Analiza matematyczna II semestr wykład nr 3. (8.III 2021.)

Jeszcze nawiązując do poprzedniego wykładu zauważmy, jak dużą rolę odgrywają kryteria całkowalności. Dla konkretnych funkcji możemy czasami wyliczać granice sum całkowych dla równomiernych podziałów, ale przechodząc do podziałów dowolnych- już mamy z tym problem.

Przykład 1. Sprawdzimy, jak wyglądają sumy całkowe dolne i górne dla funkcji $f(t) = t^2$ na przedziale $[0, 1]$ względem podziału „równomiernego" -tzn. dla $\tau_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1)$. Funkcja jest na tym przedziale rosnąca, więc $\inf_{[t_{j-1},t_j]} f = (\frac{j-1}{n})^2$, natomiast $\sup_{[t_{j-1},t_j]} f = (\frac{j}{n})^2$. Długości odcinków podziału są jednakowe (=równomierność podziału), równe $\Delta_j t = \frac{1}{n}$

Dla sum dolnych mamy więc wzór

$$\underline{s}(f, \tau_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} (j-1)^2.$$

Ale, jak wiemy, (z poprzedniego semestru), zachodzi wzór $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, więc $\underline{s}(f, \tau_n) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Podobnie, $\overline{S}(f, \tau_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Z nierówności $\underline{s}(f, \tau_n) \leqslant S(f, \tau_n, \Lambda_n) \leqslant \overline{S}(f, \tau_n)$ i z twierdzenia o 3 ciągach wynika więc zbieżność do $\frac{1}{3}$ sum całkowych z dowolnie wybranymi punktami pośrednimi. Ale dla innych (nierównomiernych) podziałów taką zbieżność trzeba jeszcze dodatkowo wykazać, by sprawdzić, że $\int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$. I tW wyjątkowych przypadkach można osiągnąć uproszczenie dobierając w sprytny sposób punkty pośrednie.

Przykład 2. Gdy $0 < a < b$ i mamy już jakieś punkty podziału $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, szukając wartości całki $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, weźmy $\lambda_j = \sqrt{t_{j-1}t_j}$. wówczas $S_n = \sum_j \frac{t_j - t_{j-1}}{t_j \cdot t_{j-1}} = \sum(\frac{1}{t_{j-1}} - \frac{1}{t_j})$, co jako „suma teleskopowa" -z upraszczającymi się prawie wszystkimi (z wyjątkiem dwóch) składnikami, daje wartość $\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_n}$. Uzasadnienia wymaga tu jedynie całkowalność funkcji, czyli niezależność naszego wyniku od wyboru punktów pośrednich (patrz następny wykład).

Przykład 3. Dla funkcji nieujemnej całka może wynosić zero, choć funkcja jest dodatnia w pewnych punktach. Najłatwiej to zauważyć dla funkcji równej 1 w punkcie 0 oraz równej zero w pozostałych punktach odcinka $[0, 1]$. Sumy dolne są $\geqslant 0$, zaś suma górna, to $t_1 - t_0$, co nie przekracza średnicy podziału i zmierza do 0 dla normalnego ciągu podziałów. (Zamiast w zerze, możemy wziąć wartość 1 w dowolnie wybranym innym pojedynczym punkcie. Postulat addytywnosci względem drogi całkowania pozwala uzyskać to samo dla funkcji równej zero poza skończoną liczbą punktów. Jako ćwiczenie proponuję sprawdzenie, że gdy $g(t) = 1$ dla $t \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ oraz $g(t) = 0$ dla $t \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, to również $\int_0^1 g(t)\, dt = 0$.o nie jest takie proste.

Może uda się komuś sprawdzić, że zero, to całka z funkcji Riemanna (takiej, że $\frac{p}{q} \mapsto \frac{1}{q}, f(x) = 0$ dla x niewymiernych, gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny).

Jeszcze jedna uwaga: Wyliczając operacje "zachowujące całkowalność" proszę uważać, aby się "nie rozpędzić": *moduł,suma, różnica, iloczyn funkcji całkowalnych- są całkowalne. Ale z ilorazem trzba już uważać-* nie zawsze jest całkowalny! Wystarczy to zbadać dla $w(x) = \frac{1}{f(x)}$, gdzie $f \in R[a, b]$. Taki iloraz przecież nie musi być funkcją ograniczoną nawet gdy $\forall_x f(x) \neq 0$- n. p. dla $f(x) = x$ gdy $x \neq 0$, zaś $f(0) = 1$. Jeśli założymy, że $m := \inf_{[a,b]} |f(x)| > 0$, to już w będzie zarówno ograniczona (przez $\frac{1}{m}$), jak i całkowalna, bo dla $s, t \in [a, b]$ mamy $|w(s) - w(t)| = \frac{|f(t)-f(s)|}{|f(t)\cdot f(s)|} \leqslant \frac{1}{m^2} |f(t) - f(s)|$ i mamy takie "kryterium porównywania przyrostów". Teraz dla g całkowalnej, zaś f spełniającej powyższe założenia -całkowalność funkcji $\frac{g}{f}$ wywnioskujemy stosując tezę o całkowalności iloczynu: $g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$, jeśli tylko $\exists_{m>0} \forall_{x \in [a,b]} |f(x)| \geqslant m$.

Istotną wadą przestrzeni wektorowej $R[a, b]$ jest fakt, że granice ciągów monotonicznych, wspólnie ograniczonych funkcji $f_n \in R[a, b]$ mogą nie być całkowalne. Na przykład, funkcja Dirichleta f_* na odcinku [0,1] nie jest całkowalna. Jeśli w jakiś sposób ustawimy wszystkie liczby ze zbioru $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ w ciąg, zaś f_n jest funkcją charakterystyczną zbioru n pierwszych wyrazow takiego ciągu, to $\forall_n \forall_{t\in[0,1]}\, 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant 1$ oraz $f_n \to f_*$, $f_n \in R[a,b]$, ale $f_* \notin R[a,b]$

3 Wzór Newtona-Leibniza

Lemat. Dla funkcji $f \in R[a,b]$, (gdzie $a < b$) zachodzą nierówności

$$|\int_a^b f(t)\,dt| \leqslant \int |f(t)|\,dt, \tag{1.3}$$

$$|\int_a^b f(t)\,dt| \leqslant (b-a)\cdot\|f\|_{[a,b]}, \ \texttt{gdzie}\ \|f\|_{[a,b]} := \sup\{|f(t)|:\ t\in[a,b]\}. \tag{2.3}$$

Nierówność (1.3) znana jest jako **całkowa nierówność trójkąta**, bo całkowanie jest w pewnym sensie odpowiednikiem sumowania. Z drugiej nierówności będziemy też korzystać bardzo często. Symbol zdefiniowany w (2.3) nazywamy **normą supremową** lub **normą Czebyszewa** z f. Zauważmy, że z kryterium w którym porównujemy przyrosty wynika całkowalność $|f|$.

Tezę (1.3) otrzymamy całkując stronami nierówności: $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ zachodzące w każdym punkcie. Z warumku jednorodności w twierdzeniu o liniowości całki, $\int_a^b -|f(t)|\,dt = -\int_a^b |f(t)|\,dt$, a stąd już wynika teza. Faktycznie, mamy równoważcość dla liczb: $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$. Analogicznie otrzymamy drugą nierówność, całkując stronami nierówności $-M \leqslant f(t) \leqslant M$, które zachodzą ze stałą $M = \|f\|_{[a,b]}$. Alternatywnie, w dowodzie (1.3) można skorzystać ze zwykłej nierówności trójkąta dla sum całkowych, przechodząc następnie do granicy z otrzymanymi nierównościami. $\square$

Wprowadźmy jeszcze definicję całki Riemanna od a do b, gdy $a \geqslant b$. Przyjmujemy wtedy

$$\int_a^b f(t)\,dt := -\int_b^a, \quad \int_a^a f(t)\,dt.$$

Oczywiście, w takiej sytuacji całkowanie nierówności stronami trzeba zmodyfikować, odwracając kierunek nierówności w tezie. Natomiast średnia całkowa i pierwsze twierdzenie o wartości średniej zachodzą bez zmian, bo w drugiej tezie odwrócone nierówności dzielimy przez liczbę ujemną, gdy $g \geqslant 0$. Nierówność (2.3) też zachodzi, bo tam szacujemy moduł z całki. Co więcej, wzór $\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$, (czyli addytywna zależność całko od drogi całkowania) zachodzi dla każdej funkcji całkowalnej po tych wszystkich odcinkach i dla dowolnej konfiguracji punktów a, b, c. Sprawdzenei takiej zależności jest dość proste, ale żmudne, bo polega na rozpatrzeniu wszystkich możliwych przypadków. Dowód więc pominiemy.

Twierdzenie 1. Dla $f \in R[a,b]$ zdefiniujmy funkcję

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \texttt{dla} \quad x \in [a,b]. \tag{3.3}$$

Tak zdefiniowana funkcja jest ciągła, a w punktach x_0, w których f jest ciągła ma pochodną, przy czym $F'(x_0) = f(x_0)$.

Dowód. Dzięki addytywnej zależności od drogi całkowania, przyrost funkcji F wyrażamy wzorem

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Stosując nierówność (2.3) zauważamy, że ostatnia całka dąży do zera gdy $h \to 0$. Oznacza to ciągłość F w każdym punkcie $x \in [a,b]$.

Ponieważ $(x+h) - x = h$, więc iloraz różnicowy $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ jest równy średniej całkowej $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Z Pierwszego Twierdzenia o Wartości Średniej ta średnia mieści się pomiędzy liczbami $m(h) := \inf_{[x,x+h]} f$ oraz $M(h) :=$

$\sup_{[x,x+h]} f$. Jeśli f jest ciągła w punkcie x, to $\lim_{h\to 0} m(h) = f(x) = \lim_{h\to 0} M(h)$, więc z twierdzenia o 3 granicach, te ilorazy różnicowe zmierzają do x. Gdy f jest ciągłą w całym odcinku $[a,b]$, to wartość średnia jest postaci $f(\lambda_h)$ dla pewnego punktu λ_h leżącego pomiędzy punktami $x, x+h$. Punkt λ_h zmeraz, rzecz jasna, do x, dalsza część dowodu jest bez zmian. □

Wniosek 2. Każda funkcja ciągła ma funkcje pierwotne i jedna z nich określona jest wzorem (3.3).

Wniosek 3.(Wzór Newtona - Leibniza). Jeśli Φ jest jakąś funkcją pierwotną dla funkcji $f \in C[a,b]$, to

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{$N-L$}$$

Dla dowodu wykorzystamy fakt, że gdy F jest finkcją pierwotną daną wzorem (3.3), to różni się ona o stałą od naszej Φ: istnieje stała C taka, że $F = \Phi + C$. A ponieważ $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, więc $C = -\Phi(a)$. Wstawiając takie C do wzoru na $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) + C$ otrzymujemy tezę.□

Główną tezę Twierdzenia 1. zapisuje się w postaci $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$. Zauważmy, że $\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)\,dt\right) = -f(x)$. Faktycznie, drugą całkę można zapisać jako $-\int_b^x f(t)\,dt$.

Przyrost $F(b) - F(a)$ funkcji F na odcinku $[a,b]$ oznaczany jest symbolem

$$F(x)\Big|_a^b \quad \texttt{lub} \quad \big[F(x)\big]_a^b.$$

Mamy więc dzięki wzorowi (N-L) taki wzór na ten przyrost:

$$\big[F(x)\big]_a^b = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{5.3}$$

Dygresja. Można zadać pytanie, czy gdy dla $F \in C[a,b]$ pochodna istnieje w każdym punkcie $x \in [a,b] \setminus E$, gdzie E jest zbiorem skończonym, to czy nadal zachodzi wzór (5.3)? Odpowiedź jest twierdząca. Ale gdy tylko zakładać, że E jest zbiorem miary (Lebesgue'a) zero, to już wcale tak nie musi być. Przykładem jest surjekcja ciągła zbioru trójkowego Cantora $C_3 \subset [0,1]$ na [0,1], przedłużona do funkcji ciągłej[1] niemalejącej poprzez przyjęcie wartości stałych na odcinkach otwartych wyrzucanych z [0,1] podczas konstrukcji zbioru C_3. Suma długości tych wyrzucanych odcinków, to suma szeregu geometrycznego, równa 1, więc C_3 jest zbiorem miary zero. Na wyrzucanych odcinkach F jest stała, a $F'(x) = 0$ dla $x \in [0,1] \setminus C_3$. Gdyby zinterpretować całkę z F' jako sumę szeregu utworzonego z całek po odcinkach wyrzucanych (tak naprawdę- jest to już całka Lebesgue'a), to jej wartość wynosi zero, podczas gdy przyrost $\big[F(x)\big]_0^1$ wynosi 1. Dopiero dla tak zwanych funkcji absolutnie ciągłych zachodzi wzór (5.3) nawet z pominięciem zbiorów miary 0, co więcej można wykazać, że dla takich funkcji istnieje pochodna we wszystkich- poza elementami zbioru miary zero -punktach danego odcinka. Aby nie komplikować, będziemy dalej zakładać, że F jest funkcją pierwotną dla funkcji ciągłej, co można wygodnie zapisywać w postaci: $F \in C^1[a,b]$.

Stosując twierdzenie (N-L) dość łatwo uzyskujemy odpowiedniki wzorów na całkowanie przez części i przez podstawienie dla całek oznaczonych

Twierdzenie 2. Dla $F, G \in C^1[a,b]$ mamy równość

$$\int_a^b F'(t)G(t)\,dt = \big[FG\big]_a^b - \int_a^b F(t)G'(t)\,dt \quad \texttt{(Całkowanie przez części)}$$

Jeśli natomiast $f \in C[a,b]$ oraz $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, gdzie $h \in C^1[\alpha,\beta]$, to

$$\int_\alpha^\beta f(h(x))h'(x)\,dx = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(t)\,dt \quad \texttt{(Całkowanie przez podstawienie).}$$

[1] Parę kolejnych przybliżeń wykresu tej funkcji o wdzięcznej nazwie "diabelskie schody" naszkicuję podczas wykładu.

Dowód. W pierwszej równości przenosimy całkę z FG' na lewą stronę i z liniowości całki otrzymamy po lewej stronie $\int_a^b(F'G+FG')\,dt$, czyli całkę z pochodnej iloczynu[2], równą dzięki wzorowi (N-L) przyrostowi tego iloczynu, czyli liczbie $\big[FG\big]_a^b$.

Jeśli przez F oznaczymy funkcję pierwotną dla f, to $f(h(x))h'(x) = (F\circ h)'(x)$, co całkowane w granicach od α do β daje $F(h(\beta)) - F(h(\alpha))$ i teza wynika ze wzoru (N-L) dla całki z $f = F'$ liczonej w granicach od $h(\alpha)$ do $h(\beta)$. $\square$

Na przykład, "pole pod grzbietem sinusoidy", $\int_0^\pi \sin x\,dx$ jest równe $-\cos x|_0^\pi = 2$. Całki po pełnym okresie (np. po odcinku $[0,2\pi]$) z każdej z funkcji: $\sin, \cos$ - są oczywiście zerem, bo funkcje pierwotne są tu okresowe. Ale uwaga: jest funkcja okresowa niemająca pierwotnej funkcji okresowej -to funkcja stała = 1.

Inny przykład, to $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$, tu stosujemy podstawienie t = 2x + 1, wówczas dt = 2dx. Ponadto, gdy $x = 0$, to $t = 1$ $x = 4 \Rightarrow t = 9$. Więc

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{26}{3}.$$

Lemat. Całki po przedziałach postaci $[-a, a]$ z funkcji f nieparzystych są zerowe, zaś dla funkcji parzystych mamy

$$\Big(\forall_{|t|\leqslant a} f(t) = f(-t)\Big) \Rightarrow \int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

dowód. Obydwie tezy wynikają z podstawienia $t = -u, dt = -du$ w całce

$$J_1 := \int_{-a}^0 f(t)\,dt = -\int_0^{-a} f(t)\,dt = \int_0^a f(-u)\,du.$$

Jest to całka, którą trzeba dodać do $J_2 := \int_0^a f(u)\,du$, by uzyskać całkę po przedziale od $-a$ do a z naszej f. Więc gdy na całej dziedzinie jest $f(-u) = -f(u)$, to $J_1 = -J_2$ i wynikiem dodawania jest zero, zaś gdy $f(-u) = f(u)$, to $J_1 = J_2$ i otrzymamy jako wynik $2J_2$. $\square$

Z addytywności względem drogi całkowania i z odpowiedniego podstawienia należy również skorzystać rozwiązując następujące zagadnienie dla funkcji okresowych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie T, czyli takich że $\forall_x\ f(x+T) = f(x)$:

Ćwiczenie. Proszę wykazać, że dla f o okresie $T > 0$ gdy $b = a + T$, to $\int_a^b f(t)\,dt = \int_0^T f(s)\,ds$, czyli, całki po odcinkach o długości równej okresowi są jednakowe. (Będzie to istotnie wykorzystywane przy badaniu sum częściowych szeregów Fouriera. Wskazówka: "$\leqslant$" w $\mathbb{R}$ jest porządkiem Archimedesowym, więc $\exists n \in \mathbb{N} : a \leqslant nT < b$)

We wzorach redukcyjnych na $J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$ mamy dość znaczne uproszczenie, bo iloczyn we wzorze całkowania przez części zeruje się. Dokładniej,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x)\cdot(-\cos x)'\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n.$$

Stąd $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$ i w końcu

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

W zależności od tego, czy n jest parzyste, czy też nie, cofając się w każdym kroku o 2 dojdziemy po paru krokach albo do $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$, albo do $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1$. Aby zunifikować zapis definiuje się symbol $n!!$ jako iloczyn wszystkich liczb naturalnych o tej samej reszcie w dzieleniu przez 2, co n i nie większych od n. Dla n parzystych mamy więc

$$J_n = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot n} = \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!},$$

[2] To jest wzór Leibniza, czyli równość $(FG)' = F'G + FG'$

a dla nieparzystych n jest

$$J_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} = \frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

Z tego wywnioskujemy ciekawy wzór na liczbę π. Zacznijmy od zauważenia, że na odcinku, po którym całkujemy jest $\sin^{2n+1} \leqslant \sin^{2n} \leqslant \sin^{2n-1}$, co całkowane stronami daje analogiczne nierówności między $J_k, k = 2n+1, 2n, 2n-1$, czyli

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}. \tag{6.3}$$

Wzór rekurencyjny $(k+2)!! = k!! \cdot (k+2$ pozwala po podzieleniu przez środkowy ułamek (gdzie drugim czynnikiem $jest\frac{\pi}{2}$) otrzymać z (6.3) nierówności:

$$a_n := \frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant b_n := \frac{1}{2n} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

. Aby skorzystać z twierdzenia o 3 ciągach wystarczy jeszcze sprawdzić, czy $\lim(b_n - a_n) = 0$. Tak jest faktycznie, bo $0 \leqslant b_n - a_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{1}{2n}a_n \leqslant \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2}$.

Otrzymany przez angielskiego matematyka, Johna Wallisa na tej drodze wzór był pierwszym wyrażającym π jako granicę ciągu o zadanych *expliciite* wyrazach wymiernych. Mamy więc następujący

Wzór Wallisa.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

Inne zastosowanie całek oznaczonych będzie dotyczyło kryterium zbieżności szeregów liczbowych, które bywa wygodne np. dla szeregów postaci $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, gdzie $\alpha > 0$. Wyrazy takich szeregów są postaci $f(n)$, gdzie $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ jest pewną funkcją nierosnącą. Mamy wówczas dla $t \in [n, n+1]$ nierówności $f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1)$, które całkujemy stronami po odcinku $[n, n+1]$. Ponieważ całki ze stałych po odcinkach długości 1 są równe tym stałym, otrzymujemy nierówności

$$f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n+1).$$

Otrzymane nierówności sumujemy stronami w zakresie od $n = 1$ do $n = k$, otrzymując

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} f(n) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_1^{k+1} f(t)\,dt \leqslant S_{k+1} - f(1).$$

Środkowa równość wynika z addytywnej zależności całki od drogi całkowania, bo sumą mnogościową odcinków $[n, n+1]$ o parami rozłącznych wnętrzach jest tu odcinek $[1, k+1]$. Mamy do czynienia z funkcją o wartościach nieujemnych i z szeregiem o wyrazach nieujemnych. Zbieżność szeregu jest więc równoważna ograniczoności ciągu S_k jego sum częściowych, co z kolei jes równoważne ograniczoności ciągu o wyrazach $S_{k+1} - f(1)$. Z otrzymanych nierówności widać, że jest to z kolei równoważne skończoności granicy $\lim_{k\to\infty} \int_1^k f(t)\,dt$, którą będziemy nazywali zbieżnością całki niewłaściwej i zapisywali (w przypadku f nieujemnych symbolicznie jako

$$\int_1^\infty f(t)\,dt < +\infty.$$

Tu zwróćmy uwagę na fakt, że górna granica całkowania nie musi być w ogólnej definicji całki niewłaściwej -liczbą naturalną. Wartość k dążyć ma (w odróżnieniu od sumowania) do $+\infty$ po wartościach rzeczywistych, całkiwm dowolnych. Ale z nieujemności wszystkich $f(t)$ wynika, że funkcja $\Phi(k) := \int_1^k f(t)\,dt$ jest niemalejąca, więc jej granica istnieje wtery i tylko wtedy, gdy jest to funkcja ograniczona na zbiorze $[1, +\infty)$. z warunku Heinego łatwo wywnioskować, że ta granica jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg wartości $\Phi(k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest ograniczony. Nie korzystmy tu z twierdzenia o 3 ciągach, tylko z badania ograniczoności. Mamy więc następujące

Kryterium całkowe zbieżności szeregów Gdy $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest nierosnąca, to $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy całka niewłaściwa $\int_1^\infty f(t)\,dt := \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(t)\,dt$ jest zbieżna.