27 Sumy częściowe szeregu Fouriera

Szereg Fouriera można też zapisać w postaci zespolonej. Ma ona parę zalet: normy funkcji z układu są jednakowe, zamiast wzorów trygonometrycznych łatwiej posługiwać się sumami szeregu geometrycznego, w postaci końcowej i tak otrzymamy takie same sumy częściowe -jedynym narzędziem wiążacym te dwa podejścia będzie wzór Eulera wyrażający $e^{i\varphi}$ jako $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

Dla $t \in [-\pi, \pi]$ i dla $k \in \mathbb{Z}$ niech $E_k(t) := e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$.
(Oznaczenie E_k nie jest na ogół używane, może jednak ułatwić zapis tego wykładu, pozostaje zgodne z użytym wcześniej symbolem na wyraz układu ortogonalnego, lecz nie ortonormalnego, jedyna różnica to fakt, że zbiorem indeksów jest tu $\mathbb{Z}$, a nie $\mathbb{N}$.)

Ponieważ E_k jest funkcją, której moduł wynosi 1 na całym odcinku o długości 2π, jej norma wynosi $\sqrt{2\pi}$. Nietrudno sprawdzić też ortogonalność: sprzężenie zespolone funkcji $\overline{E_m(t)}$ jest równe $E_{-m}(t)$, zaś $E_k(t)E_{-m}(t) = E_{k-m}(t)$, więc

$$\langle E_k, E_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} E_k(t)\overline{E_m(t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} E_{k-m}(t) dt = 2\pi\delta_{k,m},$$

gdzie $\delta_{k,m}$ oznacza symbol Kroneckera i wynosi zero dla $k \neq m$ oraz 1 dla $k = m$. Jak zauważyliśmy w ostatnim wykładzie, iloczyn skalarny funkcji $S_k = \sum_{n=-k}^{k} c_n E_n$ przez E_j jest równy współczynnikowi c_j pomnożonemu przez kwadrat normy E_j, czyli przez 2π. Z tego powodu dla dowolnej funkcji całkowalnej f możemy zdefiniować jej zespolony szereg Fouriera zapisując

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n[f]e^{int} \quad \texttt{gdzie} \quad c_n[f] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\, ds. \tag{1}$$

Symbol $\sim$ stanowi pewne ostrzeżenie - wbrew zbyt optymistycznym przypuszczeniom Fouriera, równość nie musi zachodzić -co w przypadku funkcji ciągłych, okresowych wykazał niemiecki matematyk Paul Du Bois-Reymond już w 1873. Banach ze Steinhausem wykazali (w 1927 r.), że takich "patologicznych" funkcji ciągłych jest większość (stanowią dopełnienie przeliczalnej sumy zbiorów, których domknięcia mają puste wnętrza). W przypadku funkcji całkowalnych istnieje jeszcze mocniejszy kontrprzykład -gdzie rozbieżność szeregu Fouriera zachodzi prawie wszędzie -czyli poza zbiorem miary zero. Podał go w 1922 roku 18-letni wówczas student, A.N. Kołmogorow. Dla funkcji, których moduł jest całkowalny z p-tą potęgą jest inaczej: zbieżność zachodzi prawie wszędzie, co dla $p = 2$ udało się wykazać dopiero w 1966r (L. Carleson), dla pozostałych $p > 1$ -w roku 1968 (R.A. Hunt).

Podstawowe twierdzenia o zbieżności nie są, na szczęście, aż tak trudne i za chwilę je poznamy. Zacznijmy od przedstawienia sum częściowych $S_k[f]$ dla szeregu w postaci (1). Dla szeregu podwójnie nieskończonego, czyli dla $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ będą to sumy $S_k[f] := \sum_{n=-k}^{k} c_n[f]e^{int}$ i okaże się, że są one identyczne z sumami postaci $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nt) + b_n \sin nt)$. W dalszym ciągu będziemy zakładali że $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, zaś $c_n[f]$ są zdefiniowane w (1), podczas gdy a_n, b_n są współczynnikami określonymi przez wzory Eulera-Fouriera z ostatniego wykładu.

Związki między współczynnikami c_n zespolonego szeregu Fouriera i szeregu w postaci trygonometrycznej (czyli liczby a_n, b_n są nietrudne do przeliczenia. Można sprawdzić, że $c_0 = \frac{a_0}{2}$, zaś dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzą wzory:

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n}). \tag{2}$$

Niech dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ symbol q oznacza liczbę e^{it}. Wtedy $E_n(t)$, zdefiniowane jako e^{int} są wyrazami ciągu geometrycznego q^n, zaś

$$\sum_{n=-k}^{k} q^n = q^{-k}\sum_{n=0}^{2k} q^n = \frac{q^{-k} - q^{k+1}}{1-q}.$$

Z pewnych względów warto będzie pomnożyć zarówno licznik, jak i mianownik ostatniego ułamka przez $q^{-\frac{1}{2}}$, co da wartość funkcji D_k zdefiniowanej jako

$$D_k(t) := \sum_{n=-k}^{k} e^{int} = \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})t} - e^{i(k+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}. \tag{3}$$

Faktycznie, dla liczby zespolonej z o module 1 wyrażenie $\bar{z}-z$, to część urojona $\Im z$ pomnożona przez $(-2i)$, co występuje i w liczniku i w mianowniku, zaś $\Im(e^{i\phi}) = \sin\phi$. Teraz, po tym przygotowaniu, już łatwo wyliczamy wzór:

$$S_k[f](x) = \sum_{n=-k}^{k} c_n[f]e^{inx} = \sum_{n=-k}^{k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\, ds \right) e^{inx}.$$

Zamieniajac kolejność operacji: całkowania i sumowania oraz uwzględniając fakt, że

$$\sum_{n=-k}^{k} f(s)e^{-ins}e^{inx} = f(s)D_k(x-s),$$

otrzymujemy nastęujący wniosek:

Lemat. Sumy częściowe szeregu Fouriera wyrażają się wzorem

$$S_k[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{\sin((k+\frac{1}{2})(x-s))}{\sin\frac{x-s}{2}}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_k(x-s)\, ds \tag{4}$$

Całka w tym wzorze nazywana jest całką splotową i oznaczana bywa symbolem $(f * D_k)(x)$. Jeśli traktować $f \in R[-\pi,\pi]$ jako zmienną, to przyporządkowanie funkcji f sumy częściowej $S_k[f]$ będzie operatorem liniowym zadanym przy użyciu całki, czyli tzw. operatorem całkowym z jądrem całkowym D_k. Funkcję D_k nazywamy też jądrem całki Dirichleta, lub: jądrem Dirichleta.

Jak wiemy z doświadczeń akustycznych, wysokie częstotliwości mogą być źródłem zakłóceń w odbiorze sygnałów, w przypadku sygnałów typu $E_n(t)$ wysokim częstotliwościom będą odpowiadać duże bezwzględne wartości: $|n|$, można je w pewnym sensie przytłumić, uzyskując lepsze efekty zbieżności. W tym celu wprowadza się średnie arytmetyczne sum częściowych, $\sigma_k[f]$, tzw. "średnie Cesàro"[1] dla szeregu Fouriera funkcji f, zdefiniowane wzorem

$$\sigma_m[f] := \frac{1}{m+1}\left(S_0[f] + S_1[f] + \cdots + S_m[f]\right).$$

(Efekt "tłumienia" polega tu na mnożeniu składników postaci $c_k[f]E_k$ przez "wagi" $\frac{m+1-|k|}{m+1}$, które są równe 1 tylko dla $k=0$ i wraz ze wzrostem $|k|$ maleją, dla $k=m$ osiągając już tylko wartość $\frac{1}{m+1}$.) Jak łatwo sprawdzić,

$$\sigma_m[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\frac{1}{k+1}\sum_{k=0}^{m} D_k(x-s)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\mathcal{K}_m(x-s)\, ds, \tag{5}$$

gdzie funkcja $\mathcal{K}_m$ jest średnią arytmetyczną z funkcji $D_0, D_1, \dots D_m$, zwaną jądrem całkowym Fejéra[2]. Następujące własności tych funkcji D_m oraz $\mathcal{K}_m$ są bardzo istotne dla dalszych rozważań

Twierdzenie (Własności jąder całkowych Dirichleta i Fejéra.)

1. $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_m(t)\, dt = 2\pi$,
2. $\forall_{t\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}}\ \mathcal{K}_m(t) = \frac{1}{m+1}\frac{1-\cos(m+1)t}{1-\cos t} = \frac{1}{m+1}\frac{\sin^2\frac{(m+1)t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \geqslant 0$
3. Dla $0 < \delta < |t| \leqslant \pi$ zachodzi oszacowanie $\mathcal{K}_m(t) \leqslant \frac{2}{(m+1)(1-\cos\delta)}$.

[1] Ernesto Cesàro (1859-1906) matematyk włoski
[2] Lipót Fejér (1880-1959) matematyk węgierski

Dowód Funkcja D_m jest sumą funkcji E_n, których całki są równe zero dla $n \neq 0$, a ponieważ $E_0 = 1$, jej całka, to długość drogi całkowania, czyli 2π. Całka sumy jest sumą całek, analogicznie dla średnich arytmetycznych, skąd wynika pierwsza teza.

Gdyby funkcje D_m były nieujemne, to ich normy $\|D_m\|_1$ były by równe 2π, jak w przypadku "L^1- norm" z $\mathcal{K}_m$. Tak jednak nie jest, co gorsza- nie są one nawet ograniczone (nawet $\|D_m\|_1$ zmierzają do nieskończoności w taki sposób, jak logarytm z $m+1$), co jest przyczyną problemów ze zbieżnością ciągu sum $S_k[f]$. Dopiero modyfikacja metodą średnich daje lepsze efekty -właśnie dzięki nieujemności jąder całkowych $\mathcal{K}_m$. Ta nieujemność wyniknie już nawet z pierwszej z równości w tezie 2.

Aby ją wykazać, wróćmy na chwilę do oznaczenia $q := e^{it}$. Wówczas mamy $(q-1)D_m = (q-1)(q^{-m} + \cdots + q^m) = q^{m+1} - q^{-m}$, stąd $(m+1)(q-1)\mathcal{K}_m = (q-1)(D_0 + \cdots + D_m) = q + q^2 + \cdots + q^{m+1} - q^0 - q^{-1} - \cdots - q^{-m}$. Ponowne pomnożenie stron -tym razem przez $(q^{-1}-1)$ znów wywoła "efekt teleskopowy", a mianowicie:

$$(q^{-1}-1)(q-1)(m+1)\mathcal{K}_m = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^m - q^{-1} - q^{-2} - \cdots - q^{-(m+1)}$$
$$- q - q^2 - \cdots - q^{m+1} + q^0 + q^{-1} + \cdots + q^{-m}) =$$
$$2 - q^{m+1} - q^{-(m+1)} = 2 - 2\cos(m+1)t.$$

Ponieważ $(q^{-1}-1)(q-1) = 2 - q - q^{-1} = 2 - (q + \bar{q}) = 2 - 2\cos t$, wynika stąd teza 2., gdyż ostatnia równość jest już tylko wnioskiem z pierwszej z równości 2. oraz ze wzoru na $\cos\alpha - \cos\beta$ dla $\alpha = 0$.

Parzystość funkcji $\mathcal{K}_m$, oszacowanie jej licznika przez 2 (oraz monotoniczność mianownika w pierwszej z równosci właśnie wykazanej tezy 2.) - dają oszacowanie 3., które implikuje jednostajną zbieżność do zera na przedziale $[\delta, \pi]$ gdy ustalimy $\delta > 0$. $\square$

Rozpatrywać dalej będziemy funkcję okresową $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π, całkowalną w przedziale $[-\pi, \pi]$. Będziemy wykorzystywać następujący fakt:

Lemat o przesunięciu granic całkowania: Dla funkcji o okresie T całki po przedziałach o długości T są równe, czyli $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \int_a^{a+T} f(s)\,ds = \int_0^T f(t)\,dt.$

Dowód: Gdy $a = kT$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to teza wynika wprost z podstawienia: $t = s - a$, bo z okresowości $f(s - kT) = f(s)$. W ogólnym przypadku takie przesunięcie o całkowitą wielokrotność okresu T sprowadzi zagadnienie do przypadku $0 \leqslant a \leqslant T \leqslant a + T$ i wystarczy już tylko zbadać sytuację, gdy te 3 nierówności są ostre. Wtedy $\int_T^{a+T} f(s)\,ds = \int_0^a f(s)\,ds$ i dodanie tej wartości do $\int_a^T$ daje tezę, dzięki addytywności całki względem drogi całkowania. Składnik $\int_a^T f(s)\,ds$ pozostaje bowiem taki sam po obydwu stronach. $\square$

Weźmy teraz dowolny punkt $x \in [-\pi, \pi]$. Dzięki własności 1. z naszego Twierdzenia, mamy równość:

$$2\pi f(x) = f(x)\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_m(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathcal{K}_m(t)\,dt.$$

.

Po podstawieniu $t = x - s$, mamy $dt = -ds$ oraz dolna granica całkowania we wzorze (5) z punktu $-\pi$ przejdzie do punktu $x+\pi$, zaś górna - z punktu $+\pi$ do $x-\pi$, zamiana kolejności tych granic odpowiada zastąpieniu różniczki $(-dt)$ przez $+dt$, co daje (dzięki parzystości $\mathcal{K}_m$ i po przesunięciu granic całkowania) wzór:

$$\sigma_m[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t)\mathcal{K}_m(t)(-1)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathcal{K}_m(t)\,dt \qquad (6)$$

więc korzystając ze wzoru (5) możemy zapisać różnicę

$$f(x) - \sigma_m[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))\mathcal{K}_m(t)\,dt \qquad (7)$$

Teraz w przypadku funkcji ciągłych okresowych możemy wybrać δ tak małe, by dla $|t| \leqslant \delta$ było $|f(x) - f(x-t)| < \epsilon$. Dla tak dobranego δ skorzystamy z własnośici 3. z naszego Twierdzenia, wówczas dla m dostatecznie dużych mamy $\sup\{|\mathcal{K}(t)| : \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\} < \epsilon$. Rozbijamy całkę po prawej stronie równości (7) na sumę całek: pierwszej: oznaczmy ją I_1 -po przedziale $[-\delta, \delta]$, drugiej (oznaczenie: I_2-po sumie dwu przedziałów opisanej nierównościami $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$. Dla pierwszej całki mamy $|I_1| \leqslant \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} |\mathcal{K}_m(t)|\, dt \leqslant \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{K}_m(t)|\, dt = 2\pi\epsilon$, dzięki własnościom 1. i 2.

Z kolei, całkę po pozostałym zbiorze szacujemy dla m dostatecznie dużych przez kres górny funkcji $|\mathcal{K}_m(t)|$ na zbiorze $[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$, czyli przez ϵ razy supremum z $|f|$ (po całej dziedzinie) razy długość drogi całkowania (która nie przekracza 2π).

Ten kluczowy fragment dowodu zapisuje się często w postaci:

$$|f(x) - \sigma_m[f](x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|t|<\delta} + \int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \right\} |(f(x) - f(x-t))\mathcal{K}_m(t)|\, dt = I_1 + I_2.$$

Całka I_1 jest dowolnie mała dla małych δ, zaś I_2 jest mała dla m dostatecznie dużych.

Reasumując, wykazaliśmy jedno z kluczowych twierdzeń tej teorii:

Twierdzenie Fejéra. Dla funkcji ciągłych okresowych o okresie 2π ciąg średnich Cesàro: $\sigma_m[f]$ z sum częściwych Fouriera zmierza jednostajnie do f.

Trzy najważniejsze wnioski z tego twierdzenia poznamy na następnym wykładzie. Będą to:

- Twierdzenie Aproksymacyjne Weierstrassa o przybliżaniu jednostajnym (na przedziale domkniętym i ograniczonym) funkcji ciągłej ciągiem wielomianów,
- zupełność układu trygonometrycznego oraz
- zbieżność w normie $\|\cdot\|_2$ samego szeregu Fouriera dla f całkowalnej z kwadratem.

Wykażemy więc, że $\|f - S_n[f]\|_2 \to 0$ gdy $n \to \infty$.