29 Twierdzenie Dirichleta

Aby zbadać zbieżność ciągu $S_k[f](x)$ w danym punkcie x, będziemy najpierw zastępować całki z jądrem Dirichleta przez całki zawierające funkcję $\frac{\sin t}{t}$, oznaczaną czasem symbolem $\mathtt{sinc}(t)$ (funkcja o nazwie *sinus cardinalis*). Zaczniemy od wyliczenia całki $I := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$. Z kryterium Dirichleta dla całek niewłaściwych wynika jej zbieżność, wystarczy znaleźć granicę po M przebiegającym wyrazy dowolnego ciągu zmierzającego do nieskończoności z całek $I_M := \int_0^M \frac{\sin t}{t}\,dt$ -na przykład dla $M = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$.

Zacznijmy od porównania z inną, łatwiejszą do liczenia całką z jądra Dirichleta $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$. Jak zauważyliśmy (w 1. własności D_n), mamy $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$. Kluczowe będą dwa fakty. Po pierwsze, jeśli ustalimy dowolnie $\delta > 0$, to $\int_0^\delta \frac{\sin Mt}{t}\,dt = \int_0^{M\delta} \frac{\sin s}{s}\,dt$, co wynika ze wzoru na całkowanie z podstawieniem $s = Mt$, więc granicą przy $M \to \infty$ tych całek będzie szukana całka I. Dodajmy, że dzięki parzystości D_n mamy $\int_0^\pi D_n(t) = \pi$. Po drugie, stosując Lemat Riemanna-Lebesgue'a będziemy mogli wykazać, że dla $M = n+\frac{1}{2}$ różnice $2I_{n+\frac{1}{2}} - \int_0^\pi D_n(t)$ zmierzają do zera przy $n \to \infty$, skąd już bezpośrednio wyniknie, że $2I = \pi$, czyli $I = \frac{\pi}{2}$. Wspomniana różnica $2I_{n+\frac{1}{2}} - \int_0^\pi D_n(t)$, to całka

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \right) dt = \int_0^\pi \frac{\sin\frac{t}{2} - \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t\,dt. \qquad (1)$$

Przy $n \to \infty$ zmierza ona do zera, bo jest to całka postaci $\int_0^\pi u(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$ i aby zastosować Lemat R-L wystarczy sprawdzić całkowalność funkcji $u(t)$, tu oznaczającej ułamek w drugiej z całek (1), czyli $u(2t) = \frac{(\sin t)-t}{t\sin t}$. Ta funkcja jest ciągła w przedziale $(0,\pi]$, sprawdzenia wymaga jedynie istnienie granicy w zerze. Licznik, to reszta we wzorze Taylora i jest ona typu o-małe od t^2, czyli też od mianownika przy $t \to 0$, więc $\lim_{t\to 0} u(t) = 0$. Wykazaliśmy więc, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Przypuśćmy, że funkcja f jest określona i monotoniczna w pewnym otoczeniu prawostronnym zera. Istnieje wówczas jej granica prawostronna $f(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t)$. Wykażemy następujący wzór:

Lemat Dirichleta. Ustalmy dowolną liczbę $a > 0$ oraz funkcję $w \in R[0,a]$, która jest monotoniczna (lub ogólniej, o wahaniu skończonym) na przedziale $[0,\alpha]$ dla pewnego $\alpha \in (0,a]$. Wówczas mamy

$$w(0^+) = \lim_{M\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^a w(t)\frac{\sin Mt}{t}\,dt. \qquad (3)$$

Dowód. Dla uproszczenia zapisu użyjmy oznaczenia $g_M(t) := \frac{\sin Mt}{t}$. Ponieważ, jak powyżej sprawdziliśmy, $\lim_{M\to\infty}\int_0^a g_M(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$, zastępując $w(t)$ przez $w(t) - w(0^+)$ można bez straty ogólności założyć, że $w(0) = w(0^+) = 0$ i wystarczy wówczas wykazać zmierzanie całki z $w(t)g_M(t)$ do zera. Pomoże nam w tym Wzór Bonneta (= II Twierdzenie o wartości średniej dla całek).

Uwaga: W przypadku w o wahaniu skończonym musimy najpierw skorzystać z rozkładu Jordana, czyli zapisać w w postaci różnicy $w_1 - w_2$ dwu funkcji monotonicznych, bo monotoniczność jest konieczna dla stosowania wzoru Bonneta i dalej będziemy ją zakładać . Po otrzymaniu wzoru (3) osobno dla w_1 i dla w_2, wystarczy na końcu odjąć równości stronami -otrzymując tezę dla w.

Ustalmy dowolnie $\epsilon > 0$. Funkcja g_M jest ciągła, w jest monotoniczna na małym przedziale $[0,\delta] \subset [0,a]$ (gdzie $\delta > 0$ jest tak małe, że $|w(\delta)| < \epsilon$ oraz $\delta \leqslant \alpha$). Stosując wzór Bonneta otrzymamy dla pewnego punktu pośredniego

$\xi \in [0,\delta]$ równość

$$\int_0^\delta w(t)g_m(t)\,dt = w(0)\int_0^\xi g_M(t)\,dt + w(\delta)\int_\xi^\delta g_M(t)\,dt.$$

Ze zbieżności $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ wynika ograniczoność całek $\int_\xi^\delta g_M(t)\,dt = \int_{M\xi}^{M\delta} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Ponieważ $w(\delta)$ jest dowolnie małe, mała będzie też całka $\int_0^\delta w(t)g_m(t)\,dt$ i to niezależnie od M. Pierwszy składnik znika, bo mogliśmy założyć, że $w(0)=0$. To już prawie koniec dowodu. Prawie, bo mieliśmy przecież liczyć całkę z górną granicą równą a, nie δ. Pozostaje więc jeszcze wykazać, że "reszta", czyli całka $\int_\delta^a w(t)g_M(t)\,dt$ zmierza do zera[1] przy $M\to\infty$. Ale to wynika z Lematu Riemanna-Lebesgue'a, bo pod całką mamy funkcję $w(t)\frac{1}{t}\sin(Mt)$, zaś na przedziale $[\delta,a]$ funkcja $w(t)\frac{1}{t}$ jest całkowalna, jako iloczyn funkcji całkowalnej przez funkcję ciągłą ograniczoną[2] na przedziale $(0,1]$. $\square$

Najczęściej mamy do czynienia z tzw. funkcją f przedziałami monotoniczną, co oznacza, że istnieje podział jej dziedziny na skończoną ilość przedziałów takich, że na każdym z nich f jest monotoniczna. Takie funkcje mają w każdym punkcie granice lewo- i prawo-stronne, dodatkowo zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny. Funkcje przedziałami monotoniczne mają wahanie skończone i są całkowalne w zwykłym sensie (Riemanna). Ponieważ operator przypisujący funkcji f jej sumę częściową $S_k[f]$ jest liniowy, a każda funkcja o wahaniu skończonym $f \in BV[-\pi,\pi]$ jest postaci $f_1 - f_2$, gdzie f_j są niemalejące, Lemat Dirichleta i twierdzenie, które za chwilę wypowiemy -można uogólnić na tak obszerną klasę funkcji. W wersji oryginalnej dotyczyło ono funkcji spełniających następujące warunki:

Definicja. Mówimy, że funkcja $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ spełnia warunki Dirichleta w punkcie x, jeśli po przedłużeniu do funkcji 2π -okresowej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ona przedziałąmi monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x oraz $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, czyli jej wartość jest średnią granic jednostronnych w danym punkcie.

Oczywiście, drugi warunek zachodzi w punktach, w których f jest ciągła, natomiast jeśli nie rozważamy jej okresowego przedłużenia, to w punktach $\pm\pi$ ma być jednakowa wartość, $f(\pm\pi)$ równa $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Twierdzenie Dirichleta. Jeśli funkcja $f \in R[-\pi,\pi]$ spełnia warunki Dirichleta w punkcie x, to $f(x)$ jest sumą szeregu Fouriera w tym punkcie: $f(x) = \lim_{k\to\infty} S_k[f](x)$, czyli $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx + b_n \sin nx$.

Uwaga. Ogólniejsze założenia, to: całkowalność w sensie niewłaściwym (a nawet w sensie Lebesgue'a) na $[-\pi,\pi]$ zarówno f, jak i $|f|$ oraz zamiast warunków Dirichleta- wahanie skończone f w pewnym otoczeniu punktu x. Wówczas teza twierdzenia Jordana-Dirichleta mówi, że

$$\lim_{k\to\infty} S_k[f](x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Dowód. Przekształćmy wzór $S_k[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)\,dt$ wyprowadzony na wykładzie 24 (str.2, wzór (4) przez podstawienie $x-t=s$ w taki sam sposób, jak na tamtym wykładzie przekształciliśmy wzór (5) na średnie $\sigma_m[f](x)$ do postaci (6), tym razem otrzymamy wzór

$$S_k[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)D_k(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+s)+f(x-s))D_k(s)\,ds \quad (4)$$

[1] Ten fragment rozumowania dowodzi Zasady Lokalizacji Riemanna, która mówi, że zachowanie się ciągu sum częściowych $S_k[f](x_0)$ zależy jedynie od wartości f w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jedyna różnica, to mianownik $\sin\frac{t}{2}$ zamiast t.

[2] W przypadku całkowalności niewłaściwej iloczyn dwu funkcji o takiej własności już może nie być całkowalny, tak jest np. dla $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Ostatnią równość otrzymujemy rozbijając najpierw całkę znajdującą się po lewej stronie na sumę $\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}$, do pierwszego składnika stosujemy podstawienie nowej zmiennej za $-s$ i wykorzystujemy parzystość: $D_k(-s) = D_k(s)$. Teraz w wersji oryginalnej twierdzenia - funkcja $w(s) := f(x+s) + f(x-s)$ nadal spełnia warunki Dirichleta - a w wersji Jordana -ma wahanie skończone w prawostronnym otoczeniu zera postaci $(0, \alpha)$ dla pewnej liczby $\alpha > 0$. Gdybyśmy mieli po prawej stronie wzoru (4) zamiast $D_k(s)$ -funkcję $g_k(s) := \frac{\sin(ks+\frac{s}{2})}{s}$, to z Lematu Dirichleta (stosowanego dla $a = \pi$), mamy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(s) g_k(s)\, ds = w(0^+) = f(x+0) + f(x-0).$$

W tym zapisie zarówno $w(0^+)$, jak i $f(x+0)$ oznaczją granice prawostronne (odp. w zerze i w punkcie x). Zamiana k na $k + \frac{1}{2}$, którą ukryliśmy w definicji g_k ma sens, który przejawi się przy braniu różnic. Wystarczy bowiem wykazać, że

$$\int_0^{\pi} w(s) \left[\frac{1}{\frac{s}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{s}{2}} \right] \sin(k + \frac{1}{2}) s\, ds \tag{5}$$

zmierza do zera przy $k \to \infty$. Ten fakt wynika znownu z Lematu Riemanna-Lebesgue'a, bo zawartość nawiasu kwadratowego, to funkcja ciągła ograniczona wprzedziale $(0, \Pi]$ -zmierzająca nawet do zera przy $s \to 0^+$. Pomnożona przez funkcję całkowalną (np. w sensie całki niewłaściwej) -daje funkcję spełniającą założenia tego Lematu. Przejście do odpowiedniej stałej -konkretnie: od $\frac{2}{\pi}$ w Lemacie Dirichleta do $\frac{1}{2\pi}$ we wzorze (4) odpowiada przejściu najpierw od sumy $f(x+0) + f(x-0)$ do średniej arytmetycznej tych liczb, potem na zastąpieniu s występującego w mianowniku g_k przez $\frac{s}{2}$ w ostatniej całce (5).$\Box$

Podobnie jak w dowodzie Lematu Dirichleta, zastąpmy funkcję $w(s)$ przez $\phi(s) := w(s) - w(0^+)$, czyli niech $\phi(s) = f(x+s) + f(x-s) - (f(x+0) + f(x-0))$. Wówczas $\phi(s) \to 0$ przy $s \to 0^+$. Przy użyciu tej funkcji można sformułować dwa inne warunki wystarczjące na zmierzanie szeregu Fouriera dla f w punkcie x do $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Jak zwykle, zakładamy całkowalnosć f w przedziale $[-\pi, \pi]$ (przynajmniej w sensie całki niewłaściwej). Twierdzenie Diniego mówi, że wówczas warunkiem wystarczającym jest zbieżność całki

$$\int_0^{\delta} \frac{|\phi(t)|}{t}\, dt$$

dla pewnej liczby $\delta > 0$. Warunek wystarczający Lipschitza, to po pierwsze ciągłość w punkcie x, a po drugie -istnienie stałej $\gamma \leqslant 1$ i otoczenia zera postaci $(-\delta, \delta)$, w którym będą ograniczone ilorazy: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\gamma}}, \quad 0 < |h| < \delta$. Istnienie pochodnych 1-stronnych skończonych dla f w punkcie x implikuje więc ten warunek z wykładnikiem $\gamma = 1$ (i zbieżność szeregu Fouriera do $f(x)$). Dowody (znów wykorzystujące Lemat Riemanna - Lebesgue'a) pomińmy.

Ten "lokalny warunek Lipschitza z wykładnikiem γ" zapisany w postaci: $\exists_C \forall_{h\in(-\delta,\delta)}\, |f(x+h) - f(x)| \leqslant C|h|^{\gamma}$ bywa też nazywany warunkiem Höldera z wykładnikiem γ. Co ciekawe, jeśli warunek "globalny Höldera" zachodzi z pewnym wykładnikiem $\gamma > 1$ w przedziale $[a, b]$, czyli gdy

$$\exists_{C>0} \forall_{x,y\in[a,b]}\, |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^{\gamma},$$

gdzie $\gamma > 1$, to funkcja f musi być stała.