28 Zbieżność szeregu Fouriera

Na ostatnim wykładzie udowodniliśmy Twierdzenie Fejéra mówiące, że *dla funkcji ciągłych okresowych o okresie 2π ciąg średnich Cesàro $\sigma_m[f]$ zmierza jednostajnie do f.*

Wielomianem trygonometrycznym nazywamy skończoną sumę funkcji postaci $A_n \cos nx + B_n \sin nx$, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zaś $A_n, B_n \in \mathbb{R}$ są pewnymi współczynnikami. Nazwę "wielomiany" można uzasadnić sprawdzając, dzięki wzorom trygonometrycznym, że iloczyny tego typu funkcji są nadal wielomianami trygonometrycznymi. Oczywiście, zarówno sumy częściowe: $S_k[f]$, jak i średnie Cesàro $\sigma_k[f]$ są wielomianami trygonometrycznymi. Z twierdzenia Fejéra wynika więc, że każda funkcja ciągła okresowa jest granicą jednostajną ciągu wielomianów trygonometrycznych. wynika stąd dość szybki dowód Twierdzenia Aproksymacyjnego Weierstrassa:

Twierdzenie. Każdą funkcję ciagłą f na przedziale domkniętym $[a, b]$ można przybliżyć jednostajnie wielomianami, czyli

$$\exists_{p_n \in \mathbb{R}[x]} \ p_n|_{[a,b]} \rightrightarrows f \quad \texttt{przy} \ n \to \infty.$$

Dowód. Zauważmy, że możemy przedłużyć funkcję f na nieco większy przedział $[A, B]$ (np, A=a, B=b+1) do funkcji $F \in C[A, B]$ okresowej o okresie $B - A$, co poza ciągłością, oznacza tylko dodatkowy warunek $F(A) = F(B)$ (np. dobierając odpowiednią funkcję "liniową plus stałą" na przedziale $[b, B]$. Funkcja $F_1(t) = F(A + (t + \pi)\frac{B-A}{2\pi})$ będzie już ciągła i okresowa na przedziale $[-\pi, \pi]$ o okresie 2π i mając zadane $\epsilon > 0$ znajdziemy wielomian trygonometryczny w (postaci $w = \sigma_k[F_1]$), dla którego norma supremowa $\|F_1 - w\|_{[-\pi,\pi]}$ jest mniejsza od $\frac{\epsilon}{2}$. Ponieważ w, jako funkcja analityczna, ma szereg Taylora zbieżny jednostajnie na każdym przedziale skończonym, istnieje wielomian $P_1 \in \mathbb{R}[t]$ (odpowiedni wielomian Taylora dla w), dla którego $\|P_1 - w\|_{[-\pi,\pi]} < \frac{\epsilon}{2}$. Stąd $\|P_1 - F_1\|_{[-\pi,\pi]} < \epsilon$. Dokonując odpowiedniego podstawienia afinicznego -dostaniemy wielomian P, dla którego $\|P - F\|_{[A,B]} < \epsilon$. Supremum z $|P - f|$ po przedziale mniejszym: $[a, b]$ jest więc też mniejsze od ϵ. $\square$

(Uwaga: Siergiej Bernstein, matematyk rosyjski podał w 1912r. wzór na ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do $f \in C[0, 1]$:

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n}) \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j (1-x)^{n-j}, \qquad B_n \rightrightarrows f.$$

Gdy ponadto $f \in C^k[0, 1]$, zbieżność jest jednostajna wraz z pochodnymi rzędu $\leqslant k$.)

Z twierdzenia Fejéra wynika zbieżność szeregu Fouriera w normie średniokwadratowej (oznaczanej w tych ostatnich wykładach przez $\| \, \|$) dla f całkowalnych z kwadratem. W tym celu sformułujmy najpierw następującą tezę.

Lemat o najlepszym przybliżeniu. Sumy częściowe szeregu Fouriera $S_k[f]$ są najlepszym przybliżeniem w $\| \cdot \|$ dla f spośród "wielomianów trygonometrycznych rzędu k" czyli funkcji postaci $w_k(t) = \sum_{j=0}^{k} (A_j \cos jt + B_j \sin jt)$ w tym sensie, że

$$\|f - S_k[f]\| \leqslant \|f - w_k\|.$$

Dowód jest dość prostym wnioskiem z twierdzenia Pitagorasa, bo mamy prostopadłość $f - S_k[f]$ do każdej z funkcji $\cos jt, \sin jt, j \leqslant k$ oraz do ich kombinacji liniowych - czyli do naszych w_k oraz do $S_k[f]$. Stąd $f - w_k = (f - S_k[f]) + (S_k[f] - w_k)$ i wektory ujęte w nawiasy są prostopadłe, a więc

$$\|f - w_k\|^2 = \|f - S_k[f]\|^2 + \|S_k[f] - w_k\|^2,$$

skąd już wynika nasza nierówność. $\square$

Zauważmy, że przyjmując $w_k = \sigma_k[f]$ mamy dla f ciągłych i okresowych oszacowania implikujące zbieżność:

$$\|f - S_k[f]\| \leqslant \|f - \sigma_k[f]\| \leqslant \sqrt{2\pi}\|f - \sigma_k[f]\|_{[-\pi,\pi]} \to 0 \quad \texttt{przy} \quad k \to \infty.$$

Chcemy jednak uzyskać zbieżność (średniokwadratową) dla dużo szerszej klasy funkcji -np. mających zbieżną całkę niewłaściwą Riemanna z $|f(t)|^2$. Maksymalną rodziną f, dla których możemy otrzymać taką zbieżność będzie przestrzeń $L^2[-\pi,\pi]$ funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a, dla których całka Lebesgue'a z $|f|^2$ jest skończona, ale brakuje nam do tego paru definicji. Można tę przestrzeń definiować alternatywnie jako uzupełnienie (czyli rozszerzenie do przestrzeni zupełnej) przestrzeni $R[-\pi,\pi]$ względem normy $\|\cdot\|_2$. Poprzestańmy jednak na warunku zbieżności całek niewłaściwych. Nawet w najogólniejszej sytuacji zagadnienie sprowadzi się zresztą to następującego lematu:

Lemat o aproksymacji. Gdy f jest funkcją, dla której zbieżne są jest całki niewłaściwe z $|f(t)|^2$ oraz z $f(t)$ po odcinku $\Delta = [-\pi,\pi]$, to istnieją ciągi: funkcji schodkowych h_n oraz funkcji ciągłych okresowych g_n takie, ze $\|f - h_n\| \to 0$ oraz $\|f - g_n\| \to 0$. Jeśli zamiast zbieżnosci całki z $|f|^2$ założymy zbieżność całki niewłaściwej z $|f|$, to istnieją analogiczne ciągi funkcji schodkowych i ciągłych okresowych zbieżne do f w normie $\|\phi\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)|\,dt$.

Przypomnijmy, że funkcje schodkowe na przedziale Δ, to (skończone) kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych przedziałów $\Delta_j \subset \Delta$. Istnieje więc podział odcinka Δ na takie odcinki, na których ta funkcja jest stała. Dowód rozpocznijmy od przypadku, gdy $f \in R[-\pi,\pi]$. Wówczas f jest ograniczona i mnożąc f przez odpowiednią stałą możemy bez straty ogólności założyć, że $|f| \leqslant \frac{1}{2}$ w przedziale Δ. Gdy teraz na j-tym odcinku $\Delta_{j,n}$ n-tego podziału odcinka Δ (z normalnego ciągu podziałów) przyjmiemy dla h_n wartość stałą równą $\inf\{f(t) : t \in \Delta_{j,n}\}$, to h_n będzie funkcją schodkową i $0 \leqslant f - h_n \leqslant 1$, a wówczas $|f - h_n|^2 \leqslant |f - h_n|$, stąd $\|f - h_n\| = (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - h_n(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\|f - h_n\|_1)^{\frac{1}{2}} := (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - h_n(t)|)^{\frac{1}{2}}$. Dzięki nierówności $h_n \leqslant f$ ostatnia wartość jest pierwiastkiem kwadratowym z różnicy całek z funkcji f i z funkcji h_n. Różnica ta zmierza do zera. Faktycznie całkę z f przybliżają sumy całkowe dolne dla danego normalnego ciągu podziałów. Te sumy dolne są dokładnie całkami z funkcji schodkowych h_n po odcinku Δ.

W ogólnym przypadku zakładamy zbieżność całki niewłaściwej z $|f|^2$. Dla ustalenia uwagi możemy przyjąć, że jest tylko jeden punkt niewłaściwy, równy $b = \pi$ (np. w tym punkcie f może mieć asymptotę). Wtedy istnieje granica $L = \lim_{\beta \to b^-} \int_{-\pi}^{\beta} |f(t)|^2$. Niech β_n będzie ciągiem rosnącym do granicy równej b. Wtedy funkcje f_n równe f na przedziale $[-\pi, \beta_n]$ oraz równe zero w przedziale $(\beta_n, b]$ są całkowalne, czyli $f_n \in R[-\pi,\pi]$ oraz $\|f - f_n\| = (\int_{\beta_n}^{b} |f(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$, przy czym całka pod pierwiastkiem jest równa różnicy $L - \int_{-\pi}^{\beta_n} |f(t)|^2$, która zmierza do zera. Ponieważ f_n przybliżamy funkcjami schodkowymi w naszej normie (średniokwadratowej) $\|\cdot\|$, to samo osiągniemy dla f. Z kolei, funkcje schodkowe h są ograniczone, więc rozbijając schodki: pierwszy i ostatni na nierówne części, przy czym te zawierające punkty $a = -\pi, b = \pi$ są dostatecznie krótkie - możemy zmienić na nich wartość $h(t)$ na zero i -uzyskamy przybliżenie w rozważanej normie funkcji h funkcjami prostymi przyjmującymi wartość zero w punktach a, b, czyli na końcach przedziału. W następnym kroku przybliżymy funkcję schodkową h (wciąż w tej samej normie) przez funkcję ciągłą okresową g (okresową, bo równą zero na tych końcach przedziału). Geometrycznie -to jakby zamienić pionowo wznoszące się odcinki stopni schodów na lekko pochylone. Znów możemy tu założyć, że funkcja h jest ograniczona przez 1 i wtedy kwadraty modułów różnic, czyli $|g - h|^2$ są oszacowane przez $|g - h|$, a całki z tych modułów różnic (już w pierwszej potędze) mają geometryczną interpretację jako suma pól tych małych trójkącików o wysokościach nie większych od 1, których sumy długości podstaw uczynimy dowolnie małe. Dowolnie mała będzie więc $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - h(t)|\,dt$, a także norma średniokwadratowa $\|g - h\|$. Można wręcz przedstawić rysunkowy dowód tego fragmentu rozumowania. To samo rozumowanie, nawet uproszczone, pokazuje gęstość w normie $\|\cdot\|_1$ funkcji ciągłych okresowych w przestrzeni funkcji mających zbieżną i bezwzględnie zbieżną całkę niewłaściwą. $\square$

Uwagi.

Ten lemat miał dość techniczny, choć prosty dowód. Może kto wymyśli prostszy? -zachęcam! Dodajmy, że w III semestrze poznacie Państwo twierdzenie o zmajoryzowanej zbieżności i dzięki niemu cały ten dowód dość banalnie się uprości, nawet dla całek Lebesgue'a. W naszej sytuacji oprócz zbieżności całki niewłaściwej z $|f|^2$ trzeba było dokładać dość sztucznie założenie o zbieżności całki niewłaściwej z samej funkcji f. Chodzi o to, że problem stanowić może nieregularna zmiana znaku f, jeśli zakładać nawet tylko całkowalność jej modułu. Przykładem może być "minus jeden do potęgi, której wykładnikiem jest funkcja Dirichleta". Problem ten usuwa założenie mierzalności nakładane na funkcje z przestrzeni tupu L^2.

Z tych dwu lematów wynika już nasze podstawowe twierdzenie:

Twierdzenie. Szereg Fouriera funkcji f spełniającej założenia ostatniego lematu jest zbieżny do f w normie średnio-kwadratowej: $\lim_{k\to\infty}\|f-S_k[f]\|=0$.

Dowód. Ustalmy f spełniającą powyższe założenia oraz $\epsilon>0$. Dobierzmy funkcję ciągłą okresową g tak, by $\|f-g\|<\epsilon$. Dla k dostatecznie dużych, np. dla $k\geqslant k_\epsilon$ będzie $\|g-S_k[g]\|<\epsilon$. Dzięki prostopadłości $h-S_k[h]\perp S_k[h]$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy $\|h\|^2=\|h-S_k[h]\|^2+\|S_k[h]\|^2$, co implikuje nierówność $\|S_k[h]\|\leqslant\|h\|$. Stosujemy ją dla $h:=f-g$ i dzięki nierówności trójkąta, ponieważ $S_k[h]=S_k[f]-S_k[g]$ (z liniowości operatora S_k) -otrzymujemy dla $k\geqslant k_\epsilon$ nierówności: $\|f-S_k[f]\|\leqslant\|f-g\|+\|g-S_k[g]\|+\|S_k[g-f]\|\leqslant 3\epsilon$. $\square$

W szczególności, gdy f jest prostopadła do wszystkich funkcji z układu trygonometrycznego: $1,\cos nt,\sin nt$, to $\|f\|=0$ (co oznacza, że $f=0$ prawie wszędzie, czyli poza zbiorem miary zero. Faktycznie, ta prostopadłość, to zerowanie się wszystkich współczynników a_n,b_n.

Definiuje się pojęcie układu ortogonalnego zupełnego, jako mającego właśnie taką własność, że jedynym elementem przestrzeni prostopadłym do wszystkich wektorów tego układu jest wektor zerowy (w naszej sytuacji wektorami będą nie tyle funkcje f, co ich klasy równoważności względem relacji "równość prawie wszędzie"). Zwróćmy uwagę na to, że pojęcia przestrzeni metrycznej zupełnej i układu zupełnego są całkowicie odmiennej natury. To tylko zbieżność nazw. Kiedyś zresztą na jednym z niematematycznych wydziałów naszej uczelni na pytanie "co to jest różniczka zupełna funkcji wielu zmiennych?" otrzymałem odpowiedź: "To taka różniczka, w której każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny"!

Dodajmy jeszcze jeden wniosek z lematu o aproksymacji. Jego liczne zastosowania poznamy wkrótce.

Twierdzenie.(Lemat Riemanna-Lebesgue'a) Przypuśćmy, że funkcja okresowa f ma bezwzględnie zbieżną całkę niewłaściwą $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$. Wtedy dla dowolnych liczb $\alpha<\beta$ mamy

$$\lim_{r\to\infty}\int_\alpha^\beta f(t)\sin(rt)\,dt=0.$$

Uwagi. Teza zachodzi też dla funkcji $\cos(rt)$. W szczególności, $a_n\to 0, b_n\to 0$ przy $n\to\infty$. Zauważmy, że dla $f\in R[-\pi,\pi], \alpha=-\pi, \beta=\pi$ teza o zmierzaniu do zera współczynników f wynika z nierówności Bessela (o ile r przebiega wartości naturalne, my będziemy mieli jednak $r=n+\frac{1}{2}$, jak w liczniku jądra Dirichleta). Dla innych odcinków $[\alpha,\beta]$ tezę gdy $r\in\mathbb{N}$ można uzyskać dość prosto przez rozbicie na przedziały o długości 2π (i jeden krótszy). Dowód dla f w najogólniejszej postaci można sprowadzić do przypadku f ciągłych, a nawet klasy C^1 stosując Lemat o aproksymacji.

Dowód. Dobieramy dla $\epsilon > 0$ funkcję g ciągłą i okresową tak, by $\|f-g\|_1 < \epsilon$. Przybliżając funkcję g jednostajnie wielomianami (co daje też przybliżenie w normie $\|f-g\|_1 := \int_\alpha^\beta |f(t)-g(t)|\,dt \leqslant (\beta-\alpha)\|f-g\|_{[\alpha,\beta]}$), otrzymujemy możliwość założenia od razu takiej regularności (klasy C^1) dla funkcji okresowej g. Wtedy stosując całkowanie przez części, mamy

$$\int_\alpha^\beta g(t)\sin(rt) = \frac{1}{r}\Big[-g(t)\cos rt\Big]_\alpha^\beta + \frac{1}{r}\int_\alpha^\beta g'(t)\cos rt\,dt. \tag{1}$$

Przy $r \to \infty$ pierwszy składnik po prawej stronie zmierza do zera, dzięki ograniczoności funkcji g. W drugim (dzięki nierówności $|\cos rt| \leqslant 1$) możemy oszacować $|\int_\alpha^\beta g'(t)\cos rt\,dt| \leqslant \int_\alpha^\beta |g'(t)|\,dt$, co w przypadku $g \in C^1[\alpha,\beta]$ daje zmierzanie wartości (1) do zera. Natomiast różnica $\int_\alpha^\beta f(t)\sin(rt)\,dt - \int_\alpha^\beta g(t)\sin(rt)\,dt$ ma moduł nie większy, niż całka $\int_\alpha^\beta |(f(t)-g(t))\sin(rt)|\,dt \leqslant \|f-g\|_1 < \epsilon$. Zastosowanie nierównosci trójkąta pozwala więc oszacować moduł z całki $\int_\alpha^\beta f(t)\sin(rt)\,dt$ przez 2ϵ dla r dostatecznie dużych. □

Dotychczas sumy częściowe i ich średnie dla szeregu Fouriera liczyliśmy w postaci zespolonej. Aby później o tym nie zapomnieć- spróbujmy zrobić to na koniec tego wykładu w postaci trygonometrycznej. Korzystając ze wzorów Eulera-Fouriera na współczynniki a_n, b_n zapisujemy wartość wyrażenia

$$S_k[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n\cos nx + b_n \sin nx$$

(zamieniając kolejności: całkowania i sumowania) w postaci

$$S_k[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=1}^{k}(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx)\,dt.$$

Ze wzorów trygonometrycznych, wyrażenie w ostatniej sumie (ujęte w nawias) jest równe $\cos n(t-x)$, stąd

$$S_k[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{k}\cos n(t-x)\right)\,dt.$$

Ze wzoru $2\cos ns\sin\frac{s}{2} = \sin(ns+\frac{s}{2}) - \sin(ns-\frac{s}{2})$ stosowanego do $s = (t-x)$ wyliczamy $2\cos ns = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})s - \sin(n-\frac{1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}}$, co sumowane po $1 \leqslant n \leqslant k$ daje sumę teleskopową równą $-\frac{\sin\frac{s}{2}}{\sin\frac{s}{2}} + \frac{\sin(k+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}}$, która po dodaniu 1 staje się wartością jądra Dirichleta $D_k(s)$. Oczywiście, dalszy proces (czyli sumowanie metodą średnich) da również taki sam wynik, jak dla szeregów w postaci zespolonej.

W następnym kroku przystąpimy do dokładniejszej analizy sum $S_k[f](x)$ w konkretnych punktach x, ale to już w następnym wykładzie.

Zaczniemy od wyliczenia całki $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ -przy czym skorzystamy właśnie z Lematu Riemanna-Lebesgue'a.