11 Przekształcenie Abela, całki niewłaściwe

Jako ćwiczenie proszę sprawdzić, że *gdy szereg potęgowy $\sum c_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny w punkcie $z_1 \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, to jego promień zbieżności R jest nie mniejszy, niż $|z_1-z_0|$, czyli szereg ten jest zbieżny (przynajmniej) dla wszystkich takich $z \in \mathbb{C}$, że $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.* (wskazówka: ciąg $(c_n(z_1-z_0)^n)$ jest ograniczony)

Na wstępie przypomnijmy przekształcenie Abela używane w poprzednim semestrze dla szeregów liczbowych.

Załóżmy od razu, że ciąg (a_n) jest **monotoniczny** i mamy drugi (dowolny) ciąg (b_n) (np. liczb zespolonych lub nawet wektorów- wówczas zamiast modułów w odpowiednich miejscach powinny być normy). Oznaczmy przez B_n sumę częściową $B_n := \sum_{j=1}^n b_j$. Wówczas $b_1 = B_1, b_j = B_j - B_{j-1}$ dla wszystkich $j \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, więc sumę częściową $S_n := \sum_{j=1}^n a_j b_j$ można zapisać jako

$$a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+\cdots+a_n(B_n-B_{n-1}) = (a_1-a_2)B_1+\cdots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n.$$

Czyli $S_n = \sum_{j=1}^{n-1}(a_j-a_{j+1})B_j + a_nB_n$, a jej moduł można oszacować w przypadku, gdy $\beta := \sup_{j\in\mathbb{N}}|B_j| < +\infty$ w następujący sposób:

$$|S_n| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1}|a_j-a_{j+1}||B_j| + |a_nB_n| \leqslant \beta\left|\sum_{j=1}^{n-1}(a_j-a_{j+1})\right| + |a_n|\beta.$$

Moduł ostatniej sumy jest faktycznie równy sumie modułów, bo różnice $a_j - a_{j+1}$ mają wszystkie jednakowy znak. Ponadto redukują się składniki w ostatnim module sumy (czyli w $|(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)| = |a_1-a_n| \leqslant |a_1|+|a_n|$). Otrzymaliśmy przy powyższych założeniach tak zwaną

`Nierówność Abela:` $$|\sum_{j=1}^n a_jb_j| \leqslant \beta(|a_1|+2|a_n|) \qquad (1.11)$$

Dla szeregów liczbowych $\sum x_ny_n$ takich, że x_n zmierza do zera w sposób monotoniczny, a sumy częściowe $\sum_{j=1}^n y_n$ są wspólnie ograniczone -otrzymujemy stąd zbieżność szeregu $\sum x_ny_n$ (kryterium Dirichleta). Faktycznie, dowód przeprowadzamy wykorzystując nierówność (1.11) dla k-tych końcówek ciągów. Dokładniej: sprawdzamy warunek Cauchy'ego, czyli mamy wykazać, że $|\sum_{j=k}^m x_jy_j|$ są dowolnie małe dla $k<m$ dostatecznie dużych. Wystarczy przyjąć $a_j = x_{j+k-1}, b_j = y_{j+k-1}$ dla tak dużego k, by $(|a_k|+2|a_m|)2|\beta| < \epsilon$.

Gdy mamy ciągi funkcyjne, np. $a_n(t), b_n(t), t\in D$, gdzie ciag $(a_n(t))$ jest monotoniczny $\forall_{t\in D}$, zaś

$$\beta = \sup\{|\sum_{j=1}^n b_j(t)| : n\in\mathbb{N}, t\in D\} = \sup_n \|B_n\|_D < \infty$$

to w każdym punkcie t możemy stosować nierówność Abela (do wyrazów od k-tego począwszy) w postaci

$$\left|\sum_{j=k}^m a_j(t)b_j(t)\right| \leqslant 2\beta(|a_k(t)|+2|a_m(t)|).$$

(Zauważmy, że gdy $B_n(t) = \sum_{j=1}^n b_n(t)$, to $|\sum_{j=k}^m b_j(t)| = |B_m(t)-B_{k-1}(t)| \leqslant \|B_m\|_D + \|B_{k-1}\|_D \leqslant 2\beta$.) Aby uzyskać stąd jednostajny warunek Cauchy'ego wystarczy więc założyć monotoniczną i jednostajną zbieżność a_n do zera oraz warunek ograniczoności: $\beta<\infty$. Otrzymaliśmy więc następujące kryterium:

Twierdzenie.(Kryterium Dirichleta) Jeżeli sumy częściowe szeregu $\sum b_n(t)$ mają moduły jednostajnie ograniczone (przez wspólną stałą) na zbiorze D oraz ciąg funkcji $a_n : D\to\mathbb{R}$ jest monotoniczny i jednostajnie zbieżny do zera, to szereg $\sum_{n=1}^\infty a_nb_n$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze D.

Przykładem zastosowania tego twierdzenia jest szereg $\sum \frac{\sin nt}{n}$ na odcinku domkniętym D niezawierającym żadnego z punktów postaci $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tu ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest stały i wystarczy sprawdzić jednostajną ograniczoność $B_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt$. Można to zrobić na dwa sposoby:

Sposób 1. Wykorzystajmy wzór Eulera na $e^{i\varphi}$. Widzimy, że $B_n(t)$, to suma części urojonych z e^{ikt}, czyli część urojona z $\sigma_n(t) := \sum_{k=1}^{n} (e^{it})^k$, sumy częściowej ciągu geometrycznego o ilorazie e^{it}. Stąd $\sigma_n(t) = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}$ ma część urojoną nie większą, niż $|\sigma_n(t)| \leqslant \frac{2}{|1-e^{it}|}$. Ta funkcja jest jednostajnie ograniczona na powyższym zbiorze D, gdyż $|1 - e^{it}| \geqslant \mathtt{Re}(1 - e^{it}) = 1 - \cos t$.

Sposób 2. Korzystamy ze wzoru $2 \sin kt \sin \frac{t}{2} = \cos(kt - \frac{t}{2}) - \cos(kt + \frac{t}{2})$, który pomoże zamienić sumę $B_n(t)$ na sumę teleskopową, bo $kt + \frac{t}{2} = (k+1)t - \frac{t}{2}$. Mamy więc następujący wzór, z którego wynika dowodzona ograniczoność:

$$B_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin \frac{t}{2} \sin kt}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sum_1^n \Big(\cos(kt - \frac{t}{2}) - \cos(kt + \frac{t}{2}) \Big)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos(nt + \frac{t}{2})}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Przekształcając licznik ostatniego wyrażenia otrzymujemy wzór na $B_n(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kt = \frac{\sin(nt + \frac{t}{2}) \sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}. \tag{2.11}$$

Podobnie, jak w przypadku szeregów liczbowych, mamy nieco inne twierdzenie o zbieżności jednostajnej szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_n(t) b_n(t)$, gdy założenia o ciągu (a_n) osłabimy, zaś założenia o drugim ciągu wzmocnimy:

Twierdzenie.(KRYTERIUM ABELA) Jeżeli ciąg funkcji a_n jest monotoniczny i jednostajnie ograniczony w zbiorze D, zaś szereg $\sum b_j(t)$ jest jednostajnie zbieżny, to szereg $\sum a_j(t) b_j(t)$ jest jednostajnie zbieżny na tym zbiorze D.

W dowodzie ponownie korzystamy z przekształcenia Abela i z nierówności (1.11) dla "k–tych końcówek ciagów" podczas sprawdzania jednostajnego warunku Cauchy'ego. Tym razem jednak zamiast ze wspólnego oszacowania $\|B_k\|_D \leqslant \beta$ korzystamy z jednostajnej zbieżności szeregu $\sum b_j(t)$, co implikuje jednostajne zmierzanie do zera przy $k, n \to \infty, k < n$ sum k-tych "końcówek"

$$\beta_{k,n}(t) := \sum_{j=k}^{n} b_j(t).$$

Konkretnie, gdy $\forall_j \|a_j\|_D \leqslant M$, to dobieramy tak duże k_0, by dla wszystkich $k \geqslant k_0$ i dla $n > k$ było $\|\beta_{k,n}\|_D < \frac{\epsilon}{3M}$. Dla $j \geqslant k$ zapisujemy $a_j = \beta_{k,j} - \beta_{k,j-1}$ i po przekształceniu Abela dostajemy kończące dowód oszacowanie

$$\left| \sum_{j=k}^{n} a_j(t) b_j(t) \right| \leqslant \frac{\epsilon}{3M} \big(|a_k(t)| + 2|a_n(t)| \big) \leqslant \epsilon. \quad \square$$

Głównym zastosowaniem będzie zbadanie, co wynika ze zbieżności szeregu potęgowego $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ w punkcie z_1 na brzegu koła zbieżności $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Czy granica z wartości przy $z \to z_1$, ale dla z leżących na promieniu tego koła (tzn. na odcinku $[z_0 : z_1]$ o końcach z_0, z_1) będzie równa $f(z_1)$? Taka teza wyniknie ze zbieżności jednostajnej na tym odcinku ciągu sum częściowych $S_k(z)$ naszego szeregu (czyli wielomianów), gdyż zawężnie $f|_{[z_0:z_1]}$ będzie funkcją ciągłą.

Twierdzenie Abela: Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ o promieniu zbieżności $R \in (0, +\infty)$ jest zbieżny w którymś z punktów z_1 takim, że $|z_1 - z_0| = R$, to szereg jest zbieżny jednostajnie na odcinku[1] $[z_0 : z_1]$ łączącym ten punkt z punktem z_0 i jego suma jest funkcją ciągłą na tym odcinku.

[1] Można wykazać nieco więcej: jednostajną zbieżność w przecięciu sektora kątowego o wierzchołku z_1 i o kącie mniejszym od π z otwartym kołem zbieżności. Gdy punkt z zmierza do z_1 pozostając w takim zbiorze, mówimy, że jest to zbieżność w kierunku niestycznym do brzegu tego koła. Mamy wówczas $f(z) \to f(z_1)$. Dowód można znaleźć w książce S. Lei

Dowód. Dla liczby zespolonej $\lambda := z_1 - z_0$ o module R możemy zapisać każdy punkt $z \in [z_0 : z_1]$ w postaci

$$z = z_0 + t\lambda \quad \texttt{dla pewnego} \quad t \in [0,1].$$

Taka naturalna parametryzacja odcinka łączącego dwa punkty będzie często wykorzystywana w następnych wykładach. Mamy

$$c_n(z - z_0)^n = t^n c_n \lambda^n = a_n(t) b_n(t), \quad \texttt{gdzie} \quad a_n(t) = t^n,\, b_n(t) := c_n \lambda^n.$$

Ciąg (t^n) jest monotoniczny i jednostajnie ograniczony na odcinku $[0,1]$, pełni on rolę ciągu $(a_n(t))$ w kryterium Abela. Ponieważ funkcje $b_n(t)$ są w naszym przypadku stałe, zbieżność szeregu występującego w założeniach implikuje jednostajną zbieżność $\sum b_n(t)$. Nasza teza wynika z kryterium Abela. Dokładniej, otrzymamy zbieżność jednostajną w $[0,1]$ szeregu $\sum a_n(t) b_n(t)$, a to implikuje zbieżność badanego szeregu na odcinku $[z_0 : z_1]$. $\square$

W szczególności ($z_0 = 0, R = 1$) -jeśli szereg $\sum c_n$ jest zbieżny, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n.$$

Granica po prawej stronie tego wzoru może istnieć nawet gdy szereg nie jest zbieżny i mówimy wtedy o tzw. sumowaniu metodą Abela -przyjmując tę granicę jako "uogólnienie definicji sumy dla tego szeregu".

Jako zastosowanie, wykazaliśmy (notatki do wykładu 10), że

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \quad \texttt{oraz} \quad \frac{\pi}{4} = \texttt{arc}\,\texttt{tg}1 = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

11.1 Wzór Bonneta

Przekształcenie Abela można traktować jak dyskretny odpowiednik wzoru na całkowanie przez części (jeśli całkowaniu odpowiada branie sumy, a różniczkowaniu- tworzenie ciągu różnic sąsiednich wyrazów). W przypadku całek wynika stąd tzw. drugie twierdzenie o wartości średniej, zwane też wzorem Bonneta[2]

Twierdzenie.(Wzór Bonneta) Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, zaś $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna. Wówczas dla pewnego $\xi \in [a,b]$ jest

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)\int_a^{\xi} f(t)\,dt + g(b)\int_{\xi}^b f(t)\,dt. \tag{4.11}$$

Dowód przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, że $g \in C^1[a,b]$, $f \in C[a,b]$ co wystarcza w większości zastosowań. (Dowód w przypadku ogólnym można znaleźć np. w książce G.Fichtenholza. Wykorzystuje on przekształcenie Abela dla sum całek.)

Jak wiemy, $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną dla f. Stąd wartość $L := \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ możemy przedstawić (stosując w drugiej równości całkowanie przez części) w postaci

$$L = \int_a^b F'(t)g(t)\,dt = \big[Fg\big]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest równy $F(b)g(b)$, gdyż $F(a) = 0$. Dzięki monotoniczności g, funkcja g' ma stały znak i do ostatniej całki można stosować pierwsze twierdzenie o wartości średniej, znajdując punkt $\xi \in [a,b]$, dla którego

$$\int_a^b F(t)g'(t)\,dt = F(\xi)\int_a^b g'(t)\,dt = F(\xi)\big[g(b) - g(a)\big].$$

[2] Pierre Ossian Bonnet (1819-1892) matematyk francuski zajmujący się głównie geometrią różniczkową (wzór Gaussa-Bonneta)

Teraz już proste przekształcenia (z wykorzystaniem równości $F(\xi) = \int_a^\xi f(t)\,dt$) dają wzór (4.11). Faktycznie, wyciągając $g(b)$ przed nawias, mamy

$$L = g(a)\int_a^\xi f(t)\,dt + g(b)\left(\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^\xi f(t)\,dt\right). \ \Box$$

Głównym zastosowaniem powyższego twierdzenia będzie sprawdzenie (poprzez warunek Cauchy'ego) zbieżności pewnych całek niewłaściwych.

11.2 Całki niewłaściwe

Załóżmy, że $a < b \leqslant +\infty$ i dla każdej liczby β takiej, że $a < \beta < b$ jest $f \in R[a, \beta]$. Jeśli istnieje granica skończona

$$\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(t)\,dt, \quad \texttt{którą oznaczamy symbolem} \int_a^b f(t)\,dt \tag{1}$$

to mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna i tę granicę nazywamy całką niewłaściwą (z punktem niewłaściwym b).

Całki niewłaściwe mogą też mieć punkt niewłaściwy na lewym końcu przedziału -wtedy rozważamy $\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(t)\,dt$. Albo w środku -np. gdy f ma asymtptę pionową w punkcie $c \in (a, b)$. W tym ostatnim przypadku dzielimy przedział na 2 fragmenty i liczymy osobno całki niewłaściwe $\int_a^c$ oraz $\int_c^b$.

Na przykład, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{\beta\to+\infty}[-e^{-t}]_0^\beta = \lim_{\beta\to+\infty}(e^0 - e^{-\beta}) = 1$. Gdy $p > 1$, to $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ jest zbieżna (ile wynosi jej wartość?), a dla $p \leqslant 1$ - taka całka jest rozbieżna. Z kolei, $\int_0^1 \frac{1}{t^p}\,dt$ jest zbieżna dla $p < 1$.

Sama funkcja f nie musi być ani zbieżna do zera, ani nawet ograniczona, aby zapewnić zbieżność całki $\int_1^\infty f(t)\,dt$. Przykładem może być funkcja "schodkowa" na każdym z odcinków $[n, n + 3^{-n}]$ równa 2^n, w pozostałych punktach równa zero. Ogólniej, zauważmy, że dla funkcji niejujemnej, całka nieoznaczona jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy wartości $\int_a^\beta f(t)\,dt$ są wspólnie ograniczone. Faktycznie, jako funkcja zmiennej β, ta wartość jest niemalejąca, a dla funkcji monotonicznej istnienie skończonej granicy jednostronnej (podobnie, jak dla ciągów) jest równowżne z ograniczonością.

Zauważmy jeszcze, że gdy zwykła całka Riemanna istnieje, to istnieje też całka niewłaściwa po tym samym przedziale i jest ona równa całce Rieanna. Faktycznie, z addytywnej zależności od drogi całkowania wynika, że różnica między całkami Riemanna $\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^\beta f(t)\,dt$ jest równa całce $\int_\beta^b f(t)\,dt$, która zmierza do zera. Tutaj musi być $b < +\infty$, ponadto $f \in R[a, b]$ jest ograniczona, powiedzmy $|f(x)| \leqslant M$. Wówczas ograniczeniem dla $\left|\int_\beta^b f(t)\,dt\right|$ będzie $M \cdot (b - \beta)$, co zmierza do zera, gdy $\beta \to b^-$. Nie ma więc problemu z użyciem tego samego symbolu dla całki Riemanna i całki niewłaściwej.

Z warunku Cauchy'ego (równoważnego istnieniu granic skończonych) wynika jego odpowiednik:

Warunek Cauchy'ego dla całek niewłaściwych: Całka niewłaściwa (1) jest zbieżna $\Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{\gamma\in(a,b)}\forall_{\alpha,\beta}\, \gamma < \alpha < \beta < b \Rightarrow |\int_\alpha^\beta f(t)\,dt| < \epsilon$.
Faktycznie, ostatnia całka jest równa różnicy całek $\int_a^\beta f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt$, więc jest to zwykły warunek Cauchy'ego dla granicy funkcji. Najczęściej dla badania zbieżności całek niewłaściwych stosujemy następujące

Kryterium porównawcze: Jeżeli istnieje funkcja nieujemna g o zbieżnej całce niewłaściwej $\int_a^b g(t)\,dt$ taka, że $|f(t)| \leqslant g(t)$ dla wszystkich $t \in [a, b)$ (lub tylko w jakimś w lewostronnym sąsiedztwie punktu niewłaściwego b), to całka niewłaściwa $\int_a^b f(t)\,dt$ jest zbieżna.

Kryterium to jest łatwym wnioskiem z warunku Cauchy'ego i nierówności:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| \leqslant \int_\alpha^\beta \big|f(t)\big|\,dt \leqslant \int_\alpha^\beta g(t)\,dt.$$

Ostatnia z całek jest $< \epsilon$ dla α, β "dostatecznie bliskich punktowi niewłaściwemu" -z warunku Cauchy'ego dla całki niewłaściwej z g. $\square$

Warto zwrócić uwagę, że kryterium porównawczego nie da się zastosować do całek niewłaściwych warunkowo zbieżnych, tzn. takich, całek zbieżnych, dla których całka z modułu funkcji jest już rożbieżna. Przykładem będzie $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$. Najpierw zauważmy, że $\forall_a \int_a^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$. Gdyby ta całka była zbieżna, to ponieważ $\sin^2 t \leqslant |\sin t|$, mielibyśmy również zbieżność całki z $\frac{\sin^2 t}{t}$. Ponieważ dla $\alpha = t - \frac{\pi}{2}$ mamy $\cos\alpha = \sin t$, więc $\frac{\cos\alpha}{\alpha} = \frac{\sin t}{t - \frac{\pi}{2}}$. Dla $a > \frac{\pi}{2}$ mamy zbieżność całki $\int_a^\infty (\frac{1}{t-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{t})\,dt$ więc z kryternium porównawcego dość łatwo ze zbieżności całki z $\frac{\sin t}{t}$ wywnioskujemy zbieżności całek: z $\frac{\cos t}{t}$ oraz z $\frac{\cos^2 t}{t}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymalibyśmy więc sprzeczność (zbieżność całki $\int_a^\infty \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{t}\,dt$).

Całka z funkcji $\frac{\sin t}{t}$ nie jest więc bezwzględnie zbieżna. Ale jej zbieżność wynika (dla $f(t) = \sin t, g(t) = \frac{1}{t}$) z następującego twierdzenia:

Kryterium Dirichleta: Jeżeli funkcja $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, $\lim_{\beta\to b^-} g(\beta) = 0$ oraz $\forall_{\beta<b} f \in R[a,\beta]$, przy czym $M := \sup\{\int_a^\beta f(t)\,dt\} < +\infty$, to całka niewłaściwa $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ jest zbieżna.

Dowód. Sprawdzając warunek Cauchy'ego skorzystajmy na przedziale $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ ze wzoru Bonneta (4.11): Istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)g(t)\,dt\right| = \left|g(\alpha)\int_\alpha^\xi f(t)\,dt + g(\beta)\int_\xi^\beta f(t)\,dt\right| \leqslant \big(|g(\alpha)| + |g(\beta)|\big)2M.$$

Poza nierównością tójkąta korzystaliśmy tu z nierówności $\left|\int_\alpha^\xi f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^\xi f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt\right| \leqslant 2M$. Ponieważ liczba $|g(\alpha)| + |g(\beta)|$ jest dowolnie mała dla α, β dostatecznie bliskich b (odpowiednio: dostatecznie dużych gdy $b = +\infty$), otrzymujemy warunek Cauchy'ego i zbieżność całki. $\square$

Mamy dość wygodne kryterium wiążące zbieżność szeregu liczbowego $\sum f(n)$ ze zbieżnością całki niewłaściwej z nierosnącej funkcji $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}_+$:

Kryterium całkowe dla szeregów. Jesli $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest funkcją nieujemną, nierosnącą, to szereg $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ jest zbieżna.

Dowód. Zauważmy, że na odcinkach $[n, n+1]$ o długości 1 można oszacować f przez stałe: $f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1)$ gdy $n \leqslant t \leqslant n+1$, co po całkowaniu stron daje nierówności:

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,dt \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant f(n+1).$$

Teraz dodając te nierówności stronami dla $n \in \{1, \ldots, k\}$ i uwzględniając addytywną zależność całki od drogi całkowania, otrzymamy

$$S_k := \sum_{n=1}^k f(n) \geqslant \int_1^{k+1} f(t)\,dt \geqslant \sum_{n=1}^k f(n+1) = S_{k+1} - f(1).$$

Ponieważ f jest nieujemna, ciąg (S_k) jest niemalejący, zaś funkcja $[1,\infty) \ni M \mapsto \int_1^M f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ jest niemalejąca. Istnienie granic skończonych przy $k \to \infty$ (odp. przy $M \to \infty$) jest więc równoważne istnieniu majoranty dla takich wartości. Z ostatnich nierówności widzimy, że majorantą dla wyrazów ciągu sum częściowych jest $\int_1^\infty f(t)\,dt + f(1)$, zaś majorantą dla całek $\int_1^M f(t)\,dt$ jest $\lim_{k\to\infty} S_k$. Zbieżności te są wiec równoważne. $\square$

Wynika stąd łatwo zbieżność szeregu $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ dla $p > 1$. W wielu przypadkach skuteczność tego kryterium uzyskujemy dopiero w połączeniu z kryterium porównawczym.