26 Szeregi ortogonalne

Przypuśćmy, że w przestrzeni wektorowej X mamy określony iloczyn skalarny, czyli odwzorowanie $X \times X \ni (u, w) \to \langle u, w \rangle$, które spełnia następujące warunki:

$$\forall_{u \in X \setminus \{0\}} \langle u, u \rangle > 0$$

oraz w przypadku rzeczywistym (przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{R}$) jest dwuliniowe i symetryczne, a w przypadku, gdy ciałem skalarów dla X jest $\mathbb{C}$ -jest liniowe względem pierwszej zmiennej i skośnie symetryczne:

$$\langle w, u \rangle = \overline{\langle u, w \rangle},$$

gdzie kreska oznacza sprzężenie.

Z taką sytuacją (i z takimi oznaczeniami) spotkaliśmy się już w wykładzie 3., gdzie iloczynem skalarnym dwu funkcji całkowalnych była całka Riemanna:

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(t)\overline{v(t)}\, dt \tag{1}$$

i w zasadzie do takiej sytuacji możemy się ograniczać. Iloczyn skalarny definiuje normę:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}. \tag{2}$$

Przedstawiony na s.3 wykładu 3. dowód (z wyróżnikiem Δ pewnego trójmianu kwadratowego) pokazuje, że w nawet najbardziej ogólnej sytuacji zachodzi następujacy fakt:

Nierówność Schwarza: $|\langle u, w \rangle| \leqslant \|u\|\|w\|$.

Dopiero przy jej użyciu wykazujemy, że wzór (2) faktycznie określa normę. Definiujemy też relcję prostopadłości (zwaną też ortogonalnością) dla pary wektorów: $u \perp w$ –oznaczajacą, że $\langle u, w \rangle = 0$. Nawet w przypadku zespolonym jest to relacja symetryczna i gdy mamy kombinację liniową postaci $w = \sum_{k=1}^m \alpha_j w_j$ wektorów w_j prostopadłych do wektora u, to również $w \perp u$. Zauważmy, że $w \perp w \Rightarrow w = 0$. Gdy natomiast wektor v jest prostopadły do wszystkich wyrazów ciągu wektorów w_n zbieżnych do wektora w_*, (czyli gdy $\forall_n v \perp w_n$ oraz $\lim \|w_n - w_*\| = 0$), to również $v \perp w_*$. W związku z tym, dla każdego niepustego zbioru $E \subset X$ zbiór

$$E^\perp := \{v \in X : \forall_{w \in E}\, v \perp w\},$$

zwany dopełnieniem ortogonalnym dla zbioru E jest domkniętą podprzestrzenią wektorową. W przestrzeniach zupełnych można nawet wykazać, że $(E^\perp)^\perp$ -podwójne dopełnienie ortogonalne zbioru E jest równe domknięciu obwiedni liniowej zbioru E, czyli najmniejszej podprzestrzeni liniowej domkniętej w X zawierającej ten zbiór E.

Ponieważ $\|u + w\|^2 = \langle u + w, u + w \rangle = \|u\|^2 + \langle u, w \rangle + \langle w, u \rangle + \|w\|^2$, w sposób natychmiastowy otrzymujmy twierdzenie Pitagorasa:

$$u \perp w \Rightarrow \|u + w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2.$$

Definicja. Rodzinę wektorów $\{w_j\}_{j \in J}$ nazywamy układem ortogonalnym, gdy wektory te są parami ortogonalne, tzn. gdy

$$\forall_{j,k \in J}\, j \neq k \Rightarrow w_j \perp w_k.$$

W naszych zastosowaniach najczęściej będziemy mieli do czynienia z ciągami ortogonalnymi, gdzie $J = \mathbb{Z}$ lub $J = \mathbb{N}$. W teorii szeregów Fouriera na przedziale $[a, b] = [-\pi, \pi]$ względem iloczynu skalarnego określonego przez (1) układ ortgonalny stanowią funkcje: $1, \cos nt, \sin nt$, zwane układem trygonometrycznym. Szeregi Fouriera będą szczególnym przypadkiem tzw. szeregów ortogonalnych i wygodniej będzie na wstępie poznać pewne ogólne własności takich szeregów. Dla wygody oznaczeń zbiór indeksujący J będzie tym razem zbiorem $\mathbb{N}$ i rozważmy dowolny ciąg ortogonalny wektorów $e_n \in X$. Będziemy najpierw zakładali, że jest to nawet ciąg ortonormalny, czyli ciąg ortogonalny złożony z wektorów o normie 1.

Lemat o współczynnikach. Jeżeli ciąg wektorów e_n jest ortonormalny oraz $S_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$, gdzie $\alpha_n \in \mathbb{C}$ (lub $\alpha_n \in \mathbb{R}$), to

$$\forall_{m \leqslant k}\, \alpha_m = \langle S_k, e_m \rangle \quad \texttt{oraz} \quad \|S_k\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2.$$

Druga równość wynika z twierdzenia Pitagorasa (uogólnionego na sumy skończone -tu wektorów wzajemnie prostopadłych $\alpha_n e_n$ o normach równych $|\alpha_n|$). Pierwsza równość wynika z bardzo prostego przeliczenia i z liniowości funkcjonału mnożącego skalarnie wektor $w \in X$ przez e_m. Dzięki temu prawa strona pierwszej równości jest równa sumie $\sum \alpha_n \langle e_n, e_m \rangle$, w której jedyny niezerowy składnik jest równy α_m. $\Box$

Dla dowolnie ustalonego wektora $f \in X$ jego współczynnikami względem układu ortonormalnego (e_n) nazywamy iloczyny skalarne: $\alpha_n[f] := \langle f, e_n \rangle$. Formalny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n[f] e_n$, czyli $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ nazywamy abstrakcyjnym szeregiem Fouriera dla f względem tego układu ortonormalnego. Sumy częściowe tego szeregu będziemy oznaczali $S_k[f]$, czyli

$$S_k[f] := \sum_{n=1}^{k} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Proste przeliczenie pokazuje, że

$$f - S_k[f] \perp S_k[f]. \tag{3}$$

Faktycznie, nasza suma częściowa jest kombinacją liniową wektorów $e_j, j = 1, 2, \ldots, k$ i prostopadłość $f - S_k[f]$ do każdego z rych wektorów będzie implikowac równość (3). Ale z liniowości mnożenia skalarnego przez wektor e_j, mamy $\langle f - S_k[f], e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \sum_{n=1}^{k} \langle f, e_n \rangle \langle e_n, e_j \rangle = 0$, bo w ostatniej sumie jest tylko jeden niezerowy składnik dla $n = j$, zaś z ortonormalności, $\langle e_j, e_j \rangle = 1$.

Twierdzenie (Nierówność Bessela)[1] Ciąg współczynników względem układu ortonormalnego jest sumowalny z kwadratem i spełnia nierówność:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Dla dowodu wystarczy sprawdzić, czy sumy częściowe tego szeregu są nie większe niż $\|f\|^2$, bo przechodząc do granicy przy $k \to \infty$ utrzymamy tę słabą nierówność. Ale z lematu o współczynnikach, $\sum_{n=1}^{k} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|S_k[f]\|^2$ i ponieważ, jak właśnie zauważyliśmy (w 3), f jest sumą wektorów prostopadłych $f - S_k[f]$ oraz $S_k[f]$, twierdzenie Pitagorasa mówi, że $\|f\|^2 = \|f - S_k[f]\|^2 + \|S_k[f]\|^2 \geqslant \|S_k[f]\|^2$. $\Box$

Okaże się, że dla pewnych układów ortonormalnych (tzw. układów zupełnych -np. dla unormowanego układu trygonometrycznego) nierówność Bessela można zastąpić równością (jej nazwa, to "tożsamość Parsevala").

Jednym z najważniejszych wniosków z tej nierówności jest warunek Cauchy'ego dla ciągu $S_k[f]$. Gdy bowiem ustalimy $m > k$, to $\|S_m[f] - S_k[f]\|^2 = \sum_{j=k+1}^{m} |\langle f, e_j \rangle|^2$ - a to są róznice między $m-$tą oraz $k-$tą sumą częściową szeregu zbieżnego tworzącego lewą stronę nierówności Bessela. Te różnice staną się dowolnie małe dla m, k dostatecznie dużych.

[1] czyt. "Besla" Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) -niemiecki astronom, geodeta, matematyk

Na koniec tego nieco krótszego wykładu sprawdźmy, co się zmieni gdy zamiast ortonormalnego -weźmiemy układ ortogonalny (E_n). Liczby $A_n := \|E_n\|$ będą wtedy na ogół różne od 1. Ortonormalny będzie, rzecz jasna, układ wektorów $e_n := \frac{1}{A_n} E_n$ i do niego zastosujmy po kolei: Lemat o współczynnikach, otrzymując wzory:

$$\langle \sum_{n=1}^{k} \alpha_n E_n, E_m \rangle = \alpha_m A_m^2, \qquad \| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n E_n \|^2 = \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2 A_n^2$$

Wzorujac sie na klasycznych szeregach Fouriera, przyjmijmy jako współczynniki f względem układu ortogonalnego E_n liczby

$$\alpha_n[f] := \left(\frac{1}{A_n}\right)^2 \langle f, E_n \rangle, \qquad S_k[f] := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n[f] E_n.$$

Nierówność Bessela przyjmie postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n^2} |\langle f, E_n \rangle|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Na przykład, dla $n \in \mathbb{N}$ mamy w klasycznym układzie trygonometrycznym na odcinku $[-\pi, \pi]$ normy $\|\sin nt\| = \|\cos nt\| = \sqrt{\pi}$, jedynie norma z funkcji stałej 1 wynosi $\sqrt{2\pi}$, jednak aby ujednolicić wzory na współczynniki a_n dla funkcji stałej $\cos 0t \equiv 1$ w rozwinięciu w szereg zazwyczaj sztucznie przyłączamy $\frac{1}{2}$ do funkcji 1, pisząc

$$S_k[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Z wyjątkiem $n = 0$ mamy wzory na obecne współczynniki a_n, b_n takie, jak w Lemacie o współczynnikach, za to wzór na współczynnik cosinusowy a_0 pozostaje taki sam, jak na pozostałe a_n: są to tzw. Wzory Fouriera-Eulera:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Dla tak określonych współczynników nierówność Bessela przyjmuje postać:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt.$$

Jak się wkrótce okaże (= tożsamość Parsevala), ostatnia nierówność tak na prawdę jest równością. Podstawiając w niej np. $f(t) = t$ otrzymamy ciekawe wnioski dotyczące sum szeregów typu $\sum \frac{1}{n^2}$, co sprawdzimy w następnych wykładach.