12 Funkcje wielu zmiennych

W tym wykładzie zaczniemy od analizy samej przestrzeni d -wymiarowej $\mathbb{R}^d$. Będziemy ją traktować jako przestrzeń wektorową (z kanoniczną bazą zero-jedynkową złożoną z wektorów $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_d}$, gdzie np. $\vec{e_1} = (1, 0, 0, \dots, 0)$), unormowaną przez normę euklidesową. Dla wektora $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ zapisanego przez podanie współrzędnych $w_j = \vec{w} \cdot \vec{e_j}$ (czyli jego rzutów na j-tą oś układu kartezjańskiego) określamy jego "długość", czyli normę euklidesową $\|\vec{w}\|_2$, (dla uproszczenia oznaczaną dalej: $\|\vec{w}\|$) jako liczbę

$$\|\vec{w}\| := \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_d^2}.$$

Punkty przestrzeni traktujemy jako wektory zaczepione w zerze, więc np. dla punktów $\vec{w} = (w_1, \dots, w_d), \vec{v} = (v_1, \dots, v_d)$ odległość euklidesowa, to długość wektora $\vec{w} - \vec{v} = (w_1 - v_1, \dots, w_d - v_d)$ określona przez powyższą normę. Dla dalszego uproszczenia, zamiast $\vec{w}$ będziemy pisali $\mathbf{w}$. Dla wyobrażenia sobie większości potrzebnych w tym kursie pojęć geometrycznych wystarczy rozważać przypadek dwuwymiarowy. Współrzędne wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ zamiast (w_1, w_2) – zazwyczaj oznaczamy przez (x, y). Wtedy $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a prawdziwą ulgę poczujemy przy rozważaniu ciągów wektorów: $\mathbf{w}_n = (x_n, y_n)$, gdzie nie musimy teraz używać podwójnych wskaźników.

Przypomnijmy, że według ogólnej definicji zbieżności względem normy,

$$\mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{w}_n \ \texttt{(inne oznaczenie: } \mathbf{w}_n \to \mathbf{w}\texttt{)}, \quad \texttt{gdy} \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_n\| \to 0.$$

Jak już wiemy, zbieżność wektorów jest równoważna "zbieżności po współrzędnych" -czyli np. w $\mathbb{R}^2$ (na płaszczyźnie euklidesowej) gdy $\mathbf{w}_n = (x_n, y_n)$, $\mathbf{w} = (x, y)$, to $\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy równocześnie $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$. Wydawać by się mogło, że (może z wyjątkiem faktu nieistnienia dla wektorów żadnej "sensownej pod względem opisu zbieżności" relacji porządku) jest tak łatwo, jak w przypadku jednowymiarowym. Bo zamieniając moduł na symbol normy -mamy sporo analogii. Na przykład,

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ jest otoczeniem punktu $\mathbf{w}$, gdy istnieje liczba rzeczywista $\delta > 0$ taka, że gdy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ oraz $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| < \delta$, to również $\mathbf{v} \in A$. ("Zbiór A zawiera wraz z punktem $\mathbf{w}$ również punkty dostatecznie jemu bliskie.")

Sąsiedztwo punktu, to otoczenie pomniejszone o ten punkt (tu zbiór postaci $A \setminus \{\mathbf{w}\}$). Używa się oznaczenia $S(\mathbf{w}, \delta)$ dla sąsiedztwa: $\{\mathbf{v} : 0 < \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| < \delta\}$.

Zbiór $U \subset \mathbb{R}^d$ jest otwarty, gdy jest on otoczeniem każdego ze swych punktów.

Zbiór $F \subset \mathbb{R}^d$ jest domknięty, gdy jego dopełnienie: $\mathbb{R}^d \setminus F$ jest otwarte.

Domknięcie $\overline{A}$ zbioru A, to najmniejszy domknięty nadzbiór zbioru A.

$\mathbf{v}$ jest punktem skupienia zbioru A, gdy każde sąsiedztwo tego punktu ma niepuste przecięcie z A.

Jak łatwo (proszę tylko upewnić się, że łatwo) sprawdzić, mamy następujące

Obserwacje:

1. Gdy V jest otoczeniem punktu, do którego zmierza pewien ciąg wektorów $\mathbf{w}_n$, to dla prawie wszystkich n jest $\mathbf{w}_n \in V$ (tzn. $\exists_{n_0} \forall_{n \geqslant n_0} \mathbf{w}_n \in V$)

2. Zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} = A$

3. $\mathbf{w} \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists_{\mathbf{w}_n \in A}\ \mathbf{w} = \lim \mathbf{w}_n$. Pondato $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. $\mathbf{v}$ jest punktem skupienia $A \Leftrightarrow \mathbf{v} \in \overline{A \setminus \{\mathbf{v}\}}$.

5. Suma mnogościowa dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest otwarta. Otwarte i domknięte są: $\emptyset, \mathbb{R}^d$. Przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięte.

6. Przecięcie dwu (lub skończonej ilości) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Suma dwu (lub $n < \infty$) zbiorów domkniętych jest domknięta.

Również pojęcia granicy i ciągłości mają analogiczną (jak w $\mathbb{R}$) postać:

Definicja. Zakładamy, że $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^k$, oraz $\mathbf{w}$ jest punktem skupienia zbioru D. Wówczas wektor $\mathbf{g}$ jest granicą odwzorowania $\mathbf{F}$ w punkcie $\mathbf{w}$, co zapisujemy:

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{g}, \quad \texttt{lub:} \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}) \to \mathbf{g} \;\; \texttt{przy} \; \mathbf{v} \to \mathbf{w},$$

gdy w każdym (dowolnie zadanym) otoczeniu Ω punktu $\mathbf{g}$ zawiera się obraz pewnego sąsiedztwa W punktu $\mathbf{w}$, czyli $\mathbf{F}(W) \subset \Omega$. Jeśli rozmiar otoczenia Ω podany jest przez ϵ, zaś "promieniem sąsiedztwa" jest δ, to otrzymujemy znaną postać definicji Cauchy'ego:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\mathbf{v}\in D}\,(0 < \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| < \delta) \Rightarrow \|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{g}\| < \epsilon.$$

Mówimy, że powyższe odwzorowanie jest ciągłe w punkcie $\mathbf{w} \in D$ gdy albo $\mathbf{w}$ nie jest punktem skupienia zbioru D, albo $\lim\limits_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{w})$.

Naśladując odpowiednie rozumowania z $\mathbb{R}$ -proszę sprawdzić (przynajmniej) jeden z dowodów punktów poniższego twierdzenia.

Twierdzenie.

1. Granica, jeśli istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie.
2. Granica sumy dwu odwzorowań jest sumą granic. Jeśli dla $D \subset \mathbb{R}^d$ funkcja $\varphi : D \to \mathbb{R}$ oraz odwzrowanie $F : D \to \mathbb{R}^d$ mają granice w punkcie $\mathbf{w}$, to ich iloczyn ma granicę będącą iloczynem tych granic.
3. Definicja granicy jest równoważna "warunkowi ciągowemu" Heinego:
$$(\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}, \mathbf{w}_n \in D \setminus \{\mathbf{w}\}) \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{w}_n) \to \mathbf{g}$$
4. Gdy $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_k) : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, \mathbf{g} = (g_1, \ldots g_k) \in \mathbb{R}^k$, to
$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{w}} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{g} \Leftrightarrow (\forall_{j\in\{1,2,\ldots,k\}}\, g_j = \lim f_j(\mathbf{v}) \quad \texttt{przy} \quad \mathbf{v} \to \mathbf{w})$$
5. Suma, złożenie odwzorowań ciągłych -są również ciągłe

W szczególności, dzięki tezie 4., granice, ciągłość odwzorowania o wartościach w $\mathbb{R}^k$ (czyli zestawienia $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ funkcji o wartościach skalarnych wystarczy zbadać oddzielnie dla każdej ze składowych (czyli dla wszystkich $f_j, j = 1, \ldots, k$). Ma to oczywisty związek ze "zbieżnością po współrzędnych". Z drugiej strony, mamy (np. dla $d = 2$) warunek Heinego i przy badaniu granicy w punkcie (x_0, y_0) funkcji $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rozpatrujemy ciągi punktów $(x_n, y_n) \in D$ zbieżne do (x_0, y_0). To może i pojęcie granicy podwójnej da się "rozłożyć na współrzędne"? -NIESTETY, NIE!

Przykład 1. Jeśli $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$ oraz $f(0, 0) = 0$, to $\forall_y$ funkcja $\mathbb{R} \ni x \to f(x, y)$ (w zapisie bezargumentowym oznaczamy ją $f(\cdot, y)$)oraz $\forall_x$ funkcja $f(x, \cdot)$ -są ciągłe, zmierzają do zera w zerze. Tak więc, istnieje tzw. granica iterowana (od włoskiego *iterare* = powtarzać):

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0.$$

Ale dla zbieżnego do zera ciągu $\mathbf{w}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ mamy $f(\mathbf{w}_n) = \frac{1}{2} \not\to 0$.

Wykres f z tego przykładu możemy sobie wyobrazić jako pewną powierzchnię zakrzywioną w $\mathbb{R}^3$. Na osiach OX,OY jest ona równa zero, na każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$ (z jego wyjątkiem) jest stała (np.$-\frac{1}{2} \leqslant f(x, ax) = \frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{1}{2}$), wartości ekstremum mamy gdy $a = \pm 1$. W punkcie (0,0) wykres jest "rozerwany"- zachowuje się trochę tak, jak powierzchnia schodów kręconych w pobliżu ich osi - ma przyrosty bliskie 1 dla dowolnie małych przyrostów argumentu. We współrzędnych biegunowych $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ jej wartość wyraża się jako funkcja $\cos\varphi\sin\varphi$, niezależąca od r. Można powiedzieć, że jest to funkcja jednorodna stopnia 0, gdzie jednorodność stopnia p oznacza, że

$$\forall_{r\in\mathbb{R}}\, f(r\mathbf{w}) = r^p f(\mathbf{w}).$$

Takie funkcje jednorodne stopnia 0, o ile nie są stałe (a są stałe na prostych przechodzących przez $\vec{0}$ z wyjętym tym początkiem układu), nie mogą mieć granicy w zerze! W większości zadań o granicach podwójnych występuje tego typu problem -ale czasami dopiero podstawienie (np. typu $z = y^2$) sprowadzi f do postaci jednorodnej. Przykładem jest $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ -stała na parabolach $y = ax^2$. Ta funkcja nie ma granicy w zerze, choć na każdej prostej przechodzącej przez początek układu -zmierza do zera (proszę sprawdzić!)

Mamy więc istotny problem. Liczenie granic metodą ustalania zmiennych, (czyli *granic iterowanych w punkcie* (x_0, y_0)) jak widzimy, nie prowadzi do celu, ale przyjrzyjmy się mu dokładniej. Przypuśćmy, że dla x z pewnego otoczenia x_0, ale $x \neq x_0$ istnieje $\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \alpha(x)$. Podobnie, dla $y \neq y_0$, y dostatecznie bliskich y_0 załóżmy, że istnieje $\beta(y) := \lim_{x\to x_0} f(x, y)$. Wówczas mamy dwie funkcje α, β, które możemy nazwać granicami częściowymi. Jeśli istnieją granice: $A = \lim_{x\to x_0} \alpha(x)$ oraz $B = \lim_{y\to y_0} \beta(y)$, to nazywamy je *granicami iterowanymi funkcji* f w punkcie (x_0, y_0).

Niestety, z istnienia i równości granic iterowanych nie wynika istnienie granicy podwójnej -czyli, według naszej definicji, granicy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

Dla funkcji z poprzedniego przykładu mamy $A = B = 0$, lecz jak wiemy, granica nie istnieje. Na odwrót, z istnienia granicy (podwójnej) nie wynika istnienie granic iterowanych, a nawet granic częściowych. Tu przykładem może być $f(x, y) = x\sin\frac{1}{y}$ dla $y \neq 0$ oraz $f = 0$ na osi $0X$ (tzn. dla $y = 0$). Granica przy $(x, y) \to (0, 0)$ istnieje i równa jest zero, ale dla $x \neq 0$ powyższa $\alpha(x)$ nie istnieje.

Twierdzenie. (O granicy podwójnej[1])

1. Gdy istnieje granica podwójna $g = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ oraz granica częściowa, np. $\alpha(x)$ to istnieje w danym punkcie odpowiednia granica iterowana (tu A) i jest ona równa g. W szczególności, gdy istnieją obydwie granice częściowe i granica podwójna, to granice iterowane są równe.

2. Istnienie granicy podwójnej można wywnioskować z jednostajnej zbieżności granicy częściowej: *jeśli dla pewnego* $\Delta > 0$ *wartości*

$$\sup\{|f(x, y) - \alpha(x)| : 0 < |x - x_0| \leqslant \Delta\}$$

zmierzają do zera przy $y \to y_0$ *oraz gdy istnieje* $A = \lim_{x\to x_0} \alpha(x)$, *to granica podwójna istnieje, równa* A.

Dowód. 1. Z istnienia granicy podwójnej, dla $\epsilon > 0$ dobierzemy takie $\delta_* > 0$, że gdy $|x - x_0| < \delta_*$ oraz $|y - y_0| < \delta_*$, to $|f(x, y) - g| < \epsilon$ (zamiast normy euklidesowaj użyliśmy tu równoważnej normy maksimum). Ponieważ $|\alpha(x) - g| \leqslant |\alpha(x) - f(x, y)| + |f(x, y) - g|$, ta wartość będzie $< 2\epsilon$, o ile równocześnie każdy ze składników po prawej stronie będzie $< \epsilon$. Pierwszy z modułów będzie $< \epsilon$ dla $|y - y_0| < \delta_x$, gdzie δ_x jest liczbą dodatnią zależną od x, ϵ. Jeśli więc mamy takie x, że $|x - x_0| < \delta$, to dla tego x dobieramy "pomocnicze" y spełniające warunek $|y - y_0| < \min(\delta_x, \delta_*)$ i otrzymujemy naszą tezę: $A = g$. W przypadku istnienia drugiej granicy częściowej będzie również $B = g$, a wówczas $A = B$. (Bez istnienia granicy podwójnej- będzie możliwe, że $A \neq B$ np. gdy $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$).

[1] Podobne twierdzenie można spotkać pod nazwą "Twierdzenie Moore'a - Osgooda")

Dowód tezy 2.: Skoro $f(x,y) \rightrightarrows \alpha(x)$ (jednostajnie wzgl. x z przedziału $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ przy $y \to y_0$), to dla $\epsilon > 0$ znajdziemy $\delta_\epsilon > 0$ tak małe, by dla wszystkich x z tego przedziału i dla $|y-y_0| < \delta_\epsilon$ było $|f(x,y)-\alpha(x)| < \epsilon$. Z kolei, $|\alpha(x)-A| < \epsilon$ dla $|x-x_0| < \delta_\bullet$ i nierówność $|f(x,y)-A| \leqslant 2\epsilon$ uzyskamy gdy $\|(x-x_0, y-y_0)\| < \min(\delta_\epsilon, \delta_\bullet)$. $\square$

Można też podać dowód tezy $A = B$ przy założeniu, że obydwie granice iterowane istnieją, a jedna z nich jest jednostajna -stosując twierdzenie o ciągłości granicy jednostajnej funkcji ciągłych, lecz wymaga to rozważania nieco ogólniejszej topologii.

Podobny charakter ma twierdzenie o zmianie kolejności w sumach podwójnych typu $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk})$ tak, by sumowanie najpierw względem n, później- wzgl. k dało ten sam wynik (a tak na ogół być nie musi!) Jest to "dyskretny odpowiednik twierdzenia Fubiniego dla całek podwójnych". Co ciekawe, warunkiem wystarczającym dla takiej niezależności sum podwójnych (nawet liczb zespolonych a_{nk}) od kolejności sumowań jest, by $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|) < \infty$, lub inne założenie -o nieujemności wszystkich a_{nk}. Przyczyną możliwej patologii są tu ukryte w procesach sumowania symbole nieoznaczone $\infty - \infty$.

Przykład 2. ("*Koszmar księgowej*") W celu sprawdzenia poprawności sumowań wierszy z macierzy liczb, księgowa sumuje w pionie kolumny, potem dodaje do siebie wyniki - suma sum wierszy musi się równać sumie sum liczonych w kolumnach -to jedna z podstaw księgowości. A jeśli pierwszym wierszem jest ciąg $\frac{1}{n(n+1)}$ - to suma tego szeregu wynosi 1. Aby "ułatwić" - w pierwszym wierszu zamiast początkowej liczby $\frac{1}{2}$ wstawmy $\frac{1}{2}-1$, czyli $-\frac{1}{2}$. Pozostałe wyrazy -bez zmian -w sumie (dla pierwszego wiersza) otrzymamy -zero. W kolejnych wierszach wymazujemy wszystko poniżej głównej przekątnej tej nieskończonej macierzy, czyli w wierszu o numerze k wstawiamy pierwszych $k-1$ zer , wyrazy od numeru $n > k$, to nadal $\frac{1}{n(n+1)}$, a na głównej przekątnej = dla wyrazu o numerze k wstawmy $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k}$, otrzymując sumę k-tego wiersza też równą zero. Sumując w pionie te zera -też mamy zero. A co dostajemy sumując kolumny naszej macierzy? Są to sumy skończone (tylko raz trafiamy na wyraz z przekątnej $a_{kk} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k}$, -plus $k-1$ jednakowych składników równych $\frac{1}{k(k+1)}$ każdy. Suma w kolumnie o numerze k, to $(k \cdot \frac{1}{k(k+1)}) - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ Suma tych sum, to -1 i jeszcze długo w nocy nasza księgowa nie będzie mogła zasnąć, sprawdzając, gdzie zrobiła błąd.

Ponieważ pojęcie granicy podwójnej będzie kluczowe dla badania różniczkowalności, prześledźmy na przykładach metodę badania, czy takie granice istnieją. Ponieważ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ dokładnie wtedy, gdy $(x-x_0, y-y_0) \to (0,0)$, czyli gdy równocześnie $x-x_0 \to 0$ oraz $y-y_0 \to 0$, ograniczymy się do badania granic w zerze ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ jest początkiem układu współrzędnych).

Przykład 3. $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x}\sin(xy^2)\sqrt[3]{(y^2)}}{x^2+y^4}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Czy trudno jest wykazać, że f zmierza do zera przy $(x,y) \to \mathbf{0}$? -zależy (od metody). Spróbujmy metody oszacowań: Niech M oznacza mianownik. ($M = M(x,y)$ zmierza do zera, podobnie jak licznik.) Szacujemy: $|x| \leqslant M^{\frac{1}{2}}, |y| \leqslant M^{\frac{1}{4}}$. Możemy to wykorzystać do oszacowania licznika przez M^r. Jeśli uda się takie oszacowanie dla pewnego $r > 1$, to $|f(x,y)| \leqslant M^{r-1}$, co zmierza do zera przy $M \to 0$ (a tak jest gdy $(x,y) \to \mathbf{0}$), bo $r-1 > 0$. Licznik jest tu iloczynem, jeśli każdy z czynników oszacujemy z osobna przez pewne potęgi M, to r otrzymamy sumując wykładniki. Np. $|\sqrt[3]{x}| \leqslant M^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = M^{\frac{1}{6}}$. Natomiast $|\sin t| \leqslant |t|$ dla $t = xy^2$ daje $|\sin(xy^2)| \leqslant M^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2} = M$. Na koniec - jeszcze $y^2 \leqslant M^{\frac{1}{2}}$. Otrzymamy $r = \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} > 1$, więc szukaną granicą jest zero.

Trochę gorzej jest w przypadku ułamków o mianowniku zmiennego znaku (np. $x - y^3$). W takich przypadkach należy szukać raczej ciągów, dla których mianownik szybciej zmierza do zera niż licznik, wówczas granicy (skończonej) nie będzie. (Czynnik zmierzający do zera może czasami się uprościć np. dzięki wzorom skróconego mnożenia.) Nie będziemy się jednak tego typu granicami zajmowali, bo do badania różniczkowalności na ogół wystarcza granica o mianowniku typu $(x^2+y^2)^s$ dla $s > 0$.

Przykład 2 $g(x,y) = \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^4}$. Ponieważ $g(0,y) = 0 = g(x,0)$, granice iterowane istnieją i są równe zero. Aby wykazać nieistnienie granicy, wystarczy znaleźć ciąg $(s_n, t_n) \to (\mathbf{0})$, dla którego $g(s_n, t_n)$ nie zmierza do zera. Trzeba pamiętać, że $1 - \cos y = \cos 0 - \cos y = -2 \sin \frac{0+y}{2} \sin \frac{0-y}{2} = 2 \sin^2 \frac{y}{2}$, więc $\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos y} = 2$, co pozwoli na pozbycie się funkcji trygonometrycznej. Dla $g_1(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ znajdziemy odpowiednie s_n, t_n. Podstawienie $s_n = t_n = \frac{1}{n}$ nie będzie skuteczne. Ale dla $s_n = \frac{1}{n^2}$, $t_n = \frac{1}{n}$ mamy $g_1(t_n^2, t_n) = \frac{1}{2}$. Więc granica nie istnieje! Ale jak można do tego dojść?

(1) Bardziej skomplikowane funkcje zamieniamy na asymptotycznie równoważne wielomiany. (np. dla $\phi(x)$ szukamy takiego $k \in \mathbb{N}$, aby $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x^k} = C$, gdzie $0 < C < +\infty$. Jeśli ϕ jest jednym z czynników licznika funkcji $g(x,y)$, funkcję g możemy pomnożyć przez iloraz $\frac{x^k}{\phi(x)}$, otrzymując prostszą w badaniu funkcję g_1, w której na miejscu ϕ występuje już x^k (na koniec stosując twierdzenie o granicy iloczynu).

(2) Przypuśćmy, że doprowadzimy do postaci, w której licznik i mianownik są wielomianami, lub iloczynami pewnych potęg, sumami takich ilocznów. Jeśli $M(tx, ty) = t^s M(x,y)$ dla dowolnych $t, x, y \in \mathbb{R}$, to -jak już wspomniałem, M jest funkcją jednorodną stopnia s. Czasami -jak w naszym ostatnim przykładzie, funkcja nie będzie jednorodna, lecz po podstawieniu nowej zmiennej ($x^a = X$,lub $Y := y^b$) stanie się jednorodną funkcją zmiennych X, Y.

Jeśli po takim „ujednorodnieniu” otrzymamy w liczniku funkcję postaci $X^k Y^l$, gdzie $k + l > s$, granica równa zero wyniknie z oszacowań jak w przykładzie 1, o ile składniki mianownika są nieuejmne (w parzystych potęgach). Jeśli natomiast $k + l = s$, to licznik $L(x,y)$ i mianownik $M(x,y)$ mają jednakowy stopień jednorodności, zaś ich iloraz będzie stały na prostych przechodzących przez początek układu. Są to proste o równaniach $AX + BY = 0$, np. $Y = cX$. Ciągi $(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$ zmierzają do zera, więc $g(\frac{1}{n}, c\frac{1}{n})$ zmierza do granicy funkcji w punkcie $\mathbf{0}$, o ile taka istnieje. Ale $(\frac{1}{n})^s$ wyłączamy zarówno w liczniku, jak i w mianowniku, co się redukuje. Stąd wartości g na tych ciągach są stałe, równe $g(1,c)$. Jeśli granica w zerze istnieje, musi też być taka sama (równa $g(1,c)$). Funkcja jest stała na prostych przechodzących przez $\mathbf{0}$, ta wartość jest równa granicy w zerze, więc taka sama na każdej z tych prostych- w konsekwencji sama funkcja musi być stała. W przeciwnym razie- granica nie istnieje. Szukanie "kierunku podejścia do $\mathbf{0}$ podyktowane jest więc procesem "ujednorodnienia mianownika".

(3) Czasami funkcja zależy jedynie od pewnego wielomianu zmiennych x, y, pojawiającego się w jej różnych miejscach- jest to podstawienie do funkcji zmiennej takiego typu pozwoli znaleźć granicę metodami granicy funkcji złożonej.

Do granic podwójnych możemy stosować twierdzenia znane z teorii granic zwykłych, dzięki równoważnosci definicji z warunkiem HEINEGO. Na przykład, granica sumy jest sumą granic, nierówności słabe zachowują się przy przejściu do granic. Ostre nierówności między granicami utrzymują się w pewnym sąsiedztwie punktu, w którym liczymy granice.