22 Różniczki wyższych rzędów

22.1 Wielowskaźniki, różniczki, wzór Taylora

W przypadku większej ilości zmiennych i różniczek rzędu 3 i wyższych -jest zasadniczy problem z komplikacją zapisu. Wymyślono na szczęście notację wielowskaźnikową, dzięki której wzory upodobnić się mogą do tych dla 1 zmiennej. Notacja ta ułatwia też badanie wielomianów wielu zmiennych, warto ją poznać.

Przypuśćmy, że badamy funkcje n zmiennych na tyle regularne, że można zamieniać kolejność różniczkowań (por. lemat poniżej). Dla tych funkcji zmienną niezależną ("argumentem") jest wektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Przypomnijmy najpierw, że do zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych nie zaliczamy zera, będziemy więc używać oznaczenia $\mathbb{Z}_+$ dla zbioru liczb całkowitych nieujemnych. Wielowskaźnikiem (lub n-wskaźnikiem) nazywamy każdy układ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ złożony z n liczb całkowitych nieujemnych.

Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ -wielowskaźników definiujemy:

- $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ (dodawanie po współrzędnych)
- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ("długość wielowskaźnika α")
- $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$
- $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ ("bazowy" wielomian jednorodny stopnia $|\alpha|$)
- $D^\alpha f(\mathbf{x}) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x})$ (D^α, to operator różniczkowy rzędu $|\alpha|$).

Słowo "bazowy" oznacza tu, że każdy wielomian jednorodny stopnia k jest skończoną kombinacją liniową tego typu wielomianów $\mathbf{x}^\alpha$, gdzie sumowanie odbywa się po zbiorze takich wielowskaźników α, dla których $|\alpha| = k$ (czyli o długości k). Przy definicji wielomianu $\mathbf{x}^\alpha$ przyjmujemy, że gdy $x_j = \alpha_j = 0$, to w powyższym zapisie $0^0 = 1$. Na przykład, dla $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha = (2, 0, 5)$ wielomian $p(x, y, z) = p(\mathbf{w}) := \mathbf{w}^\alpha$ jest równy $x^2 z^5$ i w punkcie $\mathbf{w_0} = (3, 0, 1)$ przyjmie on wartość 9. Jedynymi n-wskaźnikami o długości 1 są wektory kanonicznej bazy zero-jedynkowej: $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots \varepsilon_n := (0, \dots, 0, 1)$, zaś $D^{\varepsilon_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^n$ jest na tym zbiorze klasy C^k, gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, co zapisujemy: $f \in C^k(D)$, jeżeli dla każdego wielowskaźnika $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ o długości $|\alpha| \leqslant k$ pochodna cząstkowa $D^\alpha f$ istnieje i jest funkcją ciągłą w zbiorze D.
Nośnikiem funkcji f, oznaczanym $\mathtt{supp}(f)$ nazywamy domknięcie w $\mathbb{R}^n$ zbioru $\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$.
Ponieważ funkcje $f \in C^k(D)$ lub ich pochodne mogą być nieograniczone, definiujemy też dwie inne przestrzenie wektorowe:
$C_c^k(D) := \{f \in C^k(D) : \mathtt{supp}(f) \text{ jest zbiorem zwartym zawartym w } D\}$.
W przypadku zbiorów ograniczonych D również definiujemy przestrzeń $C^k(\bar{D})$ złożoną z tych $f \in C^k(D)$, dla których pochodne rzędu k, (czyli funkcje $D^\alpha f$, gdzie $|\alpha| = k$) są jednostajnie ciągłe na zbiorze D

Przypomnijmy, że funkcje jednostajnie ciągłe na zbiorze ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^n$ to są dokładnie takie funkcje, które mają przedłużenie do funkcji ciągłych na zbiorze $\bar{D}$.

Dowód tego faktu w 1. semestrze mógł być w sytuacji gdy $n = 1$, ale konstrukcja wartości $f(x_0)$ dla $x_0 \in \bar{D} \setminus D$ wykorzystuje jedynie zbieżność w zbiorze $\mathbb{R}$ ciągów postaci $f(x_n)$, gdzie $x_n \in D$, $x_n \to x_0$. Obraz ciągu Cauchy'ego (x_n) przez f jednostajnie ciągłą spełnia warunek Cauchy'ego. To ciągłe przedłużenie pochodnej najwyższego rzędu powoduje (dzięki zwartości zbioru $\bar{D}$ -jeśli D jest ograniczony) -ograniczoność tych pochodnych. Pochodne niższych o 1 rzędów spełniają wtedy warunek Lipschitza (dzięki twierdzeniu o przyrostach) i są jednostajnie ciągłe, więc też można je przedłużyć do funkcji ciągłych na całym $\bar{D}$. I tak dalej - w końcu pochodna rzędu 0, czyli sama funkcja f ma ciągłe przedłużenie na $\bar{D}$. W niektórych podręcznikach zamiast jednostajnej ciągłości daje się równoważny warunek istnienia przedłużeń ciągłych.

Gdy $n = 1$ i mamy przedział otwarty (a, b), zazwyczaj te przedłużenia f', f'', etc. wprowadza się raczej jako pochodne jednostronne na końcach przedziału. Ale np. dla kuli mamy wiele kierunków - i faktycznie pochodne 1-stronne kierunkowe w kierunkach wektorów normalnych skierowanych na zewnątrz sfery powinny być tym ciągłym przedłużeniem, ale jest to na tyle skomplikowane, że nie warto iść tą drogą.

Na przestrzeni $C^k(\bar{D})$ można zdefiniować normę określającą zbieżność jednostajną wraz z pochodnymi do rzędu k, jak w przypadku 1-wymiarowym i będzie to przestrzeń Banacha.

Na przestrzeni $C^k(D)$ dla otwartych D możemy jedynie mówić o zbieżności niemal jednostajnej -czyli na zbiorach zwartych zawartych w D- np. w tych punktach $\mathbf{x} \in D$, dla których $\|\mathbf{x}\| \leqslant n$ oraz $\mathtt{dist}(\mathbf{x}, \mathbb{R}^n \setminus D) \leqslant \frac{1}{n}$. Te punkty tworzą zwarty podzbiór K_n zbioru D o tej własności, że dla dowolnego zwartego $K \subset D$ istnieje n takie, że $K \subset K_n$. Zbieżność niemal jednostajną wystarczy więc badać na każdym ze zbiorów K_n z osobna i to umożliwia zdefiniowanie (już nie normy, ale) metryki, w której zbieżność pokrywa się ze zbieżnością niemal jednostajną -np. wraz z pochodnymi rzędu $\leqslant k$. Otrzymane w ten sposób przestrzenie metryczne są nadal zupełne, ale nie są one unormowane (są to tzw. przestrzenie Frécheta).

Metodą indukcji udowodnić można następujący ważny wzór na składanie różniczkowań, będący uogólnieniem twierdzenia o symetrii drugiej różniczki:

Lemat. Jeśli α, β są n-wskaźnikami, Ω-otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$, zaś $k \geqslant |\alpha| + |\beta|$, to operatory różniczkowe D^α oraz D^β są przemienne (czyli, jak mówi się, "komutują") na przestrzeni $C^k(\Omega)$. Ponadto ich złożeniem jest operator

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta}.$$

Definicja. Różniczką rzędu k w punkcie $P \in \Omega$ dla funkcji $f \in C^r(\Omega)$, gdzie $k \leqslant r$ nazywamy wielomian jednorodny

$$d^k f_P(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(P)\mathbf{x}^\alpha, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sprawdźmy jako ćwiczenie, że dla funkcji dwu zmiennych (x, y), $k = 2$ mamy $|\alpha| = 2$ tylko dla par: $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$, których silnie, to $2, 1, 2$ odpowiednio. I otrzymamy d^2 w postaci z poprzedniego wykładu.

Wielomian Taylora rzędu k i jego reszta ma definicję całkiem podobną do przypadku funkcji jednej zmiennej:

$$T_P^{(k)} f(\mathbf{x}) := \sum_{j \leqslant k} \frac{1}{j!} d_P^j f(\mathbf{x}), \quad R_P^{(k)} f(\mathbf{h}) := f(\mathbf{P} + \mathbf{h}) - T_P^{(k)} f(\mathbf{h}).$$

Zauważmy, że uproszczenie się $j!$ po wstawianiu we wzorach na różniczki $d^j \ldots$ daje równoważną postać wzoru na wielomian Taylora, gdzie indeksem sumowania będą wielowskaźniki α:

$$T_P^{(k)} f(\mathbf{x}) := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(P) \cdot \mathbf{x}^\alpha.$$

Można też wykazać[1] analogiczne do przypadku jednej zmiennej tezy o reszcie we wzorze Taylora:

Twierdzenie (Wzór Taylora).

1. Reszta $R_P^{(k)} f(\mathbf{h})$ dla $f \in C^k(\Omega)$ jest o-małe od $\|\mathbf{h}\|^k$ przy $\mathbf{h} \to 0$.
2. Gdy Ω jest wypukły, $f \in C^{k+1}(\Omega)$ to istnieje punkt P_λ z odcinka otwartego o końcach $\mathbf{P}, \mathbf{P} + \mathbf{h}$, dla którego

$$R_P^{(k)} f(\mathbf{h}) = \frac{1}{(k+1)!} d_{P_\lambda}^{k+1} f(\mathbf{x}).$$

[1] My przeprowadzimy dowód jedynie w przypadku $k = 1$ dla reszty postaci Lagrange'a, bo to wykorzystamy przy badaniu ekstremów lokalnych