17 Płaszczyzna styczna

Powróćmy na chwilę do pochodnej kierunkowej. Jak już zauważylismy (ostatni wniosek z reguły łańcucha na poprzednim wykładzie), dla funkcji różniczkowalnej pochodne kierunkowe w kierunku każdego wektora $w \in \mathbb{R}^d$ istnieją i są równe wartości różniczki zupełnej na tym wektorze: $\partial^w f(P_0) = d_{P_0} f(w)$. Pozwala to wyrazić tę pochodną również w terminach gradientu.

Przypomnijmy (z wykładu 10), że -np. dla funkcji $f(x, y, z)$ trzech zmiennych **gradientem** f w punkcie $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ nazywamy wektor pochodnych cząstkowych:

$$\nabla f(P_0) = (f'_x(P_0), f'_y(P_0), f'_z(P_0)).$$

Iloczyn skalarny wektorów u, w będę nadal oznaczał symbolem $\langle u, w\rangle$ i z geometrii analitycznej wiemy, że jest to liczba równa $\|u\|\|w\| \cos \angle(u, w)$. Analogicznie jest dla funkcji wielu zmiennych (czyli zmiennej wektorowej $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$). Różniczka funkcji o wartościach skalarnych jest odwzorowaniem liniowym, a każde odwzorowanie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (czyli funkcjonał liniowy) jest mnożeniem skalarnym przez pewien wektor -w tym przypadku przez gradient.

Wniosek. Funkcja różniczkowalna w danym punkcie P_0 ma pochodne kierunkowe w kierunku każdego wektora $w \in \mathbb{R}^d$, przy czym

$$\partial^w f(P_0) = \langle \nabla f(P_0), w\rangle. \qquad (1)$$

Maksymalną wartość (spośród wektorów w o ustalonej normie) taka pochodna osiąga w kierunku wektora $\nabla f(P_0)$, wartość zero - osiąga ona w kierunkach prostopadłych do gradientu f w danym punkcie.

Faktycznie -jeśli dla funkcji dwu zmiennych wartość $f(x, y)$ pokazuje np. wysokość nad poziomem morza, to wykres f możemy traktować jako model 3-d ukształtowania terenu. Powiedzmy, że np. terenem tym jest stok narciarski. Gradient pokaże nam kierunek najszybszego wznoszenia terenu, zaś wektor przeciwny -kierunek największej stromizny. Rzuty zbioru punktów o wysokości stałej równej h_0 tworzą linie poziomic (jak na mapie). Gradienty będą wektorami prostopadłymi do poziomic (ściślej -do linii stycznych do poziomic). Jeśli chcemy najszybciej zjechać na nartach, trzymamy się kierunku wektora przeciwnego do gradientu. W stromych żlebach (np. pod Zawratem w Tatrach) lepiej proszę tego nie robić, tylko zjeżdżać zakosami.

Gradient może istnieć w danym punkcie, mimo braku różniczkowalności. Tylko, że wzór (1) przestanie być prawdziwy! weźmy funkcję ϕ z ostatniego przykładu z wykładu 14. W liczniku było x^3, w mianowniku $x^2 + y^2$, zaś $\phi(0, 0) = 0$. Podstawiając $x(t) = t, y(t) = t$ otrzymamy $\phi(t, t) = \frac{1}{2}t$ -funkcję o pochodnej równej $\frac{1}{2}$ i to jest pochodna kierunkowa w kierunku wektora $(1, 1)$ (czyli pod kątem 45 stopni do osi OX. Natomiast w punkcie $P_0 = (0, 0)$ gradient jest wektorem $(1, 0)$. Niedobrze. Założenie o różniczkowalności jest więc konieczne.

Pozostając w kręgu pojęć geometrycznych wprowadźmy definicję **płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ nad punktem P_0 o współrzędnych (x_0, y_0). (Punkt styczności, to (x_0, y_0, z_0) gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$.)

Wykres f, to w tej sytuacji zbiór $\Gamma(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}$ -nazywany też płatem powierzchniowym wyznaczonym przez f. Łatwiej jest podać wzór, niż poprawną definicję. Można dokonać przekroju dziedziny prostą. Nazwijmy ją $\Lambda_w := \{P_0 + t\vec{w} : t \in \mathbb{R}\}$ i gdy $L(x, y)$ będzie odwzorowaniem afinicznym (= "liniowe plus stała"), którego wykresem ma być ta płaszczyzna styczna, to $L(P_0 + t\vec{w})$ będzie równaniem prostej stycznej do krzywej w $\mathbb{R}^3$ będącej przekrojem wykresu f z płaszczyzną pionową $\Lambda_w \times \mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^3$ zawierającą tę prostą Λ_w. Obracając wektorem $\vec{w}$ we wszystkich kierunkach dostaniemy jakiś pęk prostych stycznych. Więc może definicja: "płaszczyzna styczna, to taka płaszczyzna, że jej przektoje płaszczyznami pionowymi $\Lambda_w \times \mathbb{R}$ są prostymi stycznymi do $\Gamma(f) \cap (\Lambda_w \times \mathbb{R})$?

Nie będzie to, niestety, właściwe podejście. Pokazuje to funkcja f o równaniu $x^3y(x^4+y^2)^{-1}$ z ostatniego przykładu z wykładu 16. Punktem P_0 będzie początek układu. Proste styczne we wszystkich kierunkach leżą na płaszczyźnie OXY, gduż pochodne kierunkowe są zerem. Jeśli zmierzamy do P_0 po paraboli $y=x^2$, to w pobliżu P_0 punkty z powierzchni wykresu f wznoszą się nad OXY pod kątem zbliżonym do 30 stopni, niezmierzającym do zera.

Przypomnijmy, że odległość punktu od płaszczyzny, to jego odległość od rzutu prostopadłego na tę płaszczyznę. Na przykład, gdy $\Phi_w:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym mnożenia skalarnego przez pewien niezerowy wektor w, to wyznacza on płaszczyznę $\ker(\Phi_w)=\{A\in\mathbb{R}^3:\Phi_w(A)=0\}$. Odległość od punktu P do tej płaszczyzny wynosi wówczas $\frac{|\Phi_w(P)|}{\|w\|}$. Odległość $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ od płaszczyzny OXY $=\{(x,y,z):z=0\}$ wynosi $|z_1|$.

Definicja . Płaszczyzną styczną do wykresu $\Gamma(f)$ funkcji f w punkcie P_0 o nazywamy taką płaszczyznę Π_0, że odległość punktu $P_1\in\Gamma(f)$ od niej jest o-małe od odległości od P_0 rzutu prostopadłego R_1 punktu P_1 na płaszczyznę Π_0, dla $P_1\to P_0$, czyli

$$\lim_{P_1\to P_0, P_1\in\Gamma(f)}\frac{\|P_1-R_1\|}{\|R_1-P_0\|}=0.$$

Można zauważyć, że dla ustalonego $\epsilon>0$ zbiór takich punktów P, że $\|P-R_1\|\leqslant\epsilon\|R_1-P_0\|$, gdzie R_1 jest rzutem P na Π_0 jest stożkiem (wklęsłym) zawierającym płaszczyznęΠ_0. Jest to stożek o wierzchołku w punkcie P_0 (tu przez stożek rozumiemy każdy zbiór będący sumą mnogościową półprostych wychodzących z punktu P_0). Ponadto płaszczyzna Π_0 z wyjatkiem wierzchołka P_0 zawiera się we wnętrzu tego stożka. Takie zbiory zazywamy otoczeniami stożkowymi płaszczyzny Π_0 w punkcie P_0. Można wykazać, że

Π_0 jest płaszczyzną styczną do wykresu f w punkcie P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy każde otoczenie stożkowe płaszczyzny Π_0 w punkcie P_0 zawiera wykres restrykcji f do pewnego otoczenia U punktu P_0.

Dla uproszczenia załóżmy, że $P_0=(0,0)$ oraz $f(P_0)=0$, zaś $\Pi_0=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=f(P_0)\}$ jest płaszczyzną równoległą do OXY (czyli płaszczyzną poziomą). Punkt $(x,y,f(x,y))$, gdzie $(x,y)\in U$ leży w takim otoczeniu stozkowym, gdy $\frac{|F(x,y)-F(x_0,y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\leqslant\epsilon$. Oznacza to dokładnie, że f jest różniczkowalana w punkcie P_0 i różniczka jest w tym punkcie równa zero.

W przypadku ogólnym -gdybyśmy odjęli od f jakieś odwzorowanie liniowe $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ - to ono by było różniczką dla f To by oznaczało, że płaszczyzna $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: L(x-x_0,y-y_0)=z-f(x_0,y_0)\}$ będzie styczna do wykresu f w punkcie P_0. Mamy więc związek między istnieniem płaszczyzny stycznej i różniczkowalnością.

Nie wchodząc w szczegóły dowodu, sformułujmy następujący opis

Twierdzenie. Wykres odwzorowania $f:D\to\mathbb{R}$ określonego w otoczeniu D punktu P_0 ma płaszczyznę styczną w tym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna. W takim przypadku, równanie płaszczyzny stycznej ma postać

$$z-f(P_0)=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \tag{2}$$

Ogólniej, dla $F:\mathbb{R}^3\to R$ różniczkowalnej, płat o równaniu $F(x,y,z)=0$ ma płaszczyznę styczną w punkcie $Q_0=(x_0,y_0,z_0)$ leżącym na tym płacie, jest to płaszczyzna prostopadła do gradientu F w tym punkcie. Innymi słowy, płaszczyzna styczna ma wtedy równanie

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(Q_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(Q_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(Q_0)=0. \tag{3}$$