy, $\int_a^b f(t)dt := \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)dt$

Gdy $|f(t)| < g(t)$ oraz $\int_a^b g(t)dt$ jest zbieżna,
to $\int_a^b f(t)dt$ jest zbieżna.

Dowód:

$I(\beta) := \int_a^\beta f(t)dt$

$$|I(\beta') - I(\beta)| = \left|\int_\beta^{\beta'} f(t)dt\right| \underset{\text{całkowa nierówność trójkąta}}{\leq} \int_\beta^{\beta'} |f(t)|dt \underset{\text{z zał. i z monotoniczności całki}}{\leq} \int_\beta^{\beta'} g(t)dt$$

Gdy β, β' są dostatecznie bliskie b, to

$\int_\beta^{\beta'} g(t)dt$ jest dowolnie małe, czyli

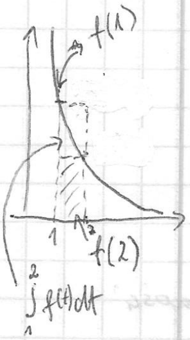
$$\int_\beta^{\beta'} g(t)dt < \varepsilon \xRightarrow{\text{kryt. Cauchy'ego}} \int_\beta^{\beta'} |f(t)|dt < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\beta^{\beta'} f(t)dt < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ jest zbieżna} \blacksquare$$

(1) Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Zał. $f:[1,+\infty) \to R_+$ jest nierosnąca

Teza: $\int_1^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna $\iff$ szereg $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ jest zbieżny



Dowód: Z monotoniczności:

$$\forall_n \ \forall_{t\in[n,n+1]} \ f(n) \geq f(t) \geq f(n+1) \quad \Big/ \int_n^{n+1}$$

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dt \geq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt$$

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq f(n+1)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,dt =$$

$$= \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \ldots + \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

Po przejściu w granicy do nieskończoności mamy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^\infty f(t)\,dt \geq \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$$

($\Rightarrow$) Gdy szereg $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ jest zbieżny, to $\int_1^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna,

($\Leftarrow$) a gdy $\int_1^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna, to $\sum_{k=2}^\infty f(k)$ jest zbieżny

(zaś pominięcie pierwszego wyrazu szeregu nie wpływa na jego zbieżność), więc mamy tezę. ■

① II twierdzenie o wartości średniej (wzór Bonneta)

Gdy f - ciągła na $[a,b]$, g - monotoniczna na $[a,b]$,
to $\exists_{\xi \in [a,b]}$ $\int_a^b f(t) g(t)\,dt = g(a) \cdot \int_a^{\xi} f(t)\,dt + g(b) \cdot \int_{\xi}^{b} f(t)\,dt$

Dowód: przy założeniu, że g jest klasy C^1 (tzn. 1. pochodna - ciągła)

Niech F będzie funkcją pierwotną dla f (tzn. $F' = f$)

$$\int_a^b f(t) g(t)\,dt = \int_a^b F'(t) g(t)\,dt \underset{\substack{\text{całkowanie} \\ \text{przez części}}}{=} \left[F(t) g(t)\right]_a^b - \int_a^b F(t) g'(t)\,dt =$$

z I tw. o wartości średniej

wzór Newtona-Leibniza

$$= F(b) g(b) - F(a) g(a) - F(\xi) \int_a^b g'(t)\,dt =$$

(bo pochodna f monotonicznej jest stałego znaku)

$$= F(b) g(b) - F(a) g(a) - F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) =$$

$$= g(b)\big(F(b) - F(\xi)\big) + g(a)\big(F(\xi) - F(a)\big) =$$ wzór Newtona-Leibniza

$$= g(b) \cdot \int_{\xi}^{b} f(t)\,dt + g(a) \cdot \int_a^{\xi} f(t)\,dt \quad \blacksquare$$

⑪ Kryterium Dirichleta zbieżności całek niewłaściwych

(postaci $\int_a^{\infty} f(t) g(t)\,dt$)

zał. $\exists_M \forall_{\beta < \beta'} \left| \int_{\beta}^{\beta'} f(t)\,dt \right| \leqslant M$, oraz g jest monotoniczna

(lub o wahaniu ograniczonym) i $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$

teza: $\int_a^{\infty} f(t) g(t)\,dt$ jest zbieżna

Dowód: polega na sprawdzeniu warunku Cauchy'ego
(tzn. $\int_a^b f(t) < \infty \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\beta_0 > 0} \forall_{\beta_0 < \beta < \beta' < b} \left| \int_{\beta}^{\beta'} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$)

$$\left| \int_{\beta}^{\beta'} f(t) g(t)\,dt \right| \overset{\text{II tw. o wartości średniej}}{=} \left| g(\beta) \cdot \int_{\beta}^{\xi} f(t)\,dt + g(\beta') \cdot \int_{\xi}^{\beta'} f(t)\,dt \right| \overset{\text{nierówność trójkąta}}{\leqslant}$$

(7)

$$\leqslant \left(\left| g(\beta) \int_{\beta}^{\xi} f(t)\,dt \right| + \left| g(\beta') \int_{\xi}^{\beta'} f(t)\,dt \right| \right) \leqslant$$

z zał. o ograniczoności f

$$\leqslant \underbrace{\left(|g(\beta)| + |g(\beta')| \right)}_{\substack{\downarrow \text{ gdy } \beta \text{ i } \beta' \\ \text{dostatecznie duże} \\ 0}} \cdot M < \left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \right) \cdot M = \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

więc całka $\int_a^{\infty} f(t) g(t)\,dt$ jest zbieżna

① Twierdzenie o przyrostach dla funkcji o wartościach wektorowych

$f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t))$ (Lagrange'a)

Gdy $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w (a,b) i ciągła w $[a,b]$, to $\|f(b)-f(a)\|\leqslant(b-a)\cdot\sup\limits_{t\in(a,b)}\|f'(t)\|$

$\|\cdot\|$ - norma euklidesowa

Dowód:

Niech $v=(v_1,\ldots,v_n)$ będzie wektorem stałym

i $v=\frac{1}{\|f(b)-f(a)\|}\cdot(f(b)-f(a))$, $\|v\|=\frac{\|f(b)-f(a)\|}{\|\,\|f(b)-f(a)\|\,\|}=1$

Niech $\varphi(t)=\langle f(t),v\rangle=f_1(t)\cdot v_1+f_2(t)\cdot v_2+\ldots+f_n(t)\cdot v_n$

φ jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b),

więc z tw. Lagrange'a:

$$L=|\varphi(b)-\varphi(a)|\leqslant(b-a)\cdot\sup_{t\in(a,b)}|\varphi'(t)|$$

$$L=|\varphi(b)-\varphi(a)|=|\langle f(b),v\rangle-\langle f(a),v\rangle|=$$
$$=|f_1(b)v_1+\ldots+f_n(b)v_n-(f_1(a)v_1+\ldots+f_n(a)v_n)|=$$
$$=|(f_1(b)-f_1(a))v_1+\ldots+(f_n(b)-f_n(a))v_n|=$$
$$=\langle f(b)-f(a),v\rangle=\langle f(b)-f(a),(f(b)-f(a))\cdot\tfrac{1}{\|f(b)-f(a)\|}\rangle\ \overset{\text{z 2-liniowości iloczynu skalarnego}}{=}$$
$$=\frac{1}{\|f(b)-f(a)\|}\cdot\langle f(b)-f(a),f(b)-f(a)\rangle=$$
$$=\frac{1}{\|f(b)-f(a)\|}\cdot\|f(b)-f(a)\|^2=\|f(b)-f(a)\|$$

$$|\varphi'(t)|=|\langle f'(t),v\rangle|\ \overset{\text{nierówność Schwarza (CBS)}}{\leqslant}\ \|f'(t)\|\cdot\underbrace{\|v\|}_{1}=\|f'(t)\|$$

Wracając do tezy:

$$\|f(b)-f(a)\|=|\varphi(b)-\varphi(a)|\ \overset{\text{z tw. Lagrange'a}}{\leqslant}\ (b-a)\cdot\sup_{t\in(a,b)}|\varphi'(t)|=$$
$$=(b-a)\cdot\sup_{t\in(a,b)}\|f'(t)\|$$

■

(8) Krzywa w $\mathbb{R}^n$ to odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

(tzn. $\forall_{t_0 \in [a,b]} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{t \in [a,b]} \; |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$)

Łamana wpisana w krzywą γ to łamana o kolejnych wierzchołkach w punktach $\gamma(t_i)$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ - podział $[a,b]$

Długość krzywej γ to kres górny długości łamanych wpisanych w krzywą, tj. $|\gamma| := \sup \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_{1,t_k} - x_{1,t_{k-1}})^2 + \ldots + (x_{n,t_k} - x_{n,t_{k-1}})^2}$

(11) Wzór na pochodną długości łuku krzywej

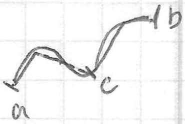
Gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą klasy C^1, to dla funkcji długości łuku tej krzywej, tj.

$s(t) := l\left(\gamma|_{[a,t]}\right)$ (jest to długość krzywej $\{\gamma(s) : a \leq s \leq t\}$)

spełnia ona równanie $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$

W dowodzie wykorzystujemy addytywność długości łuku krzywej:

jeśli $a < b < c$, to $l\big(\underbrace{\gamma|_{[a,b]}}_{\gamma}\big) = l\big(\underbrace{\gamma|_{[a,c]}}_{\gamma_1}\big) + l\big(\underbrace{\gamma|_{[c,b]}}_{\gamma_2}\big)$



„$\geq$" łącząc łamane wpisane w γ_1 i w γ_2 otrzymujemy łamaną wpisaną w γ. Suma długości odcinków tej łamanej jest mniejsza lub równa długości krzywej γ, czyli $l(\gamma) \geq l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$

„$\leq$" Oznaczmy: t - łamana wpisana w γ

t_* - łamana t z dodanym wierzchołkiem $\gamma(c)$

(więc jednocześnie suma 2 łamanych wpisanych w krzywe γ_1, γ_2)

Z nierówności trójkąta: długość $t \leq$ długość t_*

$$\Downarrow$$

$$l(\gamma) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \quad \blacksquare$$

Dowód:

I przypadek: $h > 0$

$s(t+h) - s(t) = l\left(\gamma|_{[a,t+h]}\right) - l\left(\gamma|_{[a,t]}\right) \overset{\text{z addytywności długości łuku krzywej}}{=}$

$= l(\gamma|_{[a,t]}) + l(\gamma|_{[t,t+h]}) - l(\gamma|_{[a,t]}) = l(\gamma|_{[t,t+h]}) \geq$ (8)

$\geq \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|$ (← długość łamanej jednoodcinkowej wpisanej w γ)

Gdy τ jest podziałem odcinka $[t, t+h]$: $\tau = (t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t+h)$ to długość łamanej wpisanej w γ o wierzchołkach $\gamma(t_i)$ jest równa $\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$

Niech $M_h := \sup_{s \in [t, t+h]} \|\gamma'(s)\|$

Z twierdzenia o przyrostach dla funkcji o wart. wektorowych:

$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq M_h \cdot (t_i - t_{i-1})$, więc

$$\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq M_h \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = M_h \cdot (t - (t-h)) = M_h \cdot h$$

Z nierówności trójkąta dla norm:

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq M_h \cdot h$$

Dzieląc obie strony nierówności przez h, otrzymamy:

$$\underbrace{\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h}}_{\downarrow h \to 0 \;\; \|\gamma'(t)\|} \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq M_h \cdot h \cdot \frac{1}{h} = M_h$$

$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} : |h| < \delta$ (z powyższego)

$$\|\gamma'(t)\| - \varepsilon < \left\| \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) \right\| \leq \underbrace{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}}_{s'(t)} \leq \underbrace{M_h}_{\sup_{s \in [t,t+h]} \|\gamma'(s)\|} \leq \|\gamma'(t)\| + \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad s'(t) = \|\gamma'(t)\|$

II przypadek : $h < 0$

$h = -k$, wtedy $a < t+h = t-k < t$

Stosujemy iloraz różnicowy: $s(t+h) - s(t) = (s(t) - l(\gamma|_{[t-k,t]})) - s(t) =$

$= -l(\gamma|_{[t-k,t]})$

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{l(\gamma|_{[t-k,t]})}{|k|}$$

i dalej jak w przypadku $h > 0$

Wniosek:

III Wzór na długość łuku krzywej

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds$$

$$s(a) = 0$$

Twierdzenie:

Ciągłość funkcji o wartościach wektorowych jest równoważna ciągłości na każdej ze współrzędnych tej funkcji, tzn.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła $\Leftrightarrow \forall_i\ \gamma_i$ jest ciągła

Dowód:

$$\vec{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}$$

$$\|\vec{\gamma}(t) - \vec{\gamma}(t_0)\| = \sqrt{(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0))^2 + \dots + (\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0))^2}$$

($\Leftarrow$) Gdy $\forall_i\ \gamma_i$ jest ciągłe to z tego, że $\forall_{i \leq n}\ |t - t_0| < \delta_i$ wynika, że $|\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

Wtedy też mamy, że dla $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ zachodzi $\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$

($\Rightarrow$) Wiemy, że $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_t\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$, czyli

$$\forall_i\ |\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)| \leq \sqrt{(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0))^2 + \dots + (\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0))^2} < \varepsilon$$

więc mamy teq.

IV Przykład krzywej nieprostowalnej

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$ jest nieprostowalna

Weźmy taką krzywą, by $\sin\frac{1}{x} \in \{1, -1\}$, czyli o wierzchołkach w: $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ lub $x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}\right) = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right) =$$

bo $2n+1 \leq 2n+2$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} > \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ - rozbieżny (bo $\sum \frac{1}{k}$ - rozb.)

I Wahanie całkowite f na odcinku $[a,b]$

$\tau = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ - podział, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$V_a^b f := \sup \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ po wszystkich podziałach

II Krzywe prostowalne

Def. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą prostowalną wtw, gdy $|\gamma| < \infty$,

tzn. gdy $\sup \sum_{j=1}^{k} \sqrt{(\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1}))^2 + \ldots + (\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))^2} < \infty$

Twierdzenie:

$$|\gamma| < \infty \iff \forall_i \; V_a^b \gamma_i < \infty$$

($\Rightarrow$) Niech i - dowolne, $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\infty > |\gamma| = \sup \sum_{j=1}^{k} \sqrt{(\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1}))^2 + \ldots + (\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sup \sum_{j=1}^{k} \sqrt{(\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1}))^2} = \sup \sum_{j=1}^{k} |\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})| = V_a^b \gamma_i$$

($\Leftarrow$)

$\forall_{a,b \in \mathbb{R}_+} \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ subaddytywność pierwiastka

$$|\gamma| = \sup \sum_{j=1}^{k} \sqrt{(\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1}))^2 + \ldots + (\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \sum_{j=1}^{k} \left(\sqrt{(\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1}))^2} + \ldots + \sqrt{(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))^2} \right) =$$

$$= \sup \sum_{j=1}^{k} |\gamma_1(t_j) - \gamma_1(t_{j-1})| + \ldots + \sup \sum_{j=1}^{k} |\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1})| =$$

$$= V_a^b \gamma_1 + \ldots + V_a^b \gamma_k \underset{\text{z zał.}}{<} \infty$$

więc $|\gamma| < \infty$ ∎

III Norma przestrzeni $BV[a,b]$

$BV[a,b]$ - przestrzeń funkcji o wahaniu skończonym

$\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_a^b f$

1) $\|f\|_{BV} = 0 \iff |f(a)| = 0 \wedge V_a^b f = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \wedge f \equiv const \Rightarrow$
$\Rightarrow f \equiv 0$

2) $\|\alpha f\|_{BV} = |(\alpha f)(a)| + V_a^b \alpha f = |\alpha f(a)| + \sup \sum_{k=1}^{m} |\alpha f(t_k) - \alpha f(t_{k-1})| =$
$= |\alpha| \cdot |f(a)| + \sup |\alpha| \cdot \sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = |\alpha| \cdot \|f\|_{BV}$

3) $\|f+g\|_{BV} = |(f+g)(a)| + V_a^b (f+g) = |f(a) + g(a)| + \sup \sum_{k=1}^{m} |g(t_k) + f(t_k) - g(t_{k-1}) - f(t_{k-1})|$
$\leqslant |f(a)| + |g(a)| + \sup \left(\sum_{k=1}^{m} |g(t_k) - g(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right) =$
$= |f(a)| + V_a^b f + |g(a)| + V_a^b g = \|f\|_{BV} + \|g\|_{BV}$

(IV) Oszacowanie wahania dla funkcji monotonicznej

Niech f - niemalejąca (dla nierosnącej zmienia się znak przy opuszczeniu modułu)

$$V_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sup \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(b) - f(a)$$

(V) Oszacowanie wahania dla funkcji klasy $C^1[a,b]$

Niech $f \in C^1[a,b]$

tw. Lagrange'a o wartości średniej

$$S(\tau_n) \overset{\text{ozn.}}{:=} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(\lambda_i)| \cdot |t_i - t_{i-1}| = S(|f'|, \tau_n, \Lambda_n)$$

$\lambda_i \in (t_{i-1}, t_i)$

$$S(|f'|, \tau_n, \Lambda_n) \xrightarrow{\delta(\tau_n) \to 0} \int_a^b |f'|$$

Też z nierówności trójkąta mamy:

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| = |f(t_i) - f(s) + f(s) - f(t_{i-1})| \leqslant$$
$$\leqslant |f(t_i) - f(s)| + |f(s) - f(t_{i-1})|, \text{ gdzie } s \in (t_{i-1}, t_i)$$

Zatem gdy $\tau \supset \tau_n$, to $S(\tau) \geqslant S(\tau_n)$, ale dla dość drobnego τ mamy: $\forall \varepsilon > 0 \quad S(\tau) < \int_a^b |f'(t)| dt + \varepsilon$, czyli:

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \tau_n \quad S(\tau_n) < \int_a^b |f'(t)| dt + \varepsilon$, co daje nam, że $\int_a^b |f'(t)| dt$ jest majorantą.

Wiemy też, że $S(\tau) = S(|f'|, \tau, \Lambda) \longrightarrow \int_a^b |f'(t)| dt$ (tzn. $S(|f'|, \tau, \Lambda) \in \left(\int_a^b |f'| - \varepsilon, \int_a^b |f'| + \varepsilon\right)$)

co daje definicję supremum.

Ostatecznie: $V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt$

(VI) Oszacowanie wahania dla funkcji spełniających warunek Lipschitza

Niech f spełnia warunek Lipschitza, tzn.

$\forall_{x,y} \ |f(x) - f(y)| \leqslant L \cdot |x - y|$, gdzie L - stała Lipschitza

$$V_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sup \sum_{i=1}^{n} L \cdot |t_i - t_{i-1}| = L(b-a)$$

(VII) Całka Riemanna-Stieltjesa

Całką Riemanna-Stieltjesa nazywamy granicę po wszystkich podziałach normalnych $\tau_n = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ postaci:

$$S(\tau_n, f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \ \lambda_i \in [t_{i-1}, t_i], \ g \in BV, \ f \text{ - mierzalna w sensie Lebesgue'a (} f \text{ - ciągła)}$$

co oznaczamy: $\lim_{\delta(\tau_n) \to 0} S(\tau_n, f, g) =: \int_a^b f(t) \, dg(t)$

10) Iloczyn skalarny $\langle f,g\rangle$ zdefiniowany dla $f,g\in R[a,b]$ przez całkę

Iloczynem skalarnym funkcji $f,g\in\{F:[a,b]\to\mathbb{R}\}$ nazywamy:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

Odwzorowanie to spełnia aksjomaty iloczynu skalarnego (gdy utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie):

1) $\forall_{f\neq 0}\ \langle f,f\rangle>0$ - nieujemność
2) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$ - symetria
3) dwuliniowość: $\forall_g\ f\longmapsto\langle f,g\rangle$ jest liniowe

Dla $f,g\in\{F:[a,b]\to\mathbb{C}\}$ iloczyn skalarny definiujemy następująco:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

Odwzorowanie spełnia warunki

1) $\forall_{f\neq 0}\ \langle f,f\rangle>0$ (utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie)
2) $\langle g,f\rangle=\overline{\langle f,g\rangle}$ - skośna symetryczność
3) $\langle f+h,g\rangle=\langle f,g\rangle+\langle h,g\rangle$
4) $\langle cf,g\rangle=c\cdot\langle f,g\rangle$, $c\in\mathbb{C}$
5) $\langle f,g+h\rangle=\langle f,g\rangle+\langle f,h\rangle$
6) $\langle f,cg\rangle=\bar{c}\langle f,g\rangle$, $c\in\mathbb{C}$

11) Porównanie norm

Z nierówności Höldera mamy: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, gdy $p,q>1$

$\|f\cdot g\|_1\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q$. Biorąc $g\equiv 1$, mamy

$\|f\|_1\leqslant\|f\|_p\cdot\sqrt[q]{b-a}$

(gdy $p=q=2$ to $\|f\|_1\leqslant\|f\|_2\sqrt{b-a}$)

$$\|f\|_p:=\sqrt[p]{\int_a^b|f(t)|^p\,dt}$$

Jako że $\forall_\tau\ S(|f|^p,\tau,\Lambda)=\sum_{i=1}^n|f(\lambda_i)|^p(t_i-t_{i-1})\leqslant$

$\leqslant\sum_{i=1}^n\sup_{[a,b]}|f|^p(t_i-t_{i-1})=\sup_{[a,b]}|f|^p\cdot(b-a)=(\sup|f|)^p\,(b-a)$

to mamy $\int_a^b|f(t)|^p\,dt\leqslant(\sup|f|)^p(b-a)$, co daje:

$$\|f\|_1\leqslant\|f\|_p\cdot(b-a)^{\frac{1}{q}}\leqslant\sqrt[p]{(\sup|f|)^p(b-a)}\cdot(b-a)^{\frac{1}{q}}=\sup|f|\cdot(b-a)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}=\|f\|_{\sup}(b-a)$$

(10)

(III) Ciągłość funkcjonału $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$ względem tych norm (dowolnie wspomnianej)

tzn. $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}\ \|f_n - f\| < \delta \Rightarrow \left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| < \varepsilon$

Dowód:

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |(f_n-f)(t)|\,dt =$$
$$= \|f_n - f\|_1$$

Ale z porównania norm mamy:

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_p (b-a)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_{sup}\,(b-a)$$

czyli jeśli $\delta < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}$ (dla p-tej normy) lub $\delta < \frac{\varepsilon}{b-a}$ (dla supremum)

to:

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| < \|f_n - f\|_p \cdot (b-a)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$$

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| < \|f_n - f\|_{sup}\,(b-a) < \varepsilon$$

(IV) Całkowanie szeregów funkcyjnych wyraz po wyrazie

Gdy $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie (* lub w sensie $\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)|dt$), to $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$

Dowód:

$$T \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x) = \int_a^b S(x)$$

z zał.: dla $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$: $\|S_k - S\|_{[a,b]} \to 0$

(w wersji * $\|S_k - S\|_1 \to 0$) $\int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(x)dx = \int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x))dx \overset{\text{z liniowości}}{=} \sum_{n=1}^{k}\int_a^b f_n(x)dx$

$$\left|\sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(x) - \int_a^b S(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b S_k(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx\right| \overset{\text{z liniowości całki}}{=}$$

$$= \left|\int_a^b (S_k(x) - S(x))\,dx\right| \overset{\text{całkowa nierówność trójkąta}}{\leqslant} \int_a^b |S_k(x) - S(x)|\,dx = \|S_k - S\|_1 \leqslant$$

(bo $\|u\|_1 \leqslant (b-a)\cdot\|u\|_{[a,b]}$)

$$\leqslant (b-a)\|S_k - S\|_{[a,b]} \to 0 \quad \text{(z zał.)}$$

<u>Przestrzenią metryczną</u> nazywamy zbiór X dowolnych elementów, jeżeli każdym dwóm elementom x, y zbioru przyporządkowano liczbę $d(x,y) \geq 0$ spełniającą trzy warunki:

1) $d(x,y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y$, $d(x,x) = 0$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dla każdego $z \in X$

<u>Przestrzenią zupełną</u> nazywamy przestrzeń metryczną, w której każdy ciąg punktów $\{p_n\}$ spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę należącą do tej przestrzeni.

<u>Ciągiem Cauchy'ego</u> nazywamy ~~taki~~ ciąg $\{p_n\}$ punktów przestrzeni metrycznej X, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \; \forall_{n \geq n_0} \; \forall_{m \geq n_0} \; d(p_n, p_m) < \varepsilon \qquad (\text{czyli } d(p_n,p_m) \to 0)$$

Powyższy warunek to <u>warunek Cauchy'ego</u>.

$C[a,b]$ to przestrzeń funkcji ciągłych na $[a,b]$.

$B(\Omega)$ to przestrzeń funkcji ograniczonych. $B(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \|f\|_\Omega < \infty \}$

z normą $\|f\|_\Omega = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$

Twierdzenie Weierstrasse: Wszystkie funkcje ciągłe są ograniczone, tzn. Gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty i ograniczony, to $C(\Omega) \subset B(\Omega)$ — Będzie to potrzebne do pkt 16

Dowód:

$\exists_{t_n \in \Omega} : |f(t_n)| \longrightarrow \|f\|_\Omega \; (\in [0, +\infty))$

Z twierdzenia Bolzano-Weierstrasse w $\mathbb{R}^n$: (t_n) zawiera podciąg zbieżny $t_n \to t_0$ (z domkniętości Ω wiemy, że $t_0 \in \Omega$)

Skoro $f(t_n) \to f(t_0) \xrightarrow{\text{z ciągłości w pkt } t_0} |f(t_0)| = \|f\|_\Omega < \infty$

① <u>Zupełność przestrzeni $C[a,b]$ oraz $B(\Omega)$</u>

Tw.: $B(\Omega)$ oraz $C[a,b]$ z normą $\|\cdot\|_\Omega$ są przestrzeniami zupełnymi (a właściwie przestrzeniami Banacha).

(11) Dowód:

Wiemy, że $C[a,b] \subset B[a,b]$

Wykażemy, że $B(\Omega)$ jest zupełna w normie $\|f\|_\Omega = \sup_\Omega |f|$

W tym celu weźmy $\{f_n\}_0^\infty$ - ciąg Cauchy'ego. Wiemy, że

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,k \geq N} \|f_n - f_k\|_\Omega < \varepsilon \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,k\geq N} \sup |f_n^{(x)} - f_k^{(x)}| < \varepsilon \Rightarrow$

skoro sup, to i $\forall_x$

$\Rightarrow \forall_{\varepsilon>0} \forall_x \exists_N \forall_{n,k\geq N} |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

ciąg liczbowy Cauchy'ego liczb zespolonych, czyli zbieżny w $\mathbb{C}$

$\xRightarrow{k\to\infty} \forall_{\varepsilon>0} \forall_x \exists_N \forall_{n\geq N} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Jako, że $\forall_x |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \xRightarrow{\text{II własność trójkąta}} \forall_x ||f_n(x)| - |f(x)|| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall_x ||f(x)| - |f_n(x)|| \leq \varepsilon \Rightarrow \forall_x |f(x)| \leq \varepsilon + |f_n(x)| \Rightarrow f \in B(\Omega)$

czyli $\forall_{\{f_n\}} \{f_n\}_0^\infty \subset B(\Omega)$ spełniającego w normie $\|\,\|_\Omega$ warunek Cauchy'ego ma granicę należącą do $B(\Omega) \Rightarrow$

$\Rightarrow B(\Omega)$ jest zupełna ■

Gdy $\{f_n\}_0^\infty \subset C[a,b] \subset B[a,b]$ to ma on granicę w $B[a,b]$, ale czy należy ona do $C[a,b]$?

Lemat: $(\forall_n f_n \in C[a,b] \wedge f_n \rightrightarrows f) \Rightarrow f \in C[a,b]$

$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n\geq N} \|f_n - f\|_{[a,b]} < \varepsilon$

Oba założenia są spełnione, więc zbadamy, czy f jest ciągła.

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \overset{\text{ciągłość } f_n}{\leq}$

$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sup|f(x) - f_n(x)| + \sup|f_n(x) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq$

$\leq 2 \cdot \|f_n - f\|_{[a,b]} + \frac{\varepsilon}{3} \underset{\text{jednostajna zbieżność}}{\leq} 2\cdot\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Wiemy więc, że granica, czyli f należy do $C[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow C[a,b]$ jest zupełna ■

Zbiorem unormowanym nazywamy zbiór liniowy X, jeżeli każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowano liczbę nieujemną $\|x\|$ spełniającą warunki:

1) $\|x\| \geq 0$ oraz $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3) $\forall_{x_1, x_2 \in X} \ \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

Przestrzenią liniową unormowaną nazywamy przestrzeń metryczną, gdy odległość $d(x_1, x_2)$ każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in X$ (X - zbiór liniowy unormowany) określimy wzorem: $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$

Przestrzenią Banacha nazywamy przestrzeń unormowaną, zupełną ze względu na metrykę wyznaczoną przez normę.

1. Zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ spełniających warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ (bezwzględnie zbieżnych) w przestrzeni Banacha

$(X, \|\cdot\|)$ - przestrzeń Banacha

Def Szereg $\sum x_n$ jest zbieżny w przestrzeni $(X, \|\cdot\|)$ do $S \in X \Leftrightarrow$
$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_N \ \forall_{n \geq N} \ \|\sum_{k=1}^{n} x_k - S\| < \varepsilon$

Def. Szereg $\sum x_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, gdy szereg $\sum \|x_n\|$ (i jest to szereg liczbowy) jest zbieżny.

W $(X, \|\cdot\|)$ jako przestrzeni Banacha zbieżność jest równoważna warunkowi Cauchy'ego.

b.s.o $m > n$ Niech $\sum \|x_n\|$ - zbieżny. Sprawdzimy warunek Cauchy'ego dla $\sum x_n$

$$\|\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\| \underset{\text{subaddytywność normy}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$ dla m, n dość dużych dobranych z warunku Cauchy'ego dla $\sum \|x_k\|$

Jako że $\|\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon$ to z zupełności $(X, \|\cdot\|)$ $\sum x_k$ jest zbieżny.

(12)

(11) „Test majorant" Weierstrassa (WW)

Gdy $\forall_{x\in\Omega} |a_n(x)| \leq M_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$,

to $\sum_{n=1}^{k} a_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny (tj. $\sum_{n=1}^{k} a_n(x) \underset{\Omega}{\rightrightarrows} S(x)$).

Dowód:

Jako że $\forall_m \sum_{n=1}^{m} a_n(x) \in B(\Omega)$, to wystarczy sprawdzić jednostajny warunek Cauchy'ego (ponieważ jest to WW dla jednostajnej zbieżności:

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,k\geq N} \forall_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon$)

b.s.o. $m > n$

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right\|_\Omega = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right\|_\Omega = \sup_{x\in\Omega}\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$ (bo szeregi liczbowe zbieżne spełniają warunek Cauchy'ego)

Zatem $\sum_{n=1}^{k} a_n(x) \underset{\Omega}{\rightrightarrows} S(x) \in B(\Omega)$.

1) Twierdzenie o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi (zbieżność $f_n(a)$ i zbieżność jednostajna $f_n' \rightrightarrows g$ w $[a,b]$ implikują zbieżność jednostajną $f_n \rightrightarrows f$, gdzie $f \in C^1[a,b]$, $f' = g$). Zupełność przestrzeni $C^1[a,b]$

$C^n[a,b]$ to przestrzeń funkcji, które posiadają na $[a,b]$ pochodne każdego rzędu aż do n i n-ta pochodna jest ciągła. (na końcach przedziału pochodne są jednostronne)

Gdy $\forall_n \; f_n \in C^1[a,b]$, $\exists_{t_0 \in [a,b]} \; f_n(t_0) \to f(t_0)$ oraz

$\exists_{g \in C[a,b]} \; f_n' \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$,

to $\exists_{f \in C^1[a,b]} \; f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ oraz $f' = g$

Dowód:

Jako że $\forall_n \; f_n$ - ciągłe, to wystarczy zbadać warunek Cauchy'ego.
Jako że $\forall_n \; f_n' \in C[a,b]$, to ze wzoru Newtona-Leibniza:

$$f_n(t) = \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds + f_n(t_0)$$

a wtedy: $f_n(t) - f_k(t) = \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - f_k'(s))\,ds + f_n(t_0) - f_k(t_0)$

$$\forall_{t \in [a,b]} \; |f_n(t) - f_k(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - f_k'(s))\,ds + f_n(t_0) - f_k(t_0) \right| \leqslant$$

$\|u\|_1 \leqslant (b-a) \cdot \|u\|_{[a,b]}$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - f_k'(s))\,ds \right| + |f_n(t_0) - f_k(t_0)| = \|f_n' - f_k'\|_1 + |f_n(t_0) - f_k(t_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |t - t_0| \cdot \|f_n' - f_k'\|_{[t_0, t]} + |f_n(t_0) - f_k(t_0)| \leqslant (b-a) \cdot \|f_n' - f_k'\|_{[a,b]} + |f_n(t_0) - f_k(t_0)|$$

Zatem $\sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_k(t)| = \|f_n - f_k\|_{[a,b]} \leqslant$

$$\leqslant \underbrace{\|f_n' - f_k'\|_{[a,b]}}_{\wedge \; \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \cdot (b-a) + \underbrace{|f_n(t_0) - f_k(t_0)|}_{\wedge \; \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Czyli istnieje $f \in C[a,b]$ takie, że $f_n \rightrightarrows f$

$$f_n(t) = \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds + f_n(t_0) \overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} f(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + f(t_0)$$

Jako że $\forall_n \; f_n \in C[a,b]$ to $g \in C[a,b]$, czyli otrzymujemy:

$$f'(t) = \left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + f(t_0) \right)' = g(t), \text{ czyli } f' = g$$

Zatem $C^1[a,b]$ z normą $\|f\|_{C^1[a,b]} = |f(a)| + \|f'\|_{[a,b]}$ jest zupeł...

Aby udowodnić to twierdzenie dla przestrzeni $C^k[a,b]$

(które brzmi:

Gdy $\forall_n\, f_n \in C^k[a,b]$ i $\forall_{j \in \{0,\dots,k-1\}} \exists_{t_0 \in [a,b]}\, f_n^{(j)}(t_0) \to f^{(j)}(t_0)$

oraz $\exists_{g \in C[a,b]}\, f_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$,

to $\exists_{f \in C^k[a,b]}\, f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ i $f^{(k)} = g$)

wystarczy skorzystać z twierdzenia dla przypadku $C^1[a,b]$ k razy.

I. Szereg potęgowy

Szereg potęgowy o środku w punkcie z_0, to szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, gdzie $c_n \in \mathbb{C}$ (lub $c_n \in \mathbb{R}$) - stała

<u>Promień zbieżności</u> szeregu to kres górny takich liczb ϱ, że szereg potęgowy jest zbieżny wewnątrz koła $K(z_0, \varrho)$.
Wyraża się on wzorem: $R = \frac{1}{\varrho}$, gdzie $\varrho := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$
(wzór Cauchy'ego - Hadamarda).

$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \Rightarrow R = +\infty$

$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty \Rightarrow R = 0$

<u>Obszar zbieżności</u> szeregu funkcyjnego $\sum f_n(x)$, to zbiór tych $x \in \mathbb{C}$ (lub $x \in \mathbb{R}$), dla których $\sum f_n(x)$ jest zbieżny.
W przypadku szeregu potęgowego obszarem zbieżności jest koło $K(z_0, R)$ (ewentualnie z częścią brzegu).

<u>Kołem zbieżności</u> szeregu potęgowego nazywamy jego obszar zbieżności bez brzegu.

II. Zbieżność jednostajna wraz z pochodnymi na zwartych podzbiorach koła zbieżności

$E \subset K(z_0, R)$ i E zwarty.
Aby wykazać zbieżność jednostajną wraz z pochodnymi na zwartych podzbiorach koła zbieżności, wystarczy ją wykazać dla każdego koła domkniętego zawartego w kole zbieżności.

Wystarcza to, gdyż E jako zbiór zwarty jest domknięty i ograniczony, czyli $\sup_{x \in E} |x - z_0| \leq R$, bo $E \subset K(z_0, R)$ i $\sup_{x \in E} |x - z_0| \neq R$.
Gdyby $\sup_{x \in E} |x - z_0| = R$, to z domkniętości E:

$\exists_{x_0 \in E} \; |x - z_0| = R$, czyli $E \not\subset K(z_0, R)$ ↯

Zatem $\forall_E \sup_{x \in E} |x - z_0| < R \Rightarrow \exists_{\varepsilon > 0} \sup_{x \in E} |x - z_0| \leq R - \varepsilon$, czyli
E jest zawarty w kole domkniętym o promieniu $R - \varepsilon$, tj. $E \subset \overline{K}(z_0, R-\varepsilon)$

(11) Niech $S_k(z)=\sum_{n=0}^{k} c_n (z-z_0)^n$, $P_k(z)=\sum_{n=1}^{k} c_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}$

Oczywiście zachodzi $S_k' = P_k$ z liniowości pochodnej zespolonej

$\forall_z \; |z-z_0| \leq R-\varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z-z_0)^{n-1}$ są zbieżne jednostajnie

Z pierwiastkowego kryterium Cauchy'ego mamy zbieżność bezwzględną tych szeregów, gdyż:

$\limsup \sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}(z-z_0) \leq \limsup \sqrt[n]{|c_n|}(R-\varepsilon) =$
$= \frac{R-\varepsilon}{R}$ oraz

$\limsup \sqrt[n]{|c_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{z-z_0}}}_{\to 1}(z-z_0) \leq \frac{R-\varepsilon}{R}$

Zatem z tego, że $\forall_n \forall_{z \in \bar{K}(z_0, R-\varepsilon)} |c_n(z-z_0)^n| \leq |c_n|(R-\varepsilon)^n$ jest sumowalny, wynika, że z testu majorant Weierstrassa szereg $S(z)$ jest zbieżny jednostajnie. Analogicznie $\forall_n \forall_{z \in \bar{K}(z_0, R-\varepsilon)} |c_n n (z-z_0)^{n-1}| \leq |c_n| \cdot n (R-\varepsilon)^{n-1}$ jest sumowalny, więc szereg $P(z)$ jest zbieżny jednostajnie.

Z twierdzenia o zbieżności jednostajnej wraz z pochodnymi mamy: $P_k \rightrightarrows P$ oraz $S_k \rightrightarrows S$, a także $\forall_k \; S_k' = P_k$, toteż mamy zbieżność jednostajną wraz z pochodnymi na zwartych podzbiorach koła zbieżności

Dowód, że koło $K(z_0,R)$ jest największym obszarem zbieżności:
Stosując pierwiastkowe kryterium Cauchy'ego mamy:
$\limsup \sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z-z_0| = \frac{|z-z_0|}{R}$
Szereg jest zbieżny, gdy $\frac{|z-z_0|}{R} < 1 \iff |z-z_0| < R$
Zaś rozbieżny, gdy $\frac{|z-z_0|}{R} > 1 \iff |z-z_0| > R$

① Twierdzenie Abela o szeregach potęgowych zbieżnych na końcu przedziału zbieżności

Gdy szereg $\sum c_n$ o wyrazach zespolonych jest zbieżny i $S_k = \sum_{n=0}^{k} c_n$,

to $S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{f(x)}$

Dowód:

Niech $|x|<1$ oraz $S_{-1}=0$.

Wtedy $S_k - S_{k-1} = c_k$, czyli

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{m} S_n x^n - \sum_{n=0}^{m} S_{n-1} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{m} S_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{m} S_{n-1} x^n + \underbrace{S_{-1} x^0}_{0} = \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n + S_m x^m - \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^{n+1} =$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n + S_m x^m$$

$$\Big\downarrow m\to\infty$$

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S\cdot x^n = S\cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = S\cdot \frac{1}{1-x} \Rightarrow S = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S\cdot x^n$$

Wystarczy pokazać, że dla $x\to 1^-$ $S - f(x) \to 0$, co oznacza:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_x\ |1-x|<\delta \Rightarrow |S-f(x)|<\varepsilon$$

$$S - f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S\cdot x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (S-S_n) x^n$$

Z zał. i z definicji granicy wiemy, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_M \forall_{n\geq M}\ |S_n - S| < \varepsilon$$

$$|S-f(x)| = \left| (1-x)\left(\sum_{n=0}^{M} (S-S_n) x^n + \sum_{n=M+1}^{\infty} (S-S_n) x^n \right) \right| \leq$$

$$\leq \left|(1-x)\sum_{n=0}^{M} (S-S_n)x^n\right| + \left|(1-x)\sum_{n=M+1}^{\infty} (S-S_n)x^n\right| \overset{|x|<1}{\leq}$$

$$\leq \left|(1-x)\sum_{n=0}^{M} (S-S_n)\right| + |1-x| \sum_{n=M+1}^{\infty} |S-S_n|\cdot|x|^n \leq$$

$$\leq \left|(1-x)\sum_{n=0}^{M} (S-S_n)\right| + |1-x|\cdot\varepsilon\cdot \sum_{n=M+1}^{\infty} |x|^n =$$

$$= \left|(1-x)\sum_{n=0}^{M} (S-S_n)\right| + \varepsilon\cdot\frac{|1-x|}{1-|x|}\cdot|x|^{M+1} \overset{|x|<1}{=} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{M} (S_n-S)\right| + \varepsilon|x|^{M+1} <$$

$$< 2\varepsilon \qquad \text{dla } (1-x) < \frac{\varepsilon}{\sum_{n=0}^{M} (S_n - S)}$$

(15) (1) Zastosowanie do przedstawienia $\ln 2$ jako $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = (-1)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \left[\ln|1+t|\right]_0^x = \ln|1+x|$$

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n+1}}\right| = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$ Promień zbieżności: $R=1$,

szereg zbieżny w $(-1,1)$

$x=1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ z kryt. Leibniza zbieżny (bo $\frac{1}{n} \searrow 0$)

Stąd z tw. Abela $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln|x+1| = \ln 2$

I Definicje zbioru zwartych

Mówimy, że zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest <u>zwarty</u>, gdy każdy ciąg o wyrazach w zbiorze K ma podciąg zbieżny do granicy należącej do zbioru K.

Mówimy, że $K \subset \mathbb{R}^n$ jest <u>domknięty</u>, gdy każdy ciąg o wyrazach z K, który jest zbieżny w $\mathbb{R}^n$, ma granicę należącą do K.

$\Leftrightarrow \forall_{y \in \mathbb{R}^n \setminus K} \ \exists$ otoczenie y rozłączne ze zbiorem K

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{dist}(y, K) := \inf_{x \in K} \|y - x\| > 0$

odległość →

II Charakteryzacje zwartych podzbiorów w $\mathbb{R}^n$

Tw. Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty $\Leftrightarrow$ zbiór K jest domknięty i ograniczony

Dowód:

$(\Rightarrow)$ nie wprost, czyli:

$\exists_{(x_n) \subset K}: x_n \to y \wedge y \notin K$ (nie jest domknięty)

lub $\|x_n\| \to \infty$ (nie jest ograniczony)

Niech $\exists_{n_k \nearrow \infty}: x_{n_k} \to x_0 \wedge x_0 \in K$ (podciąg zbieżny do granicy należącej do K)

Jednocześnie albo $x_{n_k} \to y \xRightarrow{\text{z tw. o jednoznaczności granicy}} y = x_0$,

zaś $y \notin K$ i $x_0 \in K$ $\lightning$,

albo (x_{n_k}) jest ograniczony, zaś z zał. $\|x_{n_k}\| \to \infty$ $\lightning$

$(\Leftarrow)$

W ciągu $(x_n) \subset K$ (który jest ograniczony) wybieramy najpierw podciąg tak, by pierwsze współrzędne, czyli $Pr_1(x_{n_k})$ były zbieżne do granicy należącej do zbioru K.

Teraz dla każdego $j = 1, \dots, p < n$ (wymiar przestrzeni $\mathbb{R}^n$) w obrębie podciągu $\tilde{n}_k$ takiego, że $Pr_j(x_{\tilde{n}_k})$ - zbieżny, wybieramy dla każdego $j = 1, \dots, p+1$ dany podciąg $x_{\hat{n}_k}$ tak, by $Pr_j(x_{\hat{n}_k})$ - zbieżny (by kolejne współrzędne były zbieżne do granicy należącej do zbioru K)

$\forall_{j=1,\dots,n}$ Zbieżność w $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ zbieżność j-tych współrzędnych.

(16) (III) "Warunek pokryć skończonych"

Pokryciem zbioru $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy sumę zbiorów $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in J}$ taką, że $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$

Podpokrycie to pokrycie postaci $(U_i)_{i \in J'}$, gdzie $J' \subset J$.
Gdy J' - skończony, to mówimy, że z pokrycia $\mathcal{U}$ można wybrać podpokrycie skończone.

Mówimy, że pokrycie $\mathcal{U}$ jest otwarte, gdy $\forall_{i \in J}$ U_i jest zbiorem otwartym.

Tw. Lebesgue'a o pokryciu

Każde pokrycie otwarte zbioru zwartego zawiera podpokrycie skończone.

Dowód: gdy $K = [a,b]$ zbiór zwarty, $n=1$ - wymiar przestrzeni
$\forall_{i \in J}$ U_i - otwarte
Niech $E = \{ t \in [a,b] : [a,t]$ - ma podpokrycie skończone $\}$.
Wtedy $E \neq \emptyset$, bo $\exists_{\delta > 0}$ $\exists_{j \in J}$ $a \in U_j$, $[a-\delta, a+\delta] \subset U_j$ $\Rightarrow a+\delta \in E$
Przyjmijmy $t_0 := \sup E$.
Gdyby $t_0 < b$, to $\exists_{j_0}$ $t_0 \in U_{j_0} \Rightarrow \exists_{\varepsilon > 0}$ $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset U_{j_0}$ bo U_{j_0} - otwarty
Wtedy $\exists_{t_n \in E}$ $t_n \nearrow t_0$ $t_0 - \varepsilon < t_n \leq t_0$
więc $\exists$ skończone pokrycie $\{j_1, \dots, j_k\} \subset J : [a, t_n] \subset U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_k}$

Dołączając do niego zbiór U_{j_0} otrzymujemy skończone pokrycie $[a, t_0 + \varepsilon] \Rightarrow t_0 + \varepsilon \in E$ $\lightning$ (że $\sup E = t_0$)

Gdy $t_0 = b$, to $[a,b] \subset U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_k} \cup U_{j_0}$ - jest podpokryciem skończonym. ∎

(IV) Ograniczoność i osiąganie maksimum przez funkcje ciągłe na zbiorach zwartych w $\mathbb{R}^n$

Twierdzenie Weierstrassa dla zbiorów zwartych i funkcji ciągłych (16)

Z: E - zbiór zwarty, $E \subset \mathbb{R}^n$ $\wedge$ $f \in C(E)$

T: $\exists_{M,m} \forall_{x \in E} \quad m \leq f(x) \leq M \quad \wedge \quad \exists_{\alpha,\beta} \ f(\alpha) = \inf_E f \ \wedge \ f(\beta) = \sup_E f$

Dowód:

Niech $M = \sup_E f$.

Niech $\{x_n\} \in E$ - ciąg taki, by $f(x_n) \to \sup_E f$ (z def. sup),
ale E - zwarty, więc $\exists_{\{x_{n_k}\}}$ - zbieżny: $x_{n_k} \to x_0 \in E$.

Zaś z ciągłości wiemy, że $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$.
Z jednoznaczności granicy $f(x_0) = \sup_E f = \max_E f$.

Dla $m = \inf_E f$ - analogicznie.

① Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Każdy wielomian o wyrazach zespolonych posiada co najmniej jeden pierwiastek zespolony, tj.

Gdy $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \wedge a_n \neq 0 \wedge P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$

to $\exists_{z_0 \in \mathbb{C}}\ P(z_0) = 0$.

Dowód: b.s.o. $a_n = 1$

(nie wprost) Hp. $\forall_{z \in \mathbb{C}}\ P(z) \neq 0$

$|a| \geq a$

$|P(z)| = |z^n + \ldots + a_1 z + a_0| \overset{\text{II nierówność trójkąta}}{\geq} \big||z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0|\big| \geq$

$\geq |z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \geq |z^n| - |a_{n-1}||z^{n-1}| - \ldots - |a_1||z| - |a_0| =$

$= |z|^n \Big(1 - \underbrace{\frac{|a_{n-1}|}{|z|}}_{\xrightarrow{|z| \to +\infty} 0} - \ldots - \underbrace{\frac{|a_1|}{|z|^{n-1}}}_{\xrightarrow{|z| \to +\infty} 0} - \underbrace{\frac{|a_0|}{|z|^n}}_{\xrightarrow{|z| \to +\infty} 0}\Big)$

ustalone

Zatem, gdy $|z| \to +\infty$, to $|P(z)| \to +\infty$, czyli $\exists_{\delta > 0}\ |z| > \delta \Rightarrow |P(z)| > M$

Oznacza to, że $\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq \delta} |P(z)| = \inf_{z \in \overline{K}(0,\delta)} |P(z)|$

Jako że funkcja $|P(z)|$ jest ciągła i określona na zbiorze domkniętym $\overline{K}(0,\delta)$ to zachodzi tw. Weierstrassa (o osiąganiu kresów), czyli $\exists_{\alpha \in \overline{K}(0,\delta)}\ |P(\alpha)| = \inf_{z \in \overline{K}(0,\delta)} |P(z)|$

Zdefiniujmy teraz $Q(z) := \frac{P(z+\alpha)}{P(\alpha)}$, $Q(z)$ to wielomian

$\inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = \frac{\inf |P(z+\alpha)|}{|P(\alpha)|} = \frac{|P(\alpha)|}{|P(\alpha)|} = 1$ gdy $z = 0$,

czyli $\inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$, ale też $\inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = Q(0) = 1$

Niech $Q(z) := b_n z^n + \ldots + b_1 z + 1$. Wiemy, że istnieje minimalne $k \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $b_k \neq 0$. Wtedy:

$Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_{k+1} z^{k+1} + b_k z^k + 1 = 1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \ldots + b_n z^n$

Istnieje więc taka liczba $\varphi \in \mathbb{R}$, że $e^{ik\varphi} = \frac{-|b_k|}{b_k}$ (bo $R \cdot e^{i\varphi}$ to postać wykładnicza liczby zespolonej, $R = 1$). Niech $r \in \mathbb{R}_+$, mamy zatem:

$|Q(re^{i\varphi})| = |1 + b_k e^{i\varphi k} \cdot r^k + \ldots + b_n e^{i\varphi n} \cdot r^n| = |1 + b_k r^k (-\frac{|b_k|}{b_k}) + \ldots + b_n e^{i\varphi n} r^n| =$

$= |1 - |b_k| r^k + b_{k+1} e^{i\varphi(k+1)} r^{k+1} + \ldots + b_n e^{i\varphi n} \cdot r^n| =$

$= |1 + b_{k+1} e^{i\varphi(k+1)} \cdot r^{k+1} + \ldots + b_n e^{i\varphi n} \cdot r^n - |b_k| r^k| \leq$ – I nierówność trójkąta

$\leq |1 - |b_k| r^k| + |b_{k+1}| r^{k+1} + \ldots + |b_n| r^n \leq$ – zachodzi dla odp. małych r

(17) $\leqslant 1-|b_k|r^k+|b_{k+1}|r^{k+1}+\ldots+|b_n|r^n = 1-r^k(|b_k|-r|b_{k+1}|-\ldots-r^{n-k}|b_n|) < 1,$

bo $|b_k|-r|b_{k+1}|-\ldots-r^{n-k}|b_n| > 0$ dla r dość małych

Zatem $|Q(re^{i\varphi})|<1$, ale z zał. $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}}|Q(z)|=1$ ↯

Stąd $\exists_{z_0\in\mathbb{C}}\ P(z_0)=0$ ∎

Niech V-przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz $\langle \cdot,\cdot \rangle$-iloczyn skalarny w V ($\forall_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \langle v,v\rangle > 0$; $\langle \cdot,\cdot\rangle$-liniowe ze względu na pierwszą współrzędną, $\forall_{u,v\in V} \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$).

Definiujemy wtedy normę $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ dla $v\in V$

(I) Twierdzenie Pitagorasa dla normy określonej przez iloczyn skalarny

Gdy $u,v\in V$ i $u\perp v$, to $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Dowód:

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle =$

$= \overline{\langle u+v, u\rangle} + \overline{\langle u+v, v\rangle} = \overline{\langle u,u\rangle} + \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle u,v\rangle} + \overline{\langle v,v\rangle} =$

$= \langle u,u\rangle + \overline{(\overline{\langle u,v\rangle})} + \overline{\langle u,v\rangle} + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2 =$

$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)$

Gdy $u\perp v$, to $\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\langle u,v\rangle) = 0$

Wtedy: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

■

(II) Lemat o współczynnikach wektora $g = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$ względem układu ortonormalnego (e_n)

1) Niech $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$ - baza ortonormalna oraz $g\in V$ i $g = \sum_{i=1}^{n} c_ie_i$

Wtedy $\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ $c_i = \langle g, e_i\rangle$

Dowód:

$$\langle g, e_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_i \right\rangle \overset{\text{liniowość ze względu na pierwszą współrzędną}}{=} \sum_{k=1}^{n} \langle c_k e_k, e_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_i\rangle \overset{\forall_{k\neq i}\, e_k\perp e_i \Rightarrow \langle e_k, e_i\rangle = 0}{=}$$

$$= c_i \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{1 \text{ (bo układ ortonormalny)}} = c_i$$

■

Niech $\forall_{i\in\mathbb{Z}}$ $e_i\in B$ - baza ortonormalna V.

Wtedy szereg $\sum_{-\infty}^{\infty} c_ie_i$ (gdzie $c_i = \langle f, e_i\rangle$) nazywamy szeregiem Fouriera dla f względem układu $\{e_i\}_{-\infty}^{\infty}$. Zapisujemy to $f\sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_ie_i$ (nie wymagamy zbieżności szeregu).

Niech $S_k[f] := \sum_{i=-k}^{k} c_ie_i$ (tj. k-ta suma częściowa szeregu skojarzonego z f).

(18) Lemat (uwaga podstawowa):

Niech $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_i e_i$ i $S_k[f] = \sum_{i=-k}^{k} c_i e_i$

Wtedy: $f - S_k[f] \perp S_k[f]$

Dowód:

$$\langle f - S_k[f], S_k[f] \rangle = \langle f, S_k[f] \rangle - \langle S_k[f], S_k[f] \rangle =$$

$$= \langle f, \sum_{i=-k}^{k} c_i e_i \rangle - \langle \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n, \sum_{i=-k}^{k} c_i e_i \rangle \overset{\text{liniowość, sumy skończone}}{=}$$

$$= \sum_{i=-k}^{k} \left(\langle f, c_i e_i \rangle - \langle \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n, c_i e_i \rangle \right) \overset{\text{własności zespolonego iloczynu skalarnego}}{=}$$

$$= \sum_{i=-k}^{k} \overline{c_i} \left(\langle f, e_i \rangle - \langle \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n, e_i \rangle \right) = \sum_{i=-k}^{k} \overline{c_i} \left(\langle f, e_i \rangle - \sum_{n=-k}^{k} c_n \langle e_n, e_i \rangle \right) =$$

$$= \sum_{i=-k}^{k} \overline{c_i} \left(\langle f, e_i \rangle - c_i \langle e_i, e_i \rangle \right) = \sum_{i=-k}^{k} \overline{c_i} \left(\langle f, e_i \rangle - \underset{\langle f, e_i \rangle}{\underset{\|}{c_i}} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

(11) Lemat o współczynnikach - cd

2) Gdy $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ - układ ortonormalny względem iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ takiego, że $\|g\|_2 = \sqrt{\langle g, g \rangle}$ i $g = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$

to $\|g\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$

Dowód:

$$\|g\|_2^2 = \|S_n[g]\|_2^2 = \langle S_n[g], S_n[g] \rangle = \langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, \sum_{i=-n}^{n} c_i e_i \rangle =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k \langle e_k, \sum_{i=-n}^{n} c_i e_i \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \left(c_k \sum_{i=-n}^{n} \overline{c_i} \langle e_k, e_i \rangle \right) \underset{\text{ortogonalność}}{=}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot \overline{c_k} \underbrace{\langle e_k, e_k \rangle}_{=1} = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

(111) Nierówność Bessela dla układów ortonormalnych

Gdy $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_i e_i$, to mamy: $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|f\|_2^2$

Dowód:

Z uwagi podstawowej i z tw. Pitagorasa mamy:

$\|f\|_2^2 = \|f - S_k[f]\|_2^2 + \|S_k[f]\|_2^2$, czyli $\forall_{k \in \mathbb{N}} \; \|f\|_2^2 \geq \|S_k[f]\|_2^2$

Z lematu o współczynnikach: $\|S_k[f]\|_2^2 = \sum_{i=-k}^{k} |c_i|^2$

Zatem $\forall_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=-k}^{k} |c_i|^2 \leq \|f\|_2^2 \implies$

$\overset{k \to \infty}{\implies} \sum_{-\infty}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|f\|_2^2$

Lemat o całce funkcji okresowej

Jeżeli $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(t+x)=f(x)$ całkowalne w $[0,t]$,

to $\forall_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+t} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$

Dowód: $a\le 0$

$$\int_a^{a+t} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^t f(x)dx + \int_t^{a+t} f(x)dx$$

Pokażemy, że $\int_t^{a+t} f(x) = \int_0^a f(x)dx$.

$$\int_t^{a+t} f(x)dx \underset{z\,zał.}{=} \int_t^{a+t} f(x-t)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Gdy $a>0$, to $\exists_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ a\in[kt,(k+1)t]$. Wtedy:

$$\int_a^{a+t} f(x)dx = \int_a^{a+t} f(x-t)dx = \ldots = \int_a^{a+t} f(x-(k+1)t)dx = \int_{a-(k+1)t}^{a-kt} f(x)dx =$$

$$= \int_{a'}^{a'+t} f(x)dx$$

Jako że $a'\le 0$ to mamy $\int_{a'}^{a'+t} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$, zatem

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \int_a^{a+t} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$$

1) Ortogonalność układu trygonometrycznego

Rzeczywisty układ trygonometryczny:

$$\left(\ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots\right)$$

Zespolony układ trygonometryczny:

$$\left(\ldots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{0}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2x}, \ldots\right)$$

Pokażemy ortonormalność układu trygonometrycznego względem $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ (gdy f i g przyjmują tylko wartości rzeczywiste to $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Gdy f przyjmuje wartości zespolone $f(x)=u(x)+i\cdot v(x)$, gdzie u,v przyjmują wartości rzeczywiste, to $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} v(x)dx$

Układ rzeczywisty:

Niech $k,n\in\mathbb{N}$. Wtedy:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$$

(19)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\sin(kx)}^{\text{nieparzyste}}dx=0$$

lemat o całce f okresowej

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos(kx)dx=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{0}^{2k\pi}\cos x dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin(kx)\cdot\cos(kx)}_{\text{nieparzyste}}dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx \text{, bo:}$$

lemat o całce f okresowej

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+k)x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos(n+k)x\,dx=\frac{1}{(n+k)\pi}\int_{0}^{2(n+k)\pi}\cos x\,dx=0$$

Gdy $n\neq k$, to: $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx$, bo:

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-n)x=$$ lemat o całce f okresowej

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos(k-n)x\,dx=\frac{1}{\pi(k-n)}\cdot\int_{0}^{2(k-n)\pi}\cos x\,dx=0$$

Czyli:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx=0\\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx=0\end{cases}$$

Gdy zaś $k=n$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx=\frac{1}{k\pi}\int_{0}^{2k\pi}\cos^2x\,dx=\frac{1}{k\pi}\left(\left[\sin x\cos x\right]_0^{2k\pi}+\int_{0}^{2k\pi}\sin^2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left(\int_{0}^{2k\pi}dx-\int_{0}^{2k\pi}\cos^2x\,dx\right)=\frac{2k\pi}{k\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_{-k\pi}^{k\pi}\cos^2x\,dx=2-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\,dx$$

Czyli:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx=1$$

<u>Układ zespolony:</u>

Niech $k,n\in\mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\cdot\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-n)x\,dx+i\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{\sin(k-n)x}^{\text{nieparzyste}}dx\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-n)x\,dx=$$ lemat o całce f okresowej

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos(k-n)x\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}dx & \text{gdy } k=n\\ \frac{1}{2\pi(k-n)}\int_{0}^{2(k-n)\pi}\cos x\,dx & \text{gdy } k\neq n\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{gdy } k=n\\ 0 & \text{gdy } k\neq n\end{cases}$$

(II) Szereg Fouriera – wzory na współczynniki

1) Gdy szereg Fouriera jest postaci: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, to:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \text{bo} \quad \langle f, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad \text{bo} \quad \langle f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\cdot\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \cdot \cos nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad \text{bo} \quad \langle f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\cdot\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \cdot \sin nx$$

2) Gdy szereg Fouriera jest postaci $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, to:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}, \quad \text{bo} \quad \langle f, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\cdot}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt \cdot e^{inx}$$

(III) Szereg Fouriera – wzory na sumy częściowe

1) Zespolony:

Zał. $f(x+2\pi) = f(x)$

$$\sum_{n=-k}^{k} e^{in(x-t)} = \sum_{n=-k}^{k} e^{i\dots}$$

$$S_k[f] = \sum_{n=-k}^{k} a_n e^{inx} = \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{e^{int}}\cdot e^{inx}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sum_{n=-k}^{k} e^{in(x-t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-k}^{k} e^{in(t-x)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ik(t-x)}\cdot\frac{1-e^{i(2k+1)(t-x)}}{1-e^{i(t-x)}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{e^{-i\frac{(t-x)}{2}}}{e^{-i\frac{(t-x)}{2}}}\cdot\frac{e^{ik(t-x)}-e^{i(k+1)(t-x)}}{1-e^{i(t-x)}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{e^{i(k+\frac{1}{2})(t-x)}-e^{-i(k+\frac{1}{2})(t-x)}}{e^{i(\frac{t-x}{2})}-e^{-i(\frac{t-x}{2})}}\,dt = \left\{ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{\sin((k+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin(\frac{t-x}{2})}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot D_k(t-x)\,dt = (*)$$

Funkcję $D_k(x) = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ nazywamy jądrem całkowym Dirichleta.

$D_k(x)$ jest parzysta i okresowa o okresie 2π.

$$(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(t-x)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\cdot D_k(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{iloczyn funkcji okresowych} \\ \text{o okresie } 2\pi \text{ jest funkcją} \\ \text{okresową o okresie } 2\pi\text{, lemat} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_k(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x) D_k(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x) D_k(x)\,dt =$$

całkowanie przez podstawienie

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\pi}^{0}(-1) f(x-t) D_k(-t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(t+x) D_k(x)\,dt\right) = \left\{ \int_a^b g(t)\,dt = -\int_b^a g(t)\,dt \right.$$

$D_k(t) = \dots$ $\}$ =

(19)
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_k(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_k(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x+2t)+f(x-2t)\right)D_k(2t)\cdot 2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x+2t)+f(x-2t)\right)\frac{\sin(2k+1)t}{\sin t}\,dt$$

2) Szereg rzeczywisty

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{zał. } \sum_{n=1}^{\infty} = 0)$$

$$S_k[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\pi}\int f(t)(\cos nt\cos nx + \sin nt \sin nx)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + 2\sum_{n=1}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\cos n(t-x)}_{\cos\text{-parzysty}}\,dt =$$

$\sin n x + \sin n(-x) = 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)\cdot\sum_{n=-k}^{k}\cos n(t-x) + f(t)\sum_{n=-k}^{k} i\sin n(t-x)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sum_{n=-k}^{k} e^{in(t-x)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot D_k(t-x)\,dt$$

Lemat Riemanna-Lebesgue'a

Gdy f jest całkowalna (jako całka niewłaściwa) z modułem w $[a,b]$ ($a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ (nie $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$)), to $\int_a^b f(x)\sin nx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ oraz $\int_a^b f(x)\cos nx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(Dowód dla $\sin nx$, $\cos nx$ analogicznie.)

Dowód:

Teraz wystarczy pokazać dla $[a,b]\to\mathbb{R}$, bo gdyby f przyjmowała wartości nierzeczywiste to $f(x) = u(x) + i\cdot v(x)$ i mamy:
$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \int_a^b u(x)\sin nx\,dx + i\int_a^b v(x)\sin nx\,dx$, a wtedy z prawdziwości tw. dla funkcji rzeczywistej mamy tezę.

Jako że f jest całkowalna jako całka niewłaściwa na przedziale skończonym to zgodnie z definicją (Fichtenholz, II tom) f ma skończoną liczbę punktów osobliwych. Niech więc $T = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b)$ będzie układem wszystkich punktów osobliwych f oraz punktów a i b.
Niech też $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ $\lambda_i \in (t_{i-1}, t_i)$ - będą ustalone. Wtedy:

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = \sum_{i=1}^{k}\left(\int_{t_{i-1}}^{\lambda_i} f(x)\sin nx\,dx + \int_{\lambda_i}^{t_i} f(x)\sin nx\,dx\right)$$

Pokażemy, że $\int_{\lambda_i} f(x)\sin nx\, dx < \frac{\varepsilon}{2k}$. Dla $\int_{t_{i-1}}^{\lambda_i} f(x)\sin nx\, dx$ – analogicznie. (18)

Niech $x = (\lambda_i = \alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \ldots < \alpha_{im} =$) – podział odcinka $[\lambda_i, t_i]$ na takie odcinki, gdzie $\sin nx$ jest stałego znaku.

Niech β – dowolne, $\beta \in (\lambda_i, t_i)$. Wtedy zdefiniujemy:

$$f_\beta(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [\lambda_i, \beta] \\ 0, & x \in (\beta, t_i] \end{cases}$$

Wtedy $\int_{\lambda_i}^{t_i} f_\beta(x)\sin nx\, dx$ to całka oznaczona Riemanna, zatem f_β – ograniczona. Niech $|f_\beta(x)| < M$. Wtedy:

Zatem: $\forall_{\beta \in (\lambda_i, t_i)} \left|\int_{\lambda_i}^{\lambda_i} f_\beta(x)\sin nx\, dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{4k}$ dla dużych n

$$\left|\int_{\lambda_i}^{t_i} f(t)\sin nx\, dx\right| = \left|\int_{\lambda_i}^{t_i} f_\beta(x)\sin nx\, dx + \int_{\lambda_i}^{t_i} (f(x) - f_\beta(x))\sin nx\, dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{\lambda_i}^{t_i} f_\beta(x)\sin nx\, dx\right| + \int_{\lambda_i}^{t_i} |f(x) - f_\beta(x)| \cdot \underbrace{|\sin nx|}_{\leq 1}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4k} + \int_{\lambda_i}^{t_i} |f(x) - f_\beta(x)|\, dx = \frac{\varepsilon}{4k} + \int_{\lambda_i}^{\beta} |f(x) - f_\beta(x)|\, dx + \int_{\beta}^{t_i} |f(x) - f_\beta(x)|\, dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4k} + \int_{\beta}^{t_i} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4k} + \frac{\varepsilon}{4k} = \frac{\varepsilon}{2k} \text{ dla } \beta \text{ bliskich } t_i$$

Ostatecznie: $\left|\int_a^b f(t)\sin nx\, dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} \left(\int_{t_{i-1}}^{\lambda_i} f(x)\sin nx\, dx + \int_{\lambda_i}^{t_i} f(x)\sin nx\, dx\right)\right| <$

$< \left|\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2k}\right)\right| = \varepsilon$ ∎

Twierdzenie o całce Dirichleta

Gdy f – monotoniczna w $(0, a]$, ograniczona (lub $f \in BV$), to

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot f(0^+), \text{ gdzie } f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Dowód: Rozpoczniemy od pokazania tezy dla $f \equiv 1$.

Niech $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n \sin nx}{nx}\, dx = \int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Całka ta jest zbieżna z kryterium Dirichleta, więc wystarczy policzyć sumę dla pewnego podciągu, by znaleźć wartość tej granicy.

Niech $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$. Z sumy częściowej rzeczywistego szeregu Fouriera wiemy, że $K_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} D_n(2x)\, dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(2kx)\right) dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \cos kt\, dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Jako że $I_{2n+1} - K_{2n-1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - x}{x\sin x}\sin(2n+1)x\,dx$

Ponadto funkcja $\frac{\sin x - x}{x \sin x}$ jest ciągła na przedziale $(0, \frac{\pi}{2}]$

oraz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = 0 \quad \Big(\overset{[\frac{0}{0}]}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{[\frac{0}{0}]}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x \to 0}{\underbrace{\cos x}_{\to 1} + \underbrace{\cos x}_{\to 1} - \underbrace{x\sin x}_{\to 0}} = 0$

lub ze wzoru Taylora z resztą Peano: $\sin x = x + 0 + o(x^2)$ czyli

$\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \frac{o(x^2)}{x\sin x} = \frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} \xrightarrow{x\to 0} \left[\frac{0}{1}\right] = 0 \Big)$

więc ograniczona. Z tego wniosek, że funkcja $\frac{\sin x - x}{x\sin x}$ jest całkowalna i to z modułem (bo jest stałego znaku), więc (bo $\sin x \leq x$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$)

z lematu Riemanna-Lebesgue'a mamy:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - x}{x\sin x}\sin(2n+1)x\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Czyli: $I_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

$$\forall_{a>0} \int\limits_0^a \frac{\sin nx}{x}dx = \int\limits_0^a \frac{n\sin nx}{nx}dx = \int\limits_0^{na}\frac{\sin t}{t}dt \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Teraz dowiedziemy twierdzenia w formie ogólnej:

Niech $g_n = \frac{\sin nx}{x}$ i $0 < c < a$. Wtedy

$$\int\limits_0^a f(x)g_n(x)dx = \int\limits_0^c f(x)g_n(x)dx + \int\limits_c^a f(x)g_n(x)dx \text{, ale:}$$

$$\int\limits_c^a f(x)g_n(x)dx = \int\limits_c^a \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{\Rightarrow \text{ całkowalne} \Rightarrow \text{ całkowalne z modułem}} \sin nx\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ z lematu Riemanna-Lebesgue'a}$$

$$\int\limits_0^c f(x)g_n(x)dx \overset{\text{wzór Bonneta}}{=} f(0^+)\cdot\int\limits_0^{\lambda} g_n(x)dx + f(c)\cdot\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx =$$

$$= f(0^+)\int\limits_0^{\lambda} g_n(x)dx + f(0^+)\cdot\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx - f(0^+)\cdot\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx + f(c)\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx =$$

$$= f(0^+)\cdot\int\limits_0^c g_n(x)dx + (f(c) - f(0^+))\cdot\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx$$

$$\left|\int\limits_0^c f(x)g_n(x)dx - f(0^+)\cdot\frac{\pi}{2}\right| = \left|f(0^+)\cdot\int\limits_0^c g_n(x)dx + (f(c) - f(0^+))\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx - f(0^+)\frac{\pi}{2}\right|$$

$$= \left|f(0^+)\cdot\left(\int\limits_0^c g_n(x)dx - \frac{\pi}{2}\right) + (f(c) + f(0^+))\cdot\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)dx\right|$$

Pokażemy teraz, że $\exists_M \forall_{0<\lambda<c} \forall_n \left|\int\limits_{\lambda}^c g_n(x)\right| \leq M$

Niech $\beta \in [0, c]$. Gdy $\beta \leq \frac{\pi}{n}$:

g_n jest nieujemne na przedziale $[0, \frac{\pi}{n}]$

$$\int_0^\beta g_n(x)dx = \int_0^\beta \frac{\sin nx}{x}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nx}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{n\sin nx}{nx}dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt$$

Gdy $\beta > \frac{\pi}{n}$

$$\int_0^\beta g_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} g_n(x)dx + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\beta} g_n(x)dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt + \int_\pi^{n\beta} \frac{\sin t}{t}dt \overset{\text{wzór Bonneta}}{=}$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_\pi^\xi \sin t\,dt + \frac{1}{n\beta}\int_\xi^{n\beta} \sin t\,dt \leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{n\beta} \leq$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{M}{2} \quad \text{Wtedy:}$$

$$\left|\int_\lambda^c \frac{\sin nx}{x}dx\right| = \left|\int_0^c \frac{\sin nx}{x}dx - \int_0^\lambda \frac{\sin nx}{x}dx\right| \leq \left|\int_0^c g_n(x)dx\right| + \left|\int_0^\lambda g_n(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

Zatem

$$\left|\int_0^a f(x)\frac{\sin x}{x}dx - \frac{\pi}{2}\cdot f(0^+)\right| \leq \left|\int_c^a f(x)\cdot g_n(x)dx\right| + \left|\int_0^c f(x)\cdot g_n(x)dx - \frac{\pi}{2}\cdot f(0^+)\right| =$$

$$= \left|\int_c^a f(x)g_n(x)dx\right| + \left|f(0^+)\cdot\left(\int_0^c \frac{\sin nx}{x}dx - \frac{\pi}{2}\right) + (f(c) + f(0^+))\cdot\int_\lambda^c g_n(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left|\int_c^a f(x)g_n(x)dx\right|}_{\wedge\ \frac{\varepsilon}{3}\ \text{(z lematu Riemanna-Lebesgue'a dla dość dużych } n)} + |f(0^+)|\cdot\underbrace{\left|\int_0^{nc}\frac{\sin t}{t}dt - \frac{\pi}{2}\right|}_{\wedge\ \frac{\varepsilon}{3f(0^+)}\ \text{dla dość dużych } n \text{ z równości } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}} + \underbrace{|f(c) - f(0^+)|}_{\wedge\ \frac{\varepsilon}{3M}\ \text{dla } c \text{ dość bliskich } 0}\cdot\underbrace{\left|\int_\lambda^c g_n(x)dx\right|}_{\wedge\!\!|\ M} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + f(0^+)\cdot\frac{\varepsilon}{3f(0^+)} + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M = \varepsilon$$ (zaś gdy $f(0^+) = 0$ to pozostałe szacujemy przez $\frac{\varepsilon}{2}$) ∎

IV Twierdzenie Dirichleta (zbieżność punktowa)

Gdy $f: [-\pi, \pi]$ (f przedłużamy okresowo na całą prostą) jest funkcją taką, że:

1) f ma wahanie skończone

2) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty$

to wówczas: $S_n[f](t) \longrightarrow \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$, gdzie $f(t+0) := \lim_{x\to t^+} f(x)$

$f(t-0) := \lim_{x\to t^-} f(x)$

Dowód:

Niech $g(x) := \frac{f(t+2x) + f(t-2x)}{2}$, $g \in BV$

Wtedy:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = g(0^+)$$

Ze wzoru na sumę częściową mamy:

$$S_n[f](t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(t-2x)+f(t+2x)\right) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx$$

Z twierdzenia o całce Dirichleta wiemy, że $\frac{2}{\pi}\int_0^a g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} g(0^+)$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^a g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^a g(x)\frac{\sin x - x}{x\sin x}\sin(2n+1)x\,dx$$

Wiemy też, że $2g(x) = f(t-2x)+f(t+2x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g(x)|\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(t-2x)|\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(t+2x)|\,dx$$

Zatem $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g(x)|\,dx$ - skończone (bo f - całkowalne z modułem)

Jako że $\frac{\sin x - x}{x\sin x}$ jest ograniczone na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$, to z kryterium porównawczego całka $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|g(x)\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right|dx$ jest zbieżna, co daje nam prawo zastosować lemat Riemanna-Lebesgue'a na całce $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin x - x}{x\sin x}\cdot\sin(2n+1)x\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$, czyli:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx$ i $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$ mają tę samą granicę przy $n\to\infty$, co daje nam:

$$S_n[f](t) \xrightarrow{n\to\infty} g(0^+) = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

Niech $S_k = \sum_{n=-k}^{k} a_n$ - dowolne sumy.

Definiujemy wtedy tzw. średnie Cesàro: $\sigma_n := \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$

Zdefiniujmy też jądro całkowe Fejéra: $K_n(x) := \frac{D_0(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1}$, gdzie $D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$

Wyprowadźmy wzór na $K_n(x)$:

$$D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x) = \frac{e^{ix} - e^{-i\cdot 0\cdot x}}{e^{ix}-1} + \frac{e^{i2x} - e^{-ix}}{e^{ix}-1} + \ldots + \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix}-1} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1)x} - \sum_{k=0}^{n} e^{-ikx}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{ix}\cdot\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} - e^{-inx}\cdot\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}}{e^{ix}-1} =$$

$$= \frac{(e^{i(n+1)x}-1)(e^{ix}-e^{-inx})}{(e^{ix}-1)^2} = \frac{-e^{ix}(e^{i(n+1)x}-1)(e^{-i(n+1)x}-1)}{-(e^{ix}-1)(1-e^{ix})} =$$

$$= \frac{-e^0(e^0 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x} + 1)}{-e^{-ix}(e^{ix}-1)(1-e^{ix})} = \frac{2-(e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x})}{2-(e^{ix}+e^{-ix})} = \frac{2-2\cos(n+1)x}{2-2\cos x}$$

Zatem $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}$

Własności jądra Fejéra:

1) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$

2) $K_n(x) \geq 0$

3) $\forall_{\delta>0} \sup_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} K_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Dowód 1):

Pokażemy najpierw, że $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 2\pi$.

Ze wzoru na sumę częściową rzeczywistego układu Fouriera mamy:

$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx$, czyli:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx = 2\pi + 2\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$= 2\pi + 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Wtedy: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot 2\pi = 1$$

(20)

Dowód 2):

Ze wzoru na $\sin\frac{\alpha}{2}$ mamy: $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$$

Dowód 3):

Jako że $\cos kx$ jest parzysty, to $K_n(x)$ jest parzyste. Wystarczy więc pokazać, że $\sup\limits_{[\delta,\pi]} K_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Wiemy, że $\cos x$ jest malejący na przedziale $[\delta,\pi]$. Wtedy: $1-\cos x \geq 1-\cos\delta$

Zatem:

$$\forall_{x\in[\delta,\pi]}\ K_n(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x} \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{1-\cos\delta}, \text{ czyli}$$

$$\forall_{\delta>0}\ \sup_{x\in[\delta,\pi]} K_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{1-\cos\delta} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Zastosujemy teraz średnie Cesàro do sum częściowych szeregu Fouriera:

$$\sigma_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{S_k[f](x)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{D_k(t)}{n+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n} D_k(t)}{n+1}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,K_n(t)\,dt$$

① Twierdzenie Fejéra

Gdy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ - ciągła, okresowa o okresie 2π,

to $\sigma_n[f] \rightrightarrows f$

Dowód:

Z własności 1) jądra Fejéra mamy:

$$f(x) = f(x)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,K_n(t)\,dt \quad \text{czyli:}$$

$$\sigma_n[f](x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt$$

Niech x - dowolne, $x\in[-\pi,\pi]$ (z okresowości będzie zbieżność dla innych x)

$$\left|\sigma_n[f](x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\big(f(x+t)-f(x)\big)K_n(t)\,dt\right|$$

Jako że f ciągła na $[-\delta,\delta]$ to z tw. Cantora jest jednostajnie ciągła.

Zatem dla dość małego δ zachodzi $t\in[-\delta,\delta]$ $|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ - dowolne

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt\right| \overset{2)\ K_n(x)\geq 0}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt <$$

$$< \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_n(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt}_{\overset{1)}{=}1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Z ciągłości f i z tw. Weierstrassa mamy $\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|<+\infty$

Z 3) własności jądra Fejéra mamy, że $\exists_{n_0}\ \forall_{n\geq n_0}\ \forall_{x\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]}\ K_n(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{4\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|}$

Oczywiście mamy też:

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant|f(x+t)|+|f(x)|\leqslant 2\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|$$

Ostatecznie:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\underbrace{|f(x+t)-f(x)|}_{2\sup\limits_{t\in[-\pi,-\delta]}|f(t)|\leq 2\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|}K_n(t)\ldots$$

$+ \ldots \leqslant \int_{-\pi}^{-\delta} 2\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|\cdot K\ldots$

$\leqslant 2\cdot 2\sup\limits_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|\cdot\frac{\varepsilon}{4\sup\ldots}$

$$\cancel{\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,K_n(t)\,dt\leqslant}$$

$$\cancel{\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(t)|\cdot\frac{\varepsilon}{4\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)|}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}}$$

A zatem:

$$\forall_{x\in[-\pi,\pi]}\ |\sigma_n[f](x)-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}(f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt\right|+\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))K_n(t)\,dt\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\implies\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n\geq n_0}\ \sup_{x\in[-\pi,\pi]}|\sigma_n[f](x)-f(x)|\leqslant\varepsilon \quad\blacksquare$$

11 Zupełność układu trygonometrycznego

Def. Układ wektorów nazywamy zupełnym, gdy jedyny wektor prostopadły do wszystkich z układu to $\bar{0}$.

Tw. Układ trygonometryczny jest zupełny.

Dowód (nie wprost):

Hp. Niech $\exists_f\ \|f\|\neq 0\ \wedge\ \forall_{i\in\mathbb{Z}}\ \langle f,\varphi_i\rangle=0$, gdzie $(\varphi_i)_{-\infty}^{\infty}$ - układ trygonometryczny

Wtedy mamy z drugiego założenia:

$$\forall_{i \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \equiv 0 \Rightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=-k}^{k} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall_{k \in \mathbb{N}} S_k \equiv 0 \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n} S_j \equiv 0 \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n \equiv 0$$

czyli $\sigma_n \rightrightarrows 0$, ale $\underset{\text{z tw. Fejéra}}{\sigma_n \rightrightarrows f} \underset{\text{z jednoznaczności granic}}{\Rightarrow} f = \bar{0}$ ↯ sprzeczność z $\|f\| \neq 0$

Tak więc:

$\|f\| = 0 \vee \exists_{i \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_i \rangle \neq 0$, co z definicji daje nam zupełność układu trygonometrycznego (utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie).

I Zbieżność szeregu Fouriera $S[f]$ (średniokwadratowa)

Zał. $\|f\|_2 < \infty$, f - ciągła

teza: $\|f - S_k[f]\|_2 \longrightarrow 0$

Dowód:

Z tw. Fejéra wiemy, że $\|\sigma_n[f] - f\|_{[-\pi,\pi]} \longrightarrow 0$

Z porównania norm mamy: $\sqrt{\pi-(-\pi)}\,\|\sigma_n[f]-f\|_2 \leq |\pi-(-\pi)|\,\|\sigma_n[f]-f\|_{[-\pi,\pi]}$

Poza tym: $\underbrace{f - S_n[f]}_{\in\, lin\{\dots, e_{-n-2}, e_{-n-1}, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\}} \perp \underbrace{S_n[f] - \sigma_n[f]}_{\in\, lin\{e_{-n}, e_{-n+1}, \dots, e_{n-1}, e_n\}}$

bo:

Więc z tw. Pitagorasa:

$$\|f - \sigma_n[f]\|_2^2 = \|f - S_n[f]\|_2^2 + \|S_n[f] - \sigma_n[f]\|_2^2$$

$$\|f - \sigma_n[f]\|_2^2 \geq \|f - S_n[f]\|_2^2$$

$$\|f - S_n[f]\|_2 \leq \|f - \sigma_n[f]\|_2 \underset{\text{z porównania norm}}{\leq} \sqrt{2\pi}\,\underbrace{\|f - \sigma_n[f]\|_{[-\pi,\pi]}}_{\to 0 \text{ z tw. Fejéra}}$$

zatem $\|f - S_n[f]\|_2 \longrightarrow 0$

II Tożsamość Persevala

Gdy $\|f\|_2 < \infty$, to $\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)^2$,

gdzie $c_n(f)^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx\right)^2$

Dowód:

Z tw. Pitagorasa i z uwagi podstawowej:

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ \|f\|_2^2 = \|S_k[f]\|_2^2 + \underbrace{\|f - S_k[f]\|_2^2}_{\to 0 \text{ ze zbieżności średniokwadratowej}}$$

$$\|S_k[f]\|_2^2 = \langle S_k[f], S_k[f]\rangle = \Big\langle \sum_{i=-k}^{k} \overbrace{\langle f, e_i\rangle}^{a_i} e_i, \sum_{j=-k}^{k} \overbrace{\langle f, e_j\rangle}^{a_j} e_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=-k}^{k} a_i \Big\langle e_i, \sum_{j=-k}^{k} a_j e_j \Big\rangle = \sum_{i=-k}^{k} a_i \Big(\sum_{j=-k}^{k} \overline{a_j} \langle e_i, e_j \rangle \Big) \underset{\text{układ ortonormalny}}{=}$$

$$= \sum_{i=-k}^{k} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=-k}^{k} |a_i|^2$$

zatem:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i=-k}^{k} |a_i|^2 + \|f - S_k[f]\|_2^2 \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_i|^2 = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)^2$$

I Granice iterowane

Gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) - punkt skupienia Ω, to funkcje $\alpha(y) := \lim_{x \to x_0} f(x,y)$, $\beta(x) = \lim_{y \to y_0} f(x,y)$ nazywamy granicami częściowymi funkcji f w punkcie (x_0, y_0) (α jest określone w pewnym otoczeniu punktu y_0 zawartym w $\mathbb{R}$, β jest określone w pewnym otoczeniu punktu x_0 zawartym w $\mathbb{R}$, granice częściowe nie zawsze istnieją).

Gdy istnieją granice:

$$\lim_{y \to y_0} \alpha(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) \qquad \lim_{x \to x_0} \beta(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)$$

to nazywamy je granicami iterowanymi.

II Pierwsze twierdzenie o granicy podwójnej

Gdy $f: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) - punkt skupienia Ω, $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = g$, w pewnym sąsiedztwie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y_0 istnieje $\alpha(y) := \lim_{x \to x_0} f(x,y)$, to istnieje $\lim_{y \to y_0} \alpha(y)$ oraz $\lim_{y \to y_0} \alpha(y) = g$

Dowód:

Niech $\varepsilon > 0$ - ustalone

Wtedy $\exists_{\delta > 0}$ $\begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta \\ 0 < |y - y_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - g| < \varepsilon$

Przy przejściu do granicy przy $x \to x_0$: $|\alpha(\alpha) - g| \leq \varepsilon$ (jeśli $0 < |y - y_0| < \varepsilon$)

Zatem $\lim_{y \to y_0} \alpha(y) = g$ ∎

Uwaga: Wystarczy założyć, że $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ x \neq x_0 \\ y \neq y_0}} f(x,y) = g$ zamiast $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = g$

(22)

III) Przykłady braku równości 2 granic iterowanych

1) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$, $x\neq y$

$x_0=y_0=0$ $\quad \alpha(y)=\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}=\begin{cases}-1 & ,y\neq 0\\ 1 & ,y=0\end{cases}$

$$\beta(x)=\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}=\begin{cases}1 & ,x\neq 0\\ -1 & ,x=0\end{cases}$$

Granice iterowane są różne: $\lim_{y\to 0}\alpha(y)=-1\neq 1=\lim_{x\to 0}\beta(x)$

2) $f(x,y)=x\cdot\sin\frac{1}{y}$, $y\neq 0$

Nie istnieje $\beta(x)$ dla $x\neq 0$ $\left(\beta(x)=\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{y}\right)$, ale istnieje granica podwójna: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\sin\frac{1}{y}=0$

3) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$

$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}0=0$ $\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$

Nie istnieje granica podwójna (bo gdy $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ to $f(x,y)=\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\cos\varphi\sin\varphi$).

① Pochodne cząstkowe a różniczkowalność funkcji n zmiennych

Lemat (o postaci różniczki):

Gdy $f:\mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$, f - różniczkowalna w pkt x_0

to $L(h) = d_{x_0} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$

Dowód:

Niech: $\{e_1,\dots,e_n\}$ - baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$, $t>0$

f różniczkowalna w x_0, więc: $f(x+te_i)-f(x) = L(te_i) + \|te_i\|\,\alpha(te_i)$

Dzieląc równość obustronnie przez t i przechodząc do granicy mamy:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} = L(e_i),\ \forall_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = L(e_i), \text{ czyli}$$

$$L(h) = L(h_1,\dots,h_n) = d_x f(h_1,\dots,h_n) = d_x f(h_1,0,0,\dots,0)+\dots+d_x f(0,\dots,0,h_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot h_i = \nabla f \circ h$$

<u>Twierdzenie</u>

Gdy $f:\mathbb{R}^n \supset E \to \mathbb{R}$, gdzie E - zbiór otwarty; w pewnym otoczeniu punktu $P_0 \in E$ istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (dla $i\in\{1,\dots,n\}$), które są ciągłe w P_0,

to funkcja f jest różniczkowalna w P_0, czyli $f(P_0+h)-f(P_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\cdot h_i + \|h\|\alpha($

Dowód:

Dobieramy $r>0$ tak, by w kuli $K(P_0,r)$ istniały pochodne cząstkowe. Rozważamy takie h, że $\|h\|<r$.

Niech $P_0=(x_1,\dots,x_n)$, $h=(h_1,\dots,h_n)$

$f(P_0+h)-f(P_0) = \Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n$, gdzie

$$\Delta_1 = f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3,\dots,x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)$$
$$\Delta_2 = f(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3,\dots,x_n+h_n) - f(x_1,x_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)$$
$$\vdots$$
$$\Delta_n = f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n+h_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

rozkład przyrostu h na przyrost po współrzędnych

Niech $\{e_1,\dots,e_n\}$ - baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$.

Niech też $\tilde{P}_i = (x_1,\dots,x_i, x_{i+1}+h_{i+1},\dots,x_n+h_n)$

(23) Wtedy dla każdego $i \in \{1,\dots,n\}$ definiujemy funkcję:

$\varphi_i(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1} + h_{i+1}, \dots, x_n + h_n)$

określoną dla $t \in [0, h_i]$.

W tym przedziale $\varphi_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{P}_i + t e_i)$, zatem z tw. Lagrange'a:

$\exists_{\xi_i \in (0, h_i)} \quad \Delta_i = \varphi_i(h_i) - \varphi_i(0) = h_i \cdot \varphi_i'(\xi_i) = h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{P}_i + \xi_i e_i)$

Przypomnijmy teraz: $f(P_0 + h) - f(P_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \cdot h_i + \|h\| \cdot \alpha(h)$

a tutaj: $\|\alpha(h)\| = \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{P}_i + \xi_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \right) \right\| \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{|h_i|}{\|h\|}}_{\leq 1} \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{P}_i + \xi_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{P}_i + \xi_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \right\| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$h \to 0$ (z ciągłości $\frac{\partial f}{\partial x_i}$)

Stąd f - różniczkowalna w P_0

(II) Definicja $C^1(\Omega)$

Przestrzeń funkcji nazywamy przestrzenią $C^1(\Omega)$, gdy istnieją ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na Ω.

(1) Reguła łańcucha

Twierdzenie:

Gdy $f:\mathbb{R}^n \supset E \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}^k$, gdzie zbiory D, E – otwarte, $f(E)\subset D$, f – różniczkowalna w $x_0 \in E$, g – różniczkowalna w $f(x_0)\in D$, to funkcja $F = g\circ f$, $F: E\to\mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w x_0 i $F'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)$

złożenie odwzorowań liniowych

Dowód:

$y_0 := f(x_0)$, $f'(x_0) \overset{ozn}{=} A$, $g'(f(x_0)) \overset{ozn}{=} B$, A, B – macierze.

Wtedy $F'(x_0) = B\cdot A$

Z zał.:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h)\cdot\|h\|, \quad \alpha(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$g(y_0+k) - g(y_0) = Bk + \beta(k)\cdot\|k\|, \quad \beta(k) \xrightarrow{k\to 0} 0$$

Badamy, czy F – różniczkowalna:

$$\|F(x_0+h) - F(x_0) - B\cdot A\cdot h\| = \|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - BAh\| =$$

$$= \|g(f(x_0+h)) - g(y_0) - BAh\| = \|g(y_0 + \underbrace{Ah + \alpha(h)\cdot\|h\|}_{k}) - g(y_0) - BA\cdot h\| =$$

$$= \|g(y_0+k) - g(y_0) - BAh\| = \|Bk + \beta(k)\cdot\|k\| - BAh\| =$$

$$= \|B(k - Ah) + \beta(k)\cdot\|k\|\| = \|B(Ah + \alpha(h)\cdot\|h\| - Ah) + \beta(k)\cdot\|Ah + \alpha(h)\cdot\|h\|\|\| =$$

$$= \|B(\alpha(h)\cdot\|h\|) + \beta(k)\cdot\|Ah+\alpha(h)\cdot\|h\|\|\| \leq \text{ nierówność trójkąta}$$

$$= \|h\|\cdot\|B\cdot \underbrace{\alpha(h)}_{\text{wektor utworzony z kolumny macierzy}}\| + \|\beta(k)\|\cdot\|Ah + \alpha(h)\cdot\|h\|\| \leq$$

$$\leq \|h\|\,\|B\,\alpha(h)\| + \|\beta(k)\|\cdot(\|Ah\| + \|\alpha(h)\cdot\|h\|\|) \leq$$

$$\leq \|h\|\,\|B\cdot\alpha(h)\| + \|h\|\,\|\beta(k)\|(\|A\| + \|\alpha(h)\|) \leq$$

$$\leq \|h\|\,\underbrace{(\|B\,\alpha(h)\| + \|\beta(k)\|\,\|A\| + \beta(k)\cdot\|\alpha(h)\|)}_{\downarrow\, h\to 0 \;\to\; 0}$$

$h\to 0$ (bo gdy $h\to 0$, to $k\to 0$, ponadto odwzorowanie liniowe jest ciągłe)

0

24

11 Postać macierzowa różniczki złożenia

Wniosek z reguły łańcuchowej:

Różniczka złożenia to złożenie różniczek. Macierz różniczki złożenia to $M_{F'(x_0)} = M_{g'(f(x_0))} \cdot M_{f'(x_0)}$, gdy $F = g \circ f$

I Pochodne kierunkowe (jednostronne) i ich związki z gradientem

Def. Niech $f: \mathbb{R}^d \supset A \to \mathbb{R}$, A - otwarty, $P_0 \in A$

Jeżeli istnieje granica:

$$\partial^w f(P_0) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(P_0 + tw) - f(P_0)}{t\|w\|}, \text{ gdzie } w \in \mathbb{R}^d$$

to nazywamy ją pochodną kierunkową funkcji f w punkcie P_0 w kierunku wektora w.

Gradientem funkcji f w punkcie P_0 nazywamy:

$$\nabla f(P_0) = \operatorname{grad}_{P_0} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right)$$

Gdy $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d)$ - baza kanoniczna w $\mathbb{R}^d$, to dla $w = \varepsilon_j$, $j \in \{1, \dots, d\}$ pochodna kierunkowa $\partial^w f(P_0)$ ~~jest~~ ma taką samą wartość, co pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$, jeśli pochodna cząstkowa istnieje

II Twierdzenie

Gdy $f: \mathbb{R}^d \supset A \to \mathbb{R}$, gdzie A - zbiór otwarty, f - różniczkowalna w punkcie $P_0 \in A$ (tzn. istnieje $d_{P_0} f$),

to dla każdego $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ zachodzi $d_{P_0} f(x) = \operatorname{grad}_{P_0} f \circ x$ (iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^d$)

Dowód:

Niech $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ - baza kanoniczna w $\mathbb{R}^d$ (liniowość odwzorowania $d_{P_0} f$)

$$d_{P_0} f(x) = d_{P_0} f(x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_d \varepsilon_d) = x_1 \cdot d_{P_0} f(\varepsilon_1) + \dots + x_d \, d_{P_0} f(\varepsilon_d) =$$

$$= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) + \dots + x_d \frac{\partial f}{\partial x_d}(P_0) = \operatorname{grad}_{P_0} f \circ x$$

III Twierdzenie o wartości średniej i o przyrostach

1) Gdy $f: \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - zbiór otwarty, wypukły, jest różniczkowalna w Ω, $a, b \in \Omega$,

to $\exists_{\lambda \in (0,1)}$ $f(b) - f(a) = d_{a + \lambda(b-a)} f(b-a)$

2) Gdy $F: \Omega \to \mathbb{R}^k$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - zbiór otwarty, wypukły, jest różniczkowalna w Ω, $a, b \in \Omega$,

to $\|F(b) - F(a)\| \leq \|b-a\| \cdot \sup_{\lambda \in (0,1)} \|d_{a+\lambda(b-a)} F\|$

(25) Dowód:

1) Niech $P_t \overset{ozn}{=} a+t(b-a)$.

Niech $\varphi(t) = f(P_t)$ dla $t\in[0,1]$, φ - ciągła w $[0,1]$, różniczkowalna w $(0,1)$

Zatem z tw. Lagrange'a:

$$\exists_{\lambda\in(0,1)} \ \varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\lambda)(1-0)$$

Zaś:

$$\varphi(1)-\varphi(0) = f(b)-f(a)$$

$$\varphi'(\lambda) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\lambda+h)-\varphi(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(P_{\lambda+h})-f(P_\lambda)}{h} =$$

z różniczkowalności f

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+(h+\lambda)(b-a))-f(P_\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(P_\lambda + h(b-a))-f(P_\lambda)}{h} =$$

$\|h(b-a)\|\cdot\alpha(h(b-a))$ liniowość $d_{P_\lambda}f$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{d_{P_\lambda}(h(b-a)) + \|h\|\cdot\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot d_{P_\lambda}(b-a)+\|h\|\alpha(h)}{h} = d_{P_\lambda}(b-a)$$

Zatem $f(b)-f(a) = d_{P_\lambda}(b-a)$

$\blacksquare$

2) Niech $\gamma(t) := a+t(b-a)$ dla $t\in[0,1]$, $\gamma:[0,1]\to\Omega\subset\mathbb{R}^d$

Niech $g(t) := F(\gamma(t))$ dla $t\in[0,1]$, $g:[0,1]\to\mathbb{R}^k$

$g = F\circ\gamma$ - ciągła w $[0,1]$, różniczkowalna w $(0,1)$

Stąd z tw. o przyrostach dla funkcji o wartościach wektorowych:

$$\exists_{t_0\in(0,1)} \ \|g(1)-g(0)\| \leqslant \|g'(t_0)\|, \text{ czyli } \|F(b)-F(a)\| \leqslant \|g'(t_0)\|$$

Dla $t\in(0,1)$ z Reguły Łańcucha: $g'(t) = \underbrace{F'(\gamma(t))\circ\gamma'(t)}_{\text{złożenie odw.}}$

własność normy operatorowej

Norma odwzorowania: $\|g'(t)\| = \|F'(\gamma(t))\circ\gamma'(t)\| \leqslant \|F'(\gamma(t))\|\cdot\|\gamma'(t)\| =$

$$= \|d_{\gamma(t)}F\|\cdot\|b-a\| \leqslant \|b-a\|\cdot\sup_{\lambda\in(0,1)}\|d_{a+\lambda(b-a)}F\|$$

Stąd $\|F(b)-F(a)\| \leqslant \|b-a\|\sup_{\lambda\in(0,1)}\|d_{a+\lambda(b-a)}F\|$

$\blacksquare$

I Druga różniczka

Def. Niech funkcja $f:\mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, gdzie D-zbiór otwarty ma pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w każdym punkcie $x \in D$.

Wówczas określona jest funkcja: $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \ni x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$

Jeśli istnieje pochodna cząstkowa po j-tej zmiennej funkcji $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie $x \in D$, to nazywamy ją drugą pochodną cząstkową i oznaczamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$

(co należy rozumieć jako $\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]$).

II Macierz Hessego

Def. Niech $f:\mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, gdzie D-zbiór otwarty, będzie dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in D$. Wtedy macierzą Hessego funkcji f w punkcie x_0 nazywamy macierz $H(x_0) := \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right]_{n \times n}$,

czyli:

$$H(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

III Twierdzenie Schwarza o symetrii drugiej różniczki

Gdy $f:\mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$, gdzie D-zbiór otwarty i f-klasy C^2, ma w punkcie (x_0, y_0) ciągłe pochodne mieszane, to te pochodne są równe, tzn. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Dowód:

Niech $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, przy czym $(x_0 + h, y_0 + k) \in D$

Niech $\Lambda := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$

$\varphi(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$

$\psi(y) := f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$

$\Lambda = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \overset{\text{tw. o przyrostach}}{=} h \cdot \varphi'(x_0 + \alpha h), \ \alpha \in (0,1)$ (*)

$\Lambda = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \overset{\text{tw. o przyrostach}}{=} k \cdot \psi'(y_0 + \beta k), \ \beta \in (0,1)$ (**)

(23)

$$\Lambda \overset{(*)}{=} h\cdot\varphi'(x_0+\alpha h) \overset{\text{def } \varphi}{=} h\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0)\right) = ☺$$

Dla funkcji $\sigma(y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y)$ mamy $\sigma(y_0+k)-\sigma(y_0)=k\cdot\sigma'(y_0+\lambda k)$, $\lambda\in(0,1)$

$$☺ = h\cdot k\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\alpha h, y_0+\lambda k)\right) = hk\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\alpha h, y_0+\lambda k)$$

$\frac{\Lambda}{hk} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$ z ciągłości pochodnych mieszanych

Analogicznie $\frac{\Lambda}{hk} \xrightarrow{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$

Stąd z jednoznaczności granicy $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ ∎

① Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

Gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - otwarty i jest otoczeniem gwiaździstym punktu $P_0 \in \Omega$ (tzn. $\forall_{P\in\Omega}\ \forall_{\lambda\in[0,1]}\ \underbrace{P_0+\lambda(P-P_0)}_{P_\lambda} \in \Omega$),

$f:\Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$,

to dla $P\in\Omega$: $\exists_{\lambda\in(0,1)}\ f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P-P_0) + \frac{1}{2} d^2_{P_\lambda} f(P-P_0)$

Dowód:

Niech $P_\lambda \overset{\text{ozn}}{=} P_0 + \lambda(P-P_0)$

Niech $\varphi(t) := f(P_t)$ dla $t\in(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ (czyli dla t z pewnego otwartego otoczenia odcinka $[0,1]$; istnieje takie otoczenie, by φ było dobrze określone, bo Ω - otwarty). $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(P_{t+h}) - f(P_t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(P_t + h(P-P_0)) - f(P_0)}{h} =$$ istnieje różniczka z f w pkt P_t

$$= \lim_{h\to 0} \frac{d_{P_t} f(h(P-P_0)) + \|h\|\cdot\alpha(h)}{h} = d_{P_t} f(P-P_0) \qquad P-P_0 \overset{\text{ozn.}}{=} (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$$

$$\varphi''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{d_{P_{t+h}} f(P-P_0) - d_{P_t} f(P-P_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_{t+h})\cdot \overline{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t)\cdot\overline{x_i}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h}\left(\overset{g_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(P_t + h(P-P_0)) - \overset{g_i}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(P_t)\right)\overline{x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(d_{P_t} g_i (P-P_0)\, \overline{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(P_t)\cdot \overline{x_j}\cdot\overline{x_i} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_t)\cdot\overline{x_i}\cdot\overline{x_j} = d^2_{P_t} f(P-P_0)$$

Z tw. Taylora dla funkcji φ:

$$\exists_{\lambda\in(0,1)}\ \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\lambda)$$

Stąd:
$$f(P) = f(P_0) + d_{P_0} f(P-P_0) + \frac{1}{2} d^2_{P_\lambda} f(P-P_0)$$

(28)

Uwaga:

Gdy $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$, gdzie zbiór Ω - otwarty, wypukły; f - różniczkowalna w pkt $P_0 \in \Omega$, ma w punkcie $P_0 = (x_1, \dots, x_n)$ ekstremum lokalne, to $d_{P_0} f = 0_{1\times n}$

Dowód: (dla minimum lokalnego; dla maksimum - analogicznie)

Niech $\forall_{P \in U - \text{otoczenie } P_0}$ $f(P_0) \leq f(P)$.

Zatem w szczególności zachodzi $f(P_0) \leq f(P_0 + h e_i)$ dla $e_i \in B$ - baza kanoniczna $\mathbb{R}^n$

Wtedy:

$$\left.\begin{array}{l} \forall_{h>0} \ \dfrac{f(P_0+he_i)-f(P_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \geq 0 \\ \forall_{h<0} \ \dfrac{f(P_0+he_i)-f(P_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall_i \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d_{P_0} f = 0_{1\times n}$$

① <u>Warunek wystarczający na istnienie ekstremum lokalnego</u> dla f

Gdy $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$, f jest klasy C^2 w otoczeniu P_0, to f ma istotne minimum (tzn. $\forall_{P \text{ z otoczenia } P_0}$ $f(P_0) < f(P)$ w $P_0 = (x_1, \dots, x_n)$), jeśli $d^2_{P_0} f >> 0$ (maksimum gdy $d^2_{P_0} f << 0$) oraz f nie ma ekstremum lokalnego w P_0, gdy $d^2_{P_0} f$ jest nieokreślona.

Dowód:

Z uwagi b.s.o. można założyć, że P_0 jest punktem stacjonarnym.

Wtedy ze wzoru Taylora mamy:

$f(P) - f(P_0) = d_{P_0} f(P-P_0) + \frac{1}{2} d^2_{P_\lambda}(P-P_0)$, gdzie $P_\lambda = P_0 + \lambda(P-P_0)$, $\lambda \in (0,1)$

$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} d^2_{P_\lambda}(P-P_0)$, bo P_0 - pkt. stacjonarny, czyli $d_{P_0} f = 0_{1\times n}$

Wiemy, że $d^2_{P_0} f$ jest dodatnio określona, więc z kryterium Sylvestera mamy, że wszystkie minory kątowe główne są większe od zera, czyli:

$$\forall_{k \in \{1,\dots,n\}} \ M_k(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(P_0) \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{\sigma(1)}}(P_0) \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_{\sigma(k)}}(P_0) > 0$$

Funkcja $g_k(P) := M_k(P)$ jest ciągła dla P z określonego otoczenia P_0, gdyż jest sumą iloczynów funkcji ciągłych w tym otoczeniu.

Zatem z ciągłości g_k:

$\exists_{\delta_k}$ takie, że $0 < \|P-P_0\| < \delta_k \Rightarrow g_k(P) = M_k(P) > 0$

(bo $|g_k(P) - g_k(P_0)| < \varepsilon \Rightarrow |g_k(P)| > |g_k(P_0)| + \varepsilon$, zaś $g_k(P_0) > 0$)

czyli dla $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ mamy, że $\forall_P \ \|P-P_0\| < \delta \Rightarrow d_P^2 f >> 0$.

Toteż dla $P_\lambda = P_0 + \lambda(P-P_0)$, $\lambda \in (0,1)$ mamy, że $d_{P_\lambda}^2 f >> 0$.

Stąd:

$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} d_{P_\lambda}^2 f(P-P_0) > 0$, co z definicji daje minimum lokalne.

Natomiast gdy $d_{P_0}^2 f$ jest nieokreślona to

$\exists_{\hat{P}} \ d_{P_0}^2 f(\hat{P}-P_0) > 0 \ \wedge \ \exists_{\tilde{P}} \ d_{P_0}^2 f(\tilde{P}-P_0) < 0$.

Wtedy poprzez rozumowanie analogiczne do poprzedniego mamy, że $\exists \hat{P}_\lambda = P_0 + \lambda(\hat{P}-P_0)$, $\lambda \in (0,1)$: $d_{\hat{P}_\lambda} f(\hat{P}-P_0) > 0$ oraz

$\exists \tilde{P}_\lambda = P_0 + \lambda(\tilde{P}-P_0)$, $\lambda \in (0,1)$: $d_{\tilde{P}_\lambda} f(\tilde{P}-P_0) < 0$

co daje we wzorze Taylora różne wartości przyrostów, czyli brak ekstremum w P_0.

(29)

① Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu (tj. do powierzchni $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega\}$)

Def. Wektor $v\in\mathbb{R}^m$ nazywamy stycznym do zbioru $\mathcal{G}\subset\mathbb{R}^m$ w punkcie $P_0\in\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\exists \{p_n\}_0^\infty\subset\mathcal{G}\ \exists\{a_n\}_0^\infty\subset\mathbb{R}\quad a_n(P_n-P_0)\xrightarrow{n\to\infty} v$

Def. Przestrzeń afiniczna $P_0+\vec{X}$ styczna do $\mathcal{G}$ w punkcie P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall v\in\vec{X}$ v jest styczny do $\mathcal{G}$ w punkcie P_0.

Tw. Gdy $f:\mathbb{R}^2\supset D\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalne w punkcie $P_0=(x_0,y_0)$ oraz $z_0=f(x_0,y_0)$, to płaszczyzna postaci:
$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot(y-y_0)$
jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$
(czyli jest styczna do zbioru $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D\wedge z=f(x,y)\}$).

Dowód:
B.s.o. możemy założyć, że $P_0=0\wedge f(P_0)=0$ (jeśli tak nie jest, to uzyskujemy taką sytuację poprzez przesunięcie wykresu funkcji, co nie zmienia jego własności).
Wtedy równanie płaszczyzny z tezy przyjmuje postać:
$z=\frac{\partial f}{\partial x}(0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0)\cdot y$, czyli $z=d_{P_0}f(x,y)$
Pokażemy, że dowolny wektor należący do tej płaszczyzny (tzn. wektor $v=(x,y,d_{P_0}f(x,y))$) jest styczny do wykresu f.

Niech $\tilde{P}_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$; $P_n=(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y,f(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y))$ – należy do wykresu f, $a_n=n$.
Wówczas jeśli $a_n(P_n-\tilde{P}_0)\to v$, to v jest styczny do wykresu f.
$a_n(P_n-\tilde{P}_0)=n\left((\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y,f(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y))-(0,0,0)\right)=$
$=n\left(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y,f(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y)-f(0,0)\right)=$
$=n\left(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y,d_{P_0}f(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y)+\|(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y)\|\cdot\alpha(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y)\right)=$
$=n\left(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y,\frac{1}{n}d_{P_0}f(x,y)+\frac{1}{n}\cdot\|(x,y)\|\cdot\alpha(\frac{1}{n}x,\frac{1}{n}y)\right)=$

$= \left(x, y, d_{P_0}(x,y) + \|(x,y)\| \cdot \alpha\left(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}y\right)\right) \xrightarrow{n \to \infty} (x, y, d_{P_0}(x,y)) = v$

Jako że wektor v był dowolny, to płaszczyzna $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)$ jest styczna do wykresu f w punkcie $\tilde{P_0}$. ∎

(II) Wektor normalny

Def. Wektorem normalnym do wykresu f w punkcie $\tilde{P_0} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nazywamy wektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), -1\right)$.

Gdy f jest klasy C^1 to jest to wektor normalny płaszczyzny stycznej (można odczytać z równania normalnego).

Twierdzenie analogiczne można uogólnić na przypadek $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, a dowód jest analogiczny.
Ponadto warunek prostopadłości do wektora normalnego wyznacza przestrzeń styczną do wykresu funkcji f.