10 Szeregi i pochodne

Ciągi funkcyjne jednostajnie zbieżne do zera mogą mieć rozbieżne ciągi pochodnych (nawet w sensie punktowym): Tak jest np. dla $\phi_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$, gdzie $|\phi_n'(k\pi)| \to \infty$. Z kolei, dla $f_n(x) := \frac{x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ na odcinku $[-1,1]$, mamy $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, więc $f_n'(0) = 1 \not\to 0$, chociaż $\forall_{x\in[-1,1]\setminus\{0\}}\ \lim f_n'(x) = 0$.

Jeśli w przestrzeni $C^1[a,b]$ funkcji mających ciągłe pochodne w przedziale $[a,b]$ jako normę przyjęlibyśmy $\|f\|_{[a,b]} = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$, to nie znajdziemy takiej stałej $M \in \mathbb{R}_+$, dla której każda $f \in C^1[a,b]$ mogła by spełniać oszacowanie $\|f'\|_{[a,b]} \leqslant M\|f\|_{[a,b]}$, co jest warunkiem ciągłości dla operatora liniowego $f \mapsto f'$ (czyli operatora różniczkowania). Nierówność

$$\|f'\|_{[a,b]} \leqslant M\|f\|_{C^1[a,b]}$$

otrzymamy, nawet ze stałą $M = 1$, jeśli do normy supremum modułu z f dodamy wyrażenie z lewej strony tej nierówności (to więcej, niż oczywiste). Ale to może za dużo? -tak, za dużo, trzeba dodać $\|f'\|_{[a,b]}$, ale do modułu z f w jakimś punkcie -najwygodniej – w lewym końcu przedziału.

Zdefiniujmy więc normę w przestrzeni wektorowej $C^1[a,b]$ wzorem

$$\|f\|_{C^1[a,b]} := |f(a)| + \sup\{|f'(t)| : t \in [a,b]\} \quad \texttt{czyli} = |f(a)| + \|f'\|_{[a,b]}. \quad (1)$$

Czy jednak informacja o f tylko w "punkcie początkowym" plus informcja o pochodnej -już w całym przedziale -to wystarczające dane do kontrolowania zbieżności jednostajnej np. ciągu funkcji oraz ich pochodnych? **Tak**, a odpowiedź można np. uzasadnić przytaczając wzór Newtona-Leibniza w postaci

$$h(x) = h(a) + \int_a^x h'(t)\,dt \quad \texttt{dla} \quad h \in C^1[a,b]. \quad (2)$$

Zobaczmy, jak to działa w dowodzie następującego twierdzenia:

Twierdzenie.(O zbieżności wraz z pochodnymi) *Jeśli ciąg pochodnych f_n' funkcji $f_n \in C^1[a,b]$ jest zbieżny jednostajnie w $[a,b]$ do pewnej funkcji g, zaś ciąg $f_n(a)$ jest zbieżny, to ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $f \in C^1[a,b]$ oraz $f' = g$.*

Dowód. Aby wykazać zbieżność jednostajną, sprawdzimy jednostajny warunek Cauchy'ego. We wzorze (2) w miejsce h wstawmy funkcję $f_m - f_k$. Otrzymamy dla jej modułu w każdym punkcie $x \in [a,b]$ równość: $|f_m(x) - f_k(x)| =$

$$= |f_m(a) - f_k(a) + \int_a^x (f_m'(t) - f_k'(t))\,dt| \leqslant |f_m(a) - f_k(a)| + \int_a^x |f_m'(t) - f_k'(t)|\,dt.$$

Korzystaliśmy tu z nierówności trójkąta i z całkowej nierówności trójkąta (wstawiając moduł pod całkę). Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla m, k dostatecznie dużych (powiedzmy, dla $m, k \geqslant M_1$) mamy $|f_m(a) - f_k(a)| < \frac{\epsilon}{2}$, gdyż ciąg liczbowy zbieżny $(f_n(a))$ musi spełniać warunek Cauchy'ego. Wystarczy sprawdzić, czy drugi składnik, czyli całka będzie też mała dla m, k dostatecznie dużych. Jednostajny warunek Cauchy'ego, jaki spełnia ciąg pochodnych (bo jest on, z założenia, jednostajnie zbieżny), daje nam mniejszą od $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ jednostajną majorantę:

$$\|f_m' - f_k'\|_{[a,b]} < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

dla m, k dostatecznie dużych (np. dla $m, k \geqslant M_2$). Ponieważ jest to majoranta dla funkcji podcałkowej, a długość drogi całkowania, to $|x - a| \leqslant b - a$, więc $\int_a^x |f_m'(t) - f_k'(t)|\,dt \leqslant (b-a)\|f_m - f_k\|_{[a,b]} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Dla $m, k \geqslant \max(M_1, M_2)$ i dla wszystkich $x \in [a,b]$ mamy więc $|f_m(x) - f_k(x)| \leqslant \epsilon$, czyli jednostajny warunek Cauchy'ego. Ciąg (f_n) jest więc jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji ciągłej f. Wykażemy równocześnie, że f jest różniczkowalna, klasy C^1 i że jej pochodną jest $g = \lim f_n'$ w następujący sposób:

Ponownie skorzystajmy z (2), tym razem w miejsce h wstawiając f_n. Tak więc

$$\forall_{x\in[a,b]}\ f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \tag{3}$$

Wiemy już, że $f_n \rightrightarrows f$ w $[a,b]$, w szczególności, zbieżność jest też punktowa. Przechodząc z n do nieskończoności w równościach (3) (i wykorzystując twierdzenie o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki w przypadku zbieżności jednostajnej, gdyż z założenia, $f_n' \rightrightarrows g$) otrzymamy w granicy równości

$$\forall_{x\in[a,b]}\ f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt. \tag{4}$$

Dzięki fragmentowi twierdzenia Newtona-Leibniza w punktach ciągłości funkcji g (czyli wszędzie na odcinku (a,b)) otrzymamy istnienie pochodnej z prawej strony wzoru (4) równej $g(x)$, stąd i pochodna po lewej stronie istnieje oraz $\frac{d}{dx}f = g$ przynajmniej w przedziale otwartym (a,b). Z ciągłości g na końcach przedziału dostaniemy też (był taki wniosek z Tw. Lagrange'a w I semestrze) istnienie pochodnych 1-stronnych w punktach a, b z funkcji f, równych $g(a)$ (odp. $g(b)$). To kończy dowód.$\square$

Można też podać inny (częściej spotykany w podręcznikach) dowód powyższego twierdzenia, korzystający bezpośrednio z twierdzenia o przyrostach. Np zamiast szacować całkę $\int_a^x (f_m'(t) - f_k'(t))dt$ równą $|(f_m(x) - f_k(x)) - (f_m(a) - f_k(a))|$ szacujemy ten ostatni przyrost przez $|x-a|\|f_m' - f_k'\|_{[a,b]}$. Potem, mając już wykazaną zbieżność jednostajną, należy szacować różnicę między ilorazem różnicowym dla f w punkcie x a wartością $g(x)$. Jak ktoś nie lubi całek, można i tak. (warto dla treningu spróbować)

Zamiast punktu a można też wybrać dowolny inny punkt $c \in [a,b]$ i zakładać zbieżnosć ciągu $(f_n(c))$, dostając analogiczną tezę (i prawie taki sam dowód).

Odnotujmy dwa podstawowe wnioski z poprzedniego twierdzenia.

Twierdzenie. (O RÓŻNICZKOWANIU SZEREGÓW) Szereg funkcji klasy C^1 można różniczkować metodą "wyraz po wyrazie", o ile przynajmniej w jednym punkcie jest on zbieżny, zaś szereg jego pochodnych jest zbieżny jednostajnie. Dokładniej, zakładamy zbieżność szeregu $S(a) = \sum_{n=0}^\infty f_n(a)$ oraz jednostajną zbieżność w przedziale $[a,b]$ szeregu pochodnych: $G(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n'(x)$. Wówczas szereg jest zbieżny jednostajnie oraz pochodna $S'(x)$ z funkcji $S(x) := \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ jest równa $G(x)$. (Na końcach przedziału pochodne traktujemy jako jednostronne.) Innymi słowy,
przy powyższych założeniach operacje: sumowania szeregu oraz różniczkowania można wykonywać w dowolnej kolejności. W szczególności, jak już wiemy, szeregi potęgowe postaci $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ są zbieżne jednostajnie wraz z pochodnymi w przedziałach $[x_0 - r, x_0 + r]$, gdzie r jest dowolną liczbą dodatnią silnie mniejszą od promienia zbieżności R. Takie przedziały pokrywają cały przedział otwarty $(x_0 - R, x_0 + R)$ i w tym przedziale zachodzi równość

$$S'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Dowód. Oznaczmy przez S_k sumy częściowe: $S_k := \sum_{n=0}^k f_n$ (w zapisie bezargumentowym). Założenia, to zbieżność $S_k(a) \to S(a)$ oraz zbieżność jednostajna $S_k' \rightrightarrows G$. Ta ostatnia faktycznie zachodzi, bo $S_k' = \sum_{n=0}^k f_n'$, skoro pochodna (sumy skończonej), to suma pochodnych. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że istnieje granica jednostajna: $S = \lim S_k$ oraz jest ona klasy C^1, przy czym $S' = G$. Zauważmy jeszcze, że jak w twierdzeniu dla ciągów, punkt, w którym zakładamy zbieżność szeregu może być dowolny (niekoniecznie równy a). Na przykład, dla szeregu potęgowego najwygodniej jest zamiast $x_0 - r$ wybrać punkt x_0, bo w tym punkcie z wyjątkiem a_0, wszystkie wyrazy szeregu zerują się, zbieżność jest tu ewidentna. Zbieżność jednostajną otrzymaliśmy dla szeregu pochodnych z M-testu Weierstrassa (por. poprzedni wykład). □

Aby siebie (a przede wszystkim Państwa) nie przeciążać -bo to podobno osłabia odporność, dowód poniższego twierdzenia napiszę następnym razem:

Twierdzenie Abela: Jeżeli szereg potęgowy o środku x_0 i promieniu zbieżności $R \in (0, +\infty)$ jest zbieżny w którymś z punktów $x_0 \pm R$ (na krańcu przedziału zbieżności), to jego suma jest funkcją ciągłą w tym punkcie, szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinku łączącym ten punkt z punktem x_0.

Jako zastosowanie, możemy wykazać, że $\sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. Promień zbieżności szeregu potęgowego geometrycznego $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_0^\infty (-x)^n$ wynosi 1, więc w przedziałach $[-r.r]$ dla $r < 1$ jego zbieżność jest jednostajna i możemy tam całkować szereg wyraz po wyrazie, otrzymując dla $0 < x < 1$ rozwinięcie $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_0^\infty \int_0^x (-t)^n\, dt = \sum_0^\infty \frac{-1}{n+1}(-x)^{n+1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Z twierdzenia Abela wyniknie, że

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \sum_1^\infty \lim_{x\to 1^-} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

co daje naszą równość.

Szereg potęgowy $\sum_0^\infty (-x^2)^n$ o sumie $\frac{1}{1+x^2}$ możemy całkować stronami na przedziałach $[0, x]$ dla $|x| < 1$, otrzymując rozwinięcie $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \mathtt{arc\,tg} x$. Dzięki twierdzeniu Abela ten wzór możemy też stosować w punkcie $x = 1$, otrzymując ciekawe przedstawienie liczby π:

$$\frac{\pi}{4} = \mathtt{arc\,tg} 1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

10.1 Szereg Taylora i Maclaurina

Jak widać, niektóre funkcje można przedstawić jako sumę szeregu potęgowego stosując całkowanie lub różniczkowanie szeregu potęgowego geometrycznego $\sum x^n$ (z ewentualnymi podstawieniami w miejsce zmiennej x jakiegoś prostego wielomianu). Ale w ogólnym przypadku niełatwo jest znaleźć tą metodą współczynniki rozwinięcia. Na szczęście, jest inny sposób: Przypuśćmy, że promień zbieżności dla szeregu $s(x) := \sum a_n (x - x_0)^n$ jest dodatni. Podstawianie wartości $x = x_0$ do tego rozwinięcia funkcji $s(x)$ a następnie do jej pochodnych rzędu k daje równości: $s(x_0) = a_0, s'(x_0) = a_1, \ldots, s^{(k)}(x_0) = k! a_k$, gdyż w takim rozwinięciu wszystkie -z wyjątkiem jednego (dla $n = k$) składniki zerują się w punkcie x_0. Jeśli więc tylko $f(x)$ jest sumą typu $s(x)$ -czyli sumą jakiegoś szeregu potęgowego zbieżnego w pewnym otoczeniu punktu x_0 do f, to musi już być $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Szereg potęgowy o takich współczynnikach nazwiemy *szeregiem Taylora* w punkcie x_0 dla funkcji f. W przypadku $x_0 = 0$ szereg taki nazywamy *szeregiem Maclaurina*. Jeśli tylko 0 należy do wnętrza dziedziny f, to najprostszą i najczęściej używaną jest właśnie taka postać. Rzecz jasna, wymaga to znajomości poszczególnych pochodnych w punkcie 0. Dla niektórych funkcji są na to proste wzory: np. dla $f(x) = e^x$ wszystkie pochodne są równe e^x, a w zerze przyjmują wartość 1. Dla funkcji sinus pochodne rzędu k w zerze zerują się dla k parzystych i są równe $(-1)^m$ dla $k = 2m + 1$. Podobnie, $\cos^{(k)}(0) = (-1)^j$ gdy $k = 2j$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zerując się dla k nieparzystych. Tu promieniem zbieżności jest $+\infty$. Dla funkcji $\ln(1 + x)$ promień zbieżności szeregu Maclaurina wynosi 1. Jak już wiemy, wszystkie te szeregi mają sumy równe rozwijanym funkcjom wewnątrz obszaru zbieżności. Można więc zapisać:

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} x^n \quad \mathtt{dla\ wszystkich} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots \quad \mathtt{dla\ wszystkich} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots \quad \texttt{dla wszystkich} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \texttt{dla}\ |x| < 1.$$

Teraz wyjaśnię, dlaczego wprowadziłem na początku symbol $s(x)$ dla sumy szeregu Taylora. Może się zdarzyć, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji f wynosi $+\infty$, lecz mimo to $f(x) \neq s(x)$ dla $x \neq x_0$.

Przykład Tak jest w przypadku funkcji $\phi(x) := \exp(-\frac{1}{x^2})$ dla $x \neq 0$, oraz $\phi(0) := 0$. Wszystkie jej pochodne w punkcie 0 istnieją (na wykładzie wykazałem to dla $k = 1$, lecz są równe zero, więc szereg Maclaurina dla ϕ ma same zerowe współczynniki, $s(x) = 0\,\forall_{x\in\mathbb{R}}$. Natomiast $\phi(x) > 0$ dla $x \neq 0$.

Nasuwa się pytanie: „kiedy jest źle, a kiedy dobrze" w sensie równości pomiędzy funkcją klasy C^∞ i jej sumą szeregu Taylora? Odpowiedź wymaga osobnej teorii, podamy jedynie definicję:

Definicja Mówimy, że funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest analityczna (dokładniej, $\mathbb{R}$-analityczna) na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}$, jeżeli dowolny punkt $x_0 \in D$ ma otoczenie, w którym f jest równa sumie jakiegoś szeregu potęgowego. (Jak już wiemy, ten szereg musi być wówczas jej szeregiem Taylora.)

Ponieważ szereg potęgowy (mając wówczas dodatni promień zbieżności R) jest zbieżny także poza osią rzeczywistą, dla $z \in \mathbb{C}$ leżących w kole $|z - x_0| < R$, funkcje analityczne można przedłużyć na pewne otoczenie Ω zbioru D na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Gdy $R = \infty$, (np. dla $\exp, \sin, \cos$, sumując szereg Taylora otrzymamy przedłużenie tych funkcji dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Porównując szeregi Maclaurina dla funkcji $\exp(ix), x \in \mathbb{R}$ z rozwinięciami funkcji trygonometrycznych, Euler doszedł do swego słynnego wzoru:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ten dalszy fragment nie zawiera treści obowiązujących, ale warto go przejrzeć, choćby z ciekawości

Funkcje analityczne na otwartych podzbiorach Ω płaszczyzny zespolonej definiujemy analogicznie -jako równe sumie szeregów potęgowych w pewnych otoczeniach (w $\mathbb{C}$) każdego punktu ze zbioru Ω. Aby odróżniać te funkcje, zmienna w przypadku rzeczywistym oznaczamy symbolem x, t lub φ, zaś w przypadku zespolonym -jednym z symboli: z, w, λ, ζ. Można wykazać, że poza przypadkiem funkcji stałych, funkcja analityczna $f(z)$ nie może przyjmować wyłącznie wartości rzeczywistych w otoczeniu (zespolonym) żadnego punktu.

Ponadto przedłużenia analityczne funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych na dany obszar Ω, o ile istnieją, są wyznaczone jednoznacznie.

Innym warunkiem równoważnym analityczności jest istnienie w każdym punkcie $z_0 \in \Omega$ granicy przy $|z - z_0| \to 0$ z ilorazów różnicowych: $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, nazywanej pochodną zespoloną w tym punkcie i oznaczanej symbolem $f'(z_0)$. Inaczej, niż dla funkcji na odcinku w $\mathbb{R}$, tu z istnienia pierszej pochodnej w każdym punkcie z Ω wynika istnienie i ciągłość pochodnych wszystkich rzędów.

Analityczne są np. wielomiany postaci $p(z) = \sum_0^m a_k z^k$, funkcje wykładnicze, trygonometryczne powstałe przez rozszerzenie odpowiednich funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych na pewne obszary w $\mathbb{C}$.

Sumy, iloczyny, ilorazy (poza miejscami zerowymi mianownika) dwu funkcji analitycznych w Ω są również analityczne. Funkcje odwrotne do injekcji analitycznych i granice jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji analitycznych-są analityczne. Przy tym obraz zbioru otwartego w $\mathbb{C}$ przez f analityczną różną od stałej -jest zawsze otwarty.

Można wykazać, że gdy jakieś koło $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ zawiera się w dziedzinie funkcji analitycznej, to promień zbieżności jej szeregu Taylora w punkcie z_0 wynosi nie mniej, niż R. Jest więc inaczej, niż w $\mathbb{R}$. Na przykład, dziedziną funkcji $\mathbb{R}$-analitycznej $\frac{1}{1+x^2}$ jest $\mathbb{R}$, lecz promień jej szeregu Maclaurina wynosi 1, gdyż w takiej odległości od punktu 0 znajdują się liczby $\pm i$ -miejsca zerowe mianownika. (Jednoznacznym przedłużeniem analitycznym jest tu funkcja $\frac{1}{1+z^2}, z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, jej dziedzina nie obejmuje tych miejsc zerowych mianownika, bo np. przy $z \to i$ mamy $|f(z)| \to +\infty$.)

Suma szeregu potęgowego o dodatnim promieniu zbieżności jest analityczna we wnętrzu obszaru zbieżności (czyli w kole otwartym o środku z_0 i promieniu R rówym promieniowi zbieżności). Ale dowód jest dość żmudny -polega na "przesuwaniu punktu rozwinięcia w szereg" (tu punktu z_0) do innego punktu z wnętrza koła zbieżności.