13 Zbiory zwarte

Definicja. Podzbiór $K \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy **zbiorem zwartym**, gdy każdy ciąg P_n jego punktów zawiera podciąg zbieżny do pewnego punktu $P_0 \in K$.
Rodzina $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ podzbiorów $\mathbb{R}^d$ jest **otwartym pokryciem zbioru** K, gdy wszystkie zbiory U_α są otwarte oraz ich suma: $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ zawiera K.

Twierdzenia.

1. Zbiór $K \subset \mathbb{R}^d$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

2. Obraz zbioru zwartego przez odwzorowanie ciągłe $F : K \to \mathbb{R}^m$ jest zwarty. Jest więc domknięty. Gdy $m = 1$, to w szczególności F osiąga wartości: najmniejszą i najwiekszą w pewnych punktach zbioru K.

3. Rodzina zbiorów $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ będąca pokryciem otwartym zbioru zwartego K zawiera podrodzinę skończoną pokrywającą K, tzn.[1]

$$\exists_n \exists_{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in A}\ K \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}.$$

Teza 1. jest d - wymiarowym **Twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa**, 2. -to **Twierdzenie Weierstrassa**, zaś 3. -to **Twierdzenie Heinego-Borela.**

Dowód.
1. (implikacja $\Rightarrow$): Gdy zbiór jest zwarty, to nie może być nieograniczony, bo w przeciwnym przypadku dla pewnnego ciągu jego punktów mielibyśmy $\|P_n\| \to \infty$ (to byłoby też prawdą dla jego podciągów, w tym dla P_{n_k} zbieżnego (np. do P_0). Ale norma jest ciągła, więc powinno być $\|P_{n_k}\| \to \|P_0\|$ -sprzeczność.

Gdyby zbiór nie był domknięty, to pewien ciąg P_n zbieżny w $\mathbb{R}^d$ miał by granicę $P_0 \notin K$. Ale taka sama, czyli równa P_0 będzie granica dowolnego podciągu. I powinna naleć do K. Niemożliwe.
(implikacja $\Leftarrow$): Na odwrót, gdy K jest ograniczony, to dowolnie wybrany ciąg jego punktów jest ograniczony. Ciąg jego j-tych współrzędnych -też. Ale z niego (stosując Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa w $\mathbb{R}$) wybieramy podciąg zbieżny. Najpierw dla $j = 1$. Potem dla $j = 2$-ale już z tego pierwszego podciągu -wybieramy dalszy podciąg tak, by zapewnić zbieżność drugich współrzędnych. Pierwsze współrzędne będą zbieżne, jako podciąg ciągu zbieżnego. I tak dalej -czyli metodą indukcji względem d -otrzymujemy podciąg, którego wszystkie współrzędne są zbieżne. Ale to jest właśnie zbieżność w normie euklidesowej $\mathbb{R}^d$. Granica musi należeć też do zbioru K, dzięki jego domkniętości (por. Obserwacje 2.,3. z poprzedniego wykładu).

2. Punkty Q_n należące do tego obrazu są postaci $F(P_n)$ dla pewnych $P_n \in K$. Po przejściu do pewnego podciągu mamy $P_{n_k} \to P_0$, a wówczas $P_0 \in K$ oraz (z warunku Heinego ciągłości) $F(P_{n_k}) = Q_{n_k} \to F(P_0)$. Gdy $F(K) \subset \mathbb{R}$, to jako zwarty -zawiera swoje kresy, czyli $\min F(K) \in F(K)$, analogicznie dla maksimum.

3. Dowód przedstawię jedynie[2] dla $K \subset \mathbb{R}$. Gdu $a = \inf K, b = \sup K$, niech

$$s := \sup\{c \in [a,b] \cap K : K \cap [a,c]\ \texttt{ma pokrycie skończoną ilością zbiorów}\ U_\alpha\}$$

Mamy $a \in K$, więc punkt a wraz z pewnym otoczeniem postaci $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ należy do jakiegoś U_α tworzącego 1-elementowe (więc skończone) pokrycie dla $[a, a+\frac{\epsilon}{2}] \cap K$. Supremum tego (niepustego) zbioru jako granica ciągu punktów z tego zbioru (zawartego w K) -również należy do K i jest $s \geqslant a+\epsilon > a$. Ponieważ dla pewnego $\beta \in A$ jest $s \in U_\beta$, s należy do U_β wraz z pewnym odcinkiem $[s-\delta, s+\delta]$, gdzie $\delta > 0$. Gdyby było $s < b$, to (zmniejszając w razie

[1] Ten warunek jest definicją zwartości w ogólnych przestrzeniach topologicznych. Por. Uwaga (2) na następnej stronie

[2] Dla $d > 1$ można np. stosować indukcję.

potrzeby δ tak, by otrzymać $\delta < b-s$) i dołączając U_β do skończonego pokrycia zbioru $K \cap [a, s - \frac{\delta}{2}]$, otrzymamy sprzeczność: liczbę $s_1 > s, s_1 \in K \cap (s, s+\delta]$ należącą do zbioru, którego supremum miało być równe s-chyba, że ostatnie przecięcie jest zbiorem pustym.

W takim przypadku (który nie wystąpi, gdy zbiór K jest odcinkiem) - ponieważ $b = \sup K > s$, istnieje w zbiorze $K \setminus [a, s+\delta)$ element najmniejszy, powiedzmy s_2 -który należy do pewnego $U_\kappa, \kappa \in A$. Wówczas dokładając do skończonego pokrycia ten U_κ -otrzymamy skończone pokrycie dla $K \cap [a, s_2] = K \cap [a, s] \cup \{s_2\}$, więc sprzecznością jest w tym przypadku istnienie $s_2 > s$ należącego do zbioru, którego supremum miało być równe s. □

Dowód w przypadku gdy $K = [a, b]$ byłby znacznie prostszy (wtedy $s_1 = s + \delta$ i nie trzeba szukać s_2). Do tego przypadku sprowadzi nas następujący

Lemat. Domknięte podzbiory K zbiorów $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}^d$, dla których zachodzi teza 3. ostatniego twierdzenia, spełniają też tę tezę.

(Faktycznie, do pokrycia otwartego zbiorami U_α zbioru K dołączmy zbiór otwarty $U_* := \mathbb{R}^d \setminus K$, otrzymując z tezy 3. skończony układ pokrywający zbiór $\mathbb{I}$. Z tego układu możemy usunąć zbiór U_* -pozostałe pokrywać nadal będą K.)

Warunek równoważny zwartości zbioru K dotyczy rodzin zbiorów domkniętych i jest następującej postaci:
Przecięcie rodziny $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j\in J}$ zbiorów domkniętych zawartych w K jest niepuste: $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, jeśli $\mathcal{F}$ ma tę własność, że przecięcie każdej jej skończonej podrodziny jest niepuste. (Takie rodziny nazywamy scentrowanymi, np. scentrowane są ciągi malejące zbiorów niepustych-czyli gdy $J = \mathbb{N}, \forall_{n\in\mathbb{N}} F_{n+1} \subset F_n$ oraz $F_n \neq \emptyset$.) Można go nietrudno uzyskać z tezy 3. o pokryciach otwartych -biorąc dopełnienia $U_j = \mathbb{R}^d \setminus F_j$ tych zbiorów domkniętych.

UWAGI:

(1) Teza 3. z ostatniego twierdzenia jest używna w topologii jako definicja zwartości. Dowodzi się, że w przestrzeniach metrycznych (np. dla podzbiorów $\mathbb{R}^d$) jest ona równoważna naszej, "ciągowej" definicji - oficjalnie nazywanej *ciągową zwartością*.

(2) W przestrzeniach unormowanych nieskończenie wymiarowych zbiory domknięte i ograniczone nie muszą już być zwarte. Na przykład, ciągi $0-1$-kowe $\vec{e}_n$ w ℓ^1 -przestrzeni ciągów liczbowych sumowalnych (c_n) z normą $\|(c_n)\|_1 := \sum_{n=1}^\infty |c_n|$ stanowią domknięty podzbiór sfery jednostkowej. Nie ma tu żadnego podciągu zbieżnego, bo dla $m \neq k$ mamy $\|\vec{e}_m - \vec{e}_k\|_1 = 2$, co wyklucza warunek Cauchy'ego w dowolnym podciągu. ($\vec{e_n} \in \ell^1$, to ciąg $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, w którym jedynka występuje tylko raz, na n-tym miejscu.)

13.1 Zastosowania zwartości

Domkniętość "ciągłych obrazów" jest najczęściej stosowaną własnością zbiorów zwartych. Zauważmy, że obraz przez funkcję ciągłą zbioru domknietego nieograniczonego nie musi być domknięty (np. obraz $\mathbb{R}$ przez `arctg`). Czasami można zamiast zwartości wykorzystywać zupełność zbioru D, ale wówczas o odwzorowaniu trzeba zakładać np. injektywność i jednostajną ciągłość odwzorowania odwrotnego do $f : D \to f(D) \subset Y$. W przypadku odwzorowań liniowych f, gdy D, Y są przestrzeniami unormowanymi, takim warunkiem będzie "ograniczoność z dołu": $\exists_{c>0} \forall_{x\in D} \|f(x)\| \geqslant c\|x\|$. Odwzorowanie odwrotne f^{-1} określone na $f(D)$ spełni wtedy warunek Lipschitza ze stałą $\frac{1}{c}$, a przeciwobraz ciągu Cauchy'ego wektorów $y_n \in f(D)$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni D i gdy ta będzie zupełna, otrzymamy jego zbieżność, czyli istnienie $x_0 = \lim f^{-1}(y_n)$. Stąd można łatwo wywnioskować, że wówczas obrazy $f(\Delta)$ domkniętych podzbiorów Δ zbioru D są domknięte.

Dokładniej omówimy tylko 2 zastosowania zwartości. Dalsze -może pojawią się na ćwiczeniach. Podstawą tych zastosowań jest następujący

Lemat. Jeżeli $\psi : K \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym K oraz

$$\forall_{x\in K}\, \psi(x) > 0, \quad \texttt{to} \quad \inf_{x\in K} \psi(x) > 0. \tag{1}$$

Wynika on z faktu, że ψ osiąga w jakimś punkcie $x_{min} \in K$ wartość najmniejszą, czyli to infimum. $\square$

W pierwszym zastosowaniu ψ będzie jakąś (dowolną) normą na $\mathbb{R}^d$, np. niech $\psi(x) = \|x\|$. Wykażemy następujące

Twierdzenie. Każda norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^d$ jest równoważna z normą euklidesową $\|\cdot\|_2$, to znaczy, istnieją stałe $m, M > 0$ takie, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^d}\ m\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant M\|x\|_2. \tag{2}$$

Jak można (w miarę łatwo) sprawdzić, warunek (2) jest równoważny temu, że dla każdego ciągu wektorów $x_n \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \Leftrightarrow \|x_n - x_0\|_2 \to 0. \tag{3}$$

Dowód Twierdzenia. Tu wykorzystamy zwartość sfery euklidesowej:

$$K = S_{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}.$$

Jest to "nasze K" - zbiór ograniczony i domknięty. (Domkniętość mamy tu dzięki ciągłości normy euklidesowej "względem samej siebie", która z kolei wynika z drugiej nierówności trójkąta: $|\,\|x\|_2 - \|y\|_2| \leqslant \|x - y\|_2$. Więc gdy $\|x_n\|_2 = 1, \|x_n - x_0\| \to 0$, to również $\|x_0\| = 1$.)

Istnienie stałej M spełniającej drugą nierówność w (2) wynika z następujących faktów:

W kanonicznej bazie e_j dowolny wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ ma rozwinięcie $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j$. Z warunku jednorodności $\|x_j e_j\| = |x_j|\|e_j\|$, więc stosując nierówność trójkąta dla sumy d wektorów, mamy $\|x\| \leqslant \sum_{j=1}^d \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^d |x_j|\|e_j\|$. Ostatnią sumę możemy potraktować jako iloczyn skalarny wektora (oznaczmy go $\mathbf{X}$), którego j-tą współrzędną jest $|x_j|$ (o normie euklidesowej $\|x\|_2$ -czyli takiej samej, jak x) oraz wektora $\mathbf{E}$ o współrzędnych $\|e_j\|$. Tutaj będzie $M = \|\mathbf{E}\|_\mathbf{2} = (\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{d}} \|\mathbf{e_j}\|^\mathbf{2})^{\frac{1}{2}}$. Nasza nierówność z (2) wynika teraz z nierówności Schwarza (a właściwie Cauchy'ego) dla iloczynu skalarnego wektorów $\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}$, który (podobnie, jak w wykładzie 2.) będę oznaczał $\langle \mathbf{X}, \mathbf{E} \rangle$. Wspomniana nierówność mówi, że $|\langle \mathbf{X}, \mathbf{E} \rangle| \leqslant \|\mathbf{X}\|_\mathbf{2} \|\mathbf{E}\|_\mathbf{2}$.

Teraz z drugiej nierówności trójkąta dla normy $\|\cdot\|$ mamy $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\| \leqslant M\|x - y\|_2$, funkcja $\psi : \mathbb{R}^d \ni x \to \|x\|$ jest więc ciągła w topologii normy euklidesowej. Z Lematu wynika, że jej minimum na sferze, czyli $m := \inf_{x\in K} \psi(x)$ jest > 0. Dla $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ wektor $\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|_2} x$ należy do sfery S_{d-1}. Jest więc $\|\tilde{x}\| \geqslant m$. Ponieważ $x = \|x\|_2 \tilde{x}$, z jednorodności normy $\|\cdot\|$ otrzymamy więc, że $\|x\| = \|x\|_2 \|\tilde{x}\| \geqslant M\|x\|_2$, czyli pierwszą nierówność w (2). $\square$

W przestrzeni nieskończenie wymiarowej sfera nigdy nie jest zwarta, istnieje nieskończenie wiele nierównoważnych norm. Na przykład na przestrzeni ℓ_0 ciągów zerujących się od pewnego miejsca jeśli $p \neq q$, to normy $\|(x_n)\|_p := (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ oraz (analogicznie zdefiniowana) $\|(x_n)\|_q$ - **nie są równoważne.**

Są też inne zastosowania zwartości. Można np. wykazać (=Tw. Diniego), że na zbiorze zwartym K ciąg **monotoniczny** funkcji **ciągłych** zbieżny punktowo **do granicy ciągłej** -jest zbieżny jednostajnie.

Podobnie, jednostajnie zbieżny na takim K jest ciąg punktowo zbieżny funkcji f_n spełniających **warunek Lipschitza ze stałą Lipschitza wspólną dla wszystkich** f_n -np. o wspólnie ograniczonych pochodnych. Można to wywnioskować bezpośrednio, lub z ogólniejszego tw. Ascoli'ego - Arzeli, które podaje w.k.w. na zwartość w przestrzeni $C(K)$ domknięcia (w topologii normy supremum) dla jednostajnie ograniczonej rodziny funkcji ciągłych na zwartym zbiorze K. Warunkiem tym jest tzw. równociągłość.

Jednym z najważniejszych zastosowań Twierdzenia Weierstrassa (konkretnie, tezy (1) z poprzedniej strony) jest jednak:

Zasadnicze Twierdzenie Algebry. Każdy wielomian stopnia $n > 0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek zespolony.

Dowód. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $p \in \mathbb{C}[z]$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych, ale bez miejsc zerowych. Konkretnie,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad \texttt{gdzie} \quad n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0,\, 0 \notin p(\mathbb{C}). \quad (4)$$

Chcemy najpierw wykazać, że $m := \inf\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\} > 0$. Po pierwsze, $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = +\infty$. Wyłączmy w tym celu $|z|^n$ przed nawias, w nawiasie zostawiając $|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}|$ i resztę zostawmy jako proste ćwiczenie.

Istnieje więc $R > 0$ takie, że dla $|z| > R$ mamy $|p(z)| > m+1$, w związku z czym zamiast po $\mathbb{C}$ –infimum wystarczy brać po kole $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$. Ze zwartości K i z Lematu (z tezy (1)) wynika więc, że $m > 0$ -tak, jak chcieliśmy.

Z twierdzenia Weierstrassa, istnieje punkt z_0, w którym $p(z_0) = m$. Zastępując, w razie potrzeby, p przez wielomian $\frac{1}{m}p(z - z_0)$, możemy bez straty ogólności założyć, że $z_0 = 0, m = 1$. Przy $z \to 0$ "składnikiem wiodącym" dla $p(z) - 1$ jest ten zawierający najniższą potęgę z, powiedzmy z^k (w odróżnieniu od sytuacji $|z| \to \infty$). Przyjmijmy więc , że

$$a_0 = p(0) = 1 = \min_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$$

oraz $p(z) = 1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots + a_n z^n$, gdzie $a_k \neq 0$.

Teraz skorzystamy z istnienia takiej liczby zespolonej $\lambda = e^{i\varphi}$ o module 1, dla której $a_k\lambda^k = a_k e^{ik\varphi}$ **jest liczbą rzeczywistą ujemną**. Dla $r > 0$ mamy wtedy

$$p(re^{i\varphi}) = 1 - r^k|a_k| + a_{k+1}r^{k+1}\lambda^{k+1} + \cdots + a_n r^n \lambda^{n+1} \quad (5)$$

Stąd dla $r > 0$ takich, że $1 - r^k|a_k| > 0$ z nierówności trójkąta mamy

$$|p(r\lambda)| \leqslant 1 - r^k|a_k| + |r^{k+1}a_{k+1}\lambda^{k+1}| + \cdots + |r^n a_n \lambda^n| =$$

$$= 1 - r^k(|a_k| - r|a_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|a_n|).$$

Wyrażenie w nawiasie jest dodatnie dla r dostatecznie małych i dla takich r (również mniejszych od $|a_k|^{\frac{1}{k}}$) będzie $|p(r\lambda)| < 1$. Sprzeczność. $\square$

Dodatek: (tylko dla zainteresowanych, to już nie jest materiał obowiązkowy)

F. Hausdorff znalazł warunek równoważny zwartości zbioru K w przestrzeni metrycznej zupełnej. Jeśli zbiór K jest domknięty, to jest on zwarty wtedy i tylko wtedy kiedy jest on całkowicie ograniczony. Całkowita ograniczonoć oznacza, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje skończone pokrycie zbioru K zbiorami o średnicach mniejszych od ϵ. Oczywiście, taki zbiór całkowicie ograniczony (ang. *totally bounded*) jest ograniczony, bo skończona suma zbiorów ograniczonych jest ograniczona. Ale nie na odwrót. Na przykład, ciągu bazy zerojedynkowej w $\mathbb{R}^d$, gdzie odległeść pary różnych elementów w metryce euklidesowej jest równa $\sqrt{2}$ nie można pokryć mniej, niż d zbiorami o średnicy mniejszej od $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Gdy weźmiemy przestrzeń $\ell^2 = \{(c_n) : \sum_1^\infty |c_n|^2 < \infty\}$ ciągów liczbowych sumowalnych z kwadratem, to jest to przestrzeń zupełna z normą $\|(c_n)\|_2 := \left(\sum_1^\infty |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Każda przestrzeń $\mathbb{R}^d$ jest zanurzona izometrycznie w ℓ^2. Ciągu wektorów e_n będących ciągami prawie samych zer, z wyjątkiem jedynki na miejscu n - nie da się pokryć skończoną ilością m zbiorów o średnicy mniejszej od $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bo rzutując ℓ_2 na $\mathbb{R}^d$ pokrylibyśmy bazę 0-1 kową ilością nie większą niż M zbiorów o wspomnianej średnicy, ale dla $d > M$ to jest niemożliwe. Nietrywialnym zwartym zbiorem w ℓ^2 jest np. tzw. "kostka Hilberta" -złożona z tych ciągów, dla których $|c_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

Aby udowodnić kryterium Hausdorffa, wystarczy w ciągu o wyrazach x_n ze zbioru całkowicie ograniczonego K znaleźć podciąg Cauchy'ego. Gdy mamy już x_{n_k}, pokrywamy zbiór $\{x_n : n \geqslant n_k\}$ skończoną ilością zbiorów o średnicy $< 2^{-k}$ W jednym z nich jest nieskończenie wiele wyrazów, spośród nich wybieramy $x_{n_{k+1}}$ tak, by $n_{k+1} > n_k$. I już mamy zbieżny podciąg! (dlaczego?)