19 Lokalna odwracalność

Przy badaniu różniczkowalności odwzorowania F o wartosciach n -wymiarowych mogliśmy ograniczyć się bez straty ogólności do przypadku $n = 1$. Jeśli F była zestawieniem n funkcji, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, to różniczkowalność każdej ze współrzędnych F z osobna, czyli funkcji $f_j(\forall_j)$ będzie równoważna różniczkowalności F. Ale już przy regule łańcucha wielowymiarowość wartości jest nie do pominięcia. Jedno z najtrudniejszych (jeśli chodzi o dowód) twierdzeń tego kursu ma właśnie taki "obustronnie -wielowymiarowy" charakter.

Twierdzenie o lokalnej odwracalności.
Dla odwzorowania $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 w otoczeniu punktu P załóżmy, że różniczka $d_P F$ jest odwzorowaniem odwracalnym. Wówczas istnieją otoczenia otwarte: U -punktu P oraz W-punktu $Q = F(P)$ takie, że restrykcja $F|_U : U \to W$ jest bijekcją, zaś bijekcja odwrotna $(F|_U)^{-1} : W \to U$ jest również klasy C^1, jej różniczka $d_Q((F|_U)^{-1})$ jest odwrotnością $d_P F$.

Twierdzenie to ma liczne zastosowania, można np. wywnioskować z niego w dość łatwy sposób znaczne uogólnienie twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Przed przystąpieniem do dowodu musimy wypracować niezbędne narzędzia. Jednym z nich będzie teza o odwracalności operatorów liniowych bliskich identyczności, wraz z pewnymi oszacowaniami i ciągłość operacji odwracania.

Będziemy rozpatrywać odwzorowania liniowe $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, czyli endomorfizmy $\mathbb{R}^n$. Tworzą one przestrzeń wektorową, którą oznaczamy $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Jest to również algebra, mnożeniem jest tu skladanie operatorów, a elementem jednostkowym jest I =identyczność. Przypomnijmy, że norma $\|T\|$ (tzw. norma operatorowa) jest zdefiniowana jako najmniejsza stała M taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ jest $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$. Jak można wykazać, również $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$. Tak zdefiniowana norma w przypadku macierzy A nazywana bywa normą spektralną macierzy. (Ma ona bowiem związek z widmem, jej kwadrat -to norma macierzy symetrycznej A^*A -która z kolei jest równa maksimum modułów wartości własnych macierzy A^*A.) Inną normą (tzw. normą Frobeniusa) będzie pierwiastek z sumy kwadratów wszystkich n^2 wyrazów (rzeczywistych) tej macierzy. Te normy nie są (na ogół) równe, ale są równoważne- jak każde dwie normy na przestrzeni skończenie wymiarowej (wykład 13.). Ponieważ dla $k = n^2$ przestrzeń $\mathbb{R}^k$ z normą euklidesową (izometryczną z normą Frobeniusa) jest zupełna, również $M_{n\times n}$ z normą operatorową jest zupełna.

(Nawet przestrzeń operatorów liniowych ciągłych na przestrzeni Banacha z normą operatorową jest zupełna).

Nam wystarczy oszacowanie normy, ale gdyby liczyć normę spektralną z macierzy, okaże się to niełatwe -nie mamy jeszcze dostępnej techniki ekstremów warunkowych. Na przykład, norma macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ wynosi $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, bo $A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Równanie charakterystyczne $\det(A^*A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$ ma pierwiastki $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ i ten o większym module (czyli ten ze znakiem "$+$") dyktuje normę $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Norma Frobeniusa, to w tym przypadku $\sqrt{3}$. Z kolei, macierz symetryczna złożona z czterech jedynek ma normę równą 2, tym razem równą jej normie Frobeniusa. Dla operatora identyczności $I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ -norma operatorowa, $\|I\| = 1$, zaś norma Frobeniusa, to $\sqrt{n}$.

Twierdzenie. Gdy operator liniowy $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia oszacowanie $q := \|T - I\| < 1$, to jest on odwracalny. Ponadto mamy wówczas

$$\|T^{-1} - I\| \leqslant \frac{q}{1-q}. \tag{1}$$

Zbiór GL_n operatorów odwracalnych jest otwarty w $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i odwzorowanie odwracania:

$$GL_n \ni T \to T^{-1} \in GL_n$$

jest ciągłe.

Dla chwilowego uproszczenia oznaczeń, niech $X = \mathbb{R}^n$. Dla $S \in \mathcal{L}(X)$ definiujemy operator L_S lewostronnego mnożenia przez S na przestrzeni $\mathcal{L}(X)$

wzorem $L_S(T) := ST$. (Analogicznie, mamy operator $R_S : T \mapsto TS$.) Operatory L_S, R_S są liniowe i ciągłe. Ich ciągłość wynika z nierówności:

$$\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|. \tag{2}$$

Tę nierównoć sparawdzamy na dowolnie wybranym wektorze $x \in X$ o normie $\|x\| \leqslant 1$. Dla $y := T(x)$ mamy $\|(ST)(x)\| = \|Sy\| \leqslant \|S\|\|y\| \leqslant \|S\|\|T\|\|x\|$, bo $\|y\| = \|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Przejście do supremum po $\|x\| \leqslant 1$ daje tezę. Operatory liniowe ciągłe można "wyciągać przed znak sumy szeregu". W szczególności, gdy szereg $\sum_{k=0}^{\infty} T_k$, gdzie $T_k \in \mathcal{L}(X)$ jest zbieżny w normie operatorowej, to

$$L_S(\sum_{k=0}^{\infty} T_k) = \sum_{k=0}^{\infty} L_S(T_k), \quad \texttt{czyli} \quad S(\sum_{k=0}^{\infty} T_k) = \sum_{k=0}^{\infty} ST_k.$$

Jak wiemy, szeregi bezwzględnie zbieżne spełniają warunek Cauchy'ego, więc w przestrzeniach zupełnych -są zbieżne. Ponieważ $\|(I-T)^k\| \leqslant q^k,\ q < 1$, więc $\sum_{k=0}^{\infty} \|(I-T)^k\| < \infty$, a w konsekwencji – szereg

$$R := \sum_{k=0}^{\infty} (I-T)^k$$

jest zbieżny. Tu przyjmujemy z definicji $(I-T)^0 := I$. Ponadto stosując operator lewostronnego mnożenia L_S dla $S = I - T$, mamy

$$R - TR = (I-T)R = \sum_{k=0}^{\infty} (I-T)^{k+1} = R - (I-T)^0 = R - I.$$

Odejmując od obydwu stron R wnioskujemy, że $TR = I$. (W przestrzeniach Banacha sprawdza się dodatkowo, że $RT = I$ -ale ze względu na skończoność wymiaru, w naszej sytuacji już z pierwszej równości wynika odwracalność T i równość $R = T^{-1}$).

Norma jest ciągła, więc norma sumy szeregu $\sum T_k$ jest granicą norm sum częściowych, a te (dzięki nierówności trójkąta) szacujemy przez sumy częściowe norm. Po przejściu do granicy otrzymujemy więc nierówności:

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} T_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|. \tag{3}$$

Ponieważ wiemy, że $T^{-1} - I = R - I = \sum_{k=1}^{\infty}(I-T)^k$, z nierówności (3) wynika, że

$$\|T^{-1} - I\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}.$$

Otwartość GL_n wynika np. z ciągłości funkcji $T \mapsto \det(T)$, bo wyznacznik jest sumą iloczynów wyrazów macierzy ze znakami + lub −. Należenie T do GL_n oznacza nieosobliwość macierzy operatora T, czyli warunek $\det T \neq 0$, zaś przeciwobraz przez $det(\cdot)$ zbioru otwartego $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest otwarty.

Możliwy jest też inny, niewykorzystujący wyznacznika dowód otwartości: gdy $T_0 \in GL_n$, to odwracalność operatora T jest równoważna odwracalności $T_0^{-1}T$, a ta będzie miała miejsce, gdy $1 > \|T_0^{-1}T - I\| = \|T_0^{-1}(T - T_0)\|$. Z nierówności (2) wynika więc, że gdy $\|T_0^{-1}\|\|T - T_0\| < 1$, to operator $T_0^{-1}T$, a więc i operator T będzie odwracalny. Czyli jeśli $T_0 \in GL_n$, to kula

$$\{T \in \mathcal{L}(X) : \|T - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}\}$$

zawiera się w GL_n, co dowodzi otwartości tego zbioru.

Ciągłość operacji odwracania w punkcie $T_0 = I$ wynika z nierówności (1), bo gdy $\|T - I\| = q \to 0$, to $\frac{q}{1-q} \to 0$. Podobnie jak 2 linijki wyżej, będziemy w stanie wywnioskować stąd ciągłość w innym punkcie $T_0 \in GL_n$.

W tym celu wykorzystamy też ciągłość lewostronnego mnożenia przez T_0^{-1}. Gdy $\|T - T_0\| \to 0$, to $T_0^{-1}T$ zmierza do $T_0^{-1}T_0 = I$. Z wykazanej już ciągłości odwracania w punkcie I, również $T^{-1}T_0 \to I = T_0^{-1}T_0$. Teraz mnożenie prawostronne przez T_0^{-1} (też ciągłe, dzięki nierówności (2)) daje zbieżność $T^{-1} \to T_0^{-1}$. □

Następnym istotnym filarem naszego dowodu twierdzenia o lokalnej odwracalności będzie twierdzenie Banacha o punkcie stałym[1] (zwane też twierdzeniem o odwzorowaniu zwężającym). Zachodzi ono w każdej przestrzeni metrycznej zupełnej, dla naszych potrzeb wystarczy je sformułować dla domkniętych podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Aby jednak odzwierciedlić potencjalną ogólność jego sformułowania -odległość punktów $x, y \in \mathbb{R}^n$ zamiast $\|x - y\|$ -będę oznaczał $d(x, y)$. Tak określona funkcja dwu zmiennych $d(\cdot, \cdot)$ jest symetryczna, nieujemna, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ oraz spełnia nierówność trójkąta: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ dla dowolnych punktów $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że odwzorowanie $F : D \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą C, jeśli

$$\forall_{x,y \in D}\ d(F(x), F(y)) \leqslant C d(x, y).$$

Gdy taki warunek zachodzi z pewną stałą $C < 1$, to mówimy, że odwzorowanie jest zwężające (lub zawężające) (ang. *contraction, contractive mapping*).

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Jeżeli $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem zwężającym, zaś $K \subset D$ takim zbiorem domkniętym, że $F(K) \subset K$, to istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in K$ taki, że $F(x_0) = x_0$. (Taki punkt nazywamy punktem stałym odwzorowania F.)

Dowód. Najłatwiej jest wykazać jednoznaczność: gdyby dla punktu y_0 było również $F(y_0) = y_0$, to mamy relacje: $d(x_0, y_0) = d(F(x_0), F(y_0)) \leqslant C d(x_0, y_0)$, a ponieważ $C < 1$, taka nierówność jest możliwa jedynie gdy $d(x_0, y_0) = 0$, czyli gdy $x_0 = y_0$.

Dla dowodu istnienia wybierzmy dowolnie "punkt startowy procesu iteracyjnego" $x_1 \in K$. Wtedy $x_2 := F(x_1) \in F(K) \subset K$. Mając już $x_j \in K$ definiujemy $x_{j+1} := F(x_j)$. Jeśli wykażemy zbieżność tego ciągu, to jego granica (oznaczmy ją: x_0) będzie nadal należeć do zbioru (domkniętego) K. Na mocy warunku Heinego, będzie wówczas $\lim_{j\to\infty} F(x_j) = F(x_0)$. Z drugiej strony, $F(x_j) = x_{j+1}$ -jako podciąg ciągu (x_j), jest zbieżny do tej samej granicy x_0. Z jednoznaczności granic- będziemy więc wtedy mieli $x_0 = F(x_0)$.

Pozostaje więc wykazać zbieżność ciągu (x_j). Z warunku Lipschitza, mamy $d(x_3, x_2) = d(F(x_2), F(x_1)) \leqslant C d(x_2, x_1)$, $d(x_4, x_3) \leqslant C d(x_3, x_2) \leqslant C^2 d(x_2, x_1)$. Metodą indukcji sprawdzamy, że

$$d(x_{j+1}, x_j) \leqslant C^{j-1} d(x_2, x_1).$$

Stąd, oznaczając prawą stronę ostatniej nierówności jako aC^j, możemy stosując nierówność trójkąta, oszacować $d(x_{j+m+1}, x_j)$ przez sumę

$$d(x_{j+m+1}, x_{j+m}) + d(x_{j+m}, x_{j+m-1}) + \cdots + d(x_{j+1}, x_j) \leqslant a(C^{j+m} + C^{j+m-1} + \cdots + C^j).$$

Ostatnia suma jest równa $aC^j \frac{1-C^{m+1}}{1-C}$. Ponieważ $C < 1$, jest więc ta suma dowolnie mała dla j dostatecznie dużych. Wynika stąd warunek Cauchy'ego dla ciągu (x_j) -a więc i jego zbieżność. □

Teraz już możemy przystąpić do dowodu głównego twierdzenia. Ale to już na następnym wykładzie.

[1] Wbrew pozorom, główne zastosowania twierdzeń o punktach stałych nie leżą w geometrii, czy w topologii. Stosuje się je głównie do dowodzenia twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań -w tym równań funkcyjnych, lub równań różniczkowych. Jest wiele twierdzeń o punktach stałych- najbardziej znane są chyba: Twierdzenie Brouwera, mówiące, że każde odwzorowanie ciągłe (nie zakłada się już kontrakcyjności) domkniętej kuli euklidesowej w tą samą kulę ma punkt stały. Drugie -to twierdzenie polskiego matematyka, J. P. Schaudera, uogólniające wynik Brouwera na kule w przestrzeniach Banacha.