Analiza 2 na kier. "Matematyka" - wykład nr 4. (10.III 2021.)

4 Miara Jordana a całka oznaczona (Riemanna)

4.1 Miara zbioru

Ze względu na zastosowania omówimy od razu d–**wymiarową miarę Jordana zbioru ograniczonego** $D \subset \mathbb{R}^d$. To, co niewątpliwie możemy wyliczyć, to miara kostki $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, najczęściej będziemy rozważać przypadki $d = 1, 2$ lub 3. Dla $d = 2$ mówimy o polu prostokąta Q –równym $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$, dla $d = 3$- o objętości prostopadłościanu Q, a dla $d = 1$ -o długości odcinka $[a_1, b_1]$. Dla uproszczenia tę miarę kostki Q oznaczmy przez $|Q|$. Oczywiście, rozważamy tylko kostki o krawędziach równoległych do osi układu. Kostka może być zdegenerowana, gdy któryś z jej boków ma długość zero i wtedy gdy Q jest zdegenerowana (i tylko wtedy), mamy $|Q| = 0$.

Ogólnie definiujemy więc **miarę kostki** jako liczbę

$$|Q| := (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k).$$

Zbiór pusty też traktujemy jako kostkę, przyjmując $|\emptyset| = 0$. Mówimy, że kostki z danego $Q_1, \ldots, Q_m$ układu mają wnętrza parami rozłączne, gdy dla każdej pary indeksów $j, n \in \{1, \ldots, m\}$

$$j \neq n \Rightarrow |Q_j \cap Q_n| = 0. \tag{1}$$

Jest to zgodne z ogólną definicją wnętrza- które będzie dla kostki Q iloczynem kartezjańskim odpowiednich przedziałów otwartych (lub zbiorem pustym -dokładnie dla kostek zdegenerowanych). Część wspólna dwu kostek jest kostką, ale może ona być zdegenerowana. Gdy $d = 2$, założenie (1) oznacza, że prostokąty z danego układu mogą albo być rozłączne albo mogą stykać się jedynie wzdłuż boku lub wierzchołka. Sumę mnogościową $\Omega = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ skończonej ilości kostek o wnętrzach parami rozłącznych nazwiemy **figurą prostą** i dla takich zbiorów definiujemy ich **miarę d-wymiarową** $m_d(\Omega)$ wzorem

$$m_d(\Omega) = \sum_{j=1}^{m} |Q_j|. \tag{2}$$

Każda suma skończonej ilości kostek nawet niespełniających warunku (1) jest figurą prostą. Każdą figurę prostą można (nawet na wiele sposobów) przedstawić jako sumę układu kostek o wnętrzach parami rozłącznych. Co najważniejsze, otrzymana suma ich miar będzie taka sama -więc definicja (2) nie zależy od sposobu przedstawienia figury Ω jako sumy układu kostek spełniających postulat rozłączności (1). Ten dość oczywisty fakt geometryczny wymaga jednak ścisłego dowodu, który pominiemy. Można to robić metoda indukcji ze względu na ilość kostek, lub metodą wspólnych rozdrobnień (dzielimy kostki na mniejsze fragmenty).

Oczywiście, większość zbiorów $E \subset \mathbb{R}^d$ nie da się przedstawić jako figurę prostą- nawet trójkąt lub obrócony o 45 stopni kwadrat -nie są skończonymi sumami kostek (bo zakładamy równolgłość krawędzi kostek do osi układu). Możemy dowolny zbiór ograniczony przybliżać figurami prostymi na dwa sposoby, które prowadzą do potencjalnie dwu miar: wewnętrznej i zewnętrznej tego zbioru:

Definicja. Miarę wewnętrzną $m_*(E)$ zbioru $E \subset \mathbb{R}^d$ definiujemy wzorem

$$m_*(E) := \sup\{m_d(\Omega) : \Omega \subset E, \Omega = \texttt{figura prosta}\}.$$

Miarę zewnętrzną $m^*(E)$ definiujemy jako kres dolny $\inf m_d(\Omega_1)$ miar figur prostych Ω_1 zawierających zbiór E. Mówimy, że zbiór E jest mierzalny (w sensie Jordana), gdy $m_*(E) = m^*(E)$ i wówczas piszemy $m_d(E) = m_*(E)$.

Podstawową własnością miary powinna być jej addytywność. Można wykazać, że gdy dwa zbiory mierzalne $A, B \subset \mathbb{R}^d$ są rozłączne:

$$A \cap B = \emptyset, \quad \texttt{to wówczas } m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B). \tag{3}$$

Suma skończonej ilości zbiorów mierzalych jest zbiorem mierzalnym. Natomiast dla sumy przeliczalnej ilości- już tak nie jest. Na przykład, w przypadku $d = 1$ zbiór liczb wyiernych z oscinka [0,1], czyli $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ jest niemierzalny, chociaż jest sumą ciągu zbiorów 1-elementowych mierzalnych $\{r_j\}$, bo liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$ można ustawić w ciąg. Ponadto $\forall_j\, m_*(\{r_j\}) = m^*(\{r_j\}) = 0$. Miara wewnętrzna tego zbioru $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ jest równa zero, zewnętrzna jest równa 1. Dla miary wewnętrznej odpowiednik własności (3) nie zachodzi (bo dla $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1], B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ jest $m_*(A) = 0 = m_*(B)$, podczas gdy $A \cup B = [0, 1]$ ma miarę 1).

Dla funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ fragment płaszczyzny "pod wykresem funkcji", czyli ograniczony osią OX, prostymi x=a, x=b i wykresem f nazywamy trapezem krzywoliniowym. Oznaczmy go T_f. Tak więc

$$T_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

- Mierzalność tego zbioru w przypadku f ciągłej można dość łatwo wykazać korzystając z twierdzenia Cantora o jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na przedziale domkniętym. Twierdzenie to mówi, że gdy $f \in C[a, b]$, to

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{s,t\in[a,b]}|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon. \tag{4}$$

Tam jako figury proste zawarte w tym zbiorze T_f możemy wziąć sumy prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, m_j]$, gdzie $m_j = \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$, zaś figura prosta zawierająca zbiór T_f, to suma prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, M_j]$, gdzie $M_j = \sup\{f(x) : x \in [t_{j-1}, t_j]\}$. Te dwie figury są wyznaczone przez układ punktów t_j podziału odcinka $[a, b]$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ na n części. Te części są odcinkami o długości $t_j - t_{j-1}$ i jeżeli (przy ustalonym $\epsilon > 0$) dobierzemy na tyle gęsto punktów podziału, by dla stałej δ spełniającej warunek (4) było $\forall_j t_j - t_{j-1} < \delta$, to będziemy mieli $M_j - m_j < \epsilon$. Faktycznie, jak wiemy (z Tw. Weierstrassa) f osiąga na każdym z przedziałów $[t_{j-1}, t_j]$ swoje wartości największe: M_j w pewnych punktach $\beta_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Wartości najmniejsze: m_j są równe $f(\alpha_j)$ dla pwenych $\alpha_j \in [t_{j-1}, t_j]$. A ponieważ $|\beta_j - \alpha_j| < \delta$, z warunku jednostajnej ciągłości (4) wynika, że $M_j - m_j < \epsilon$. Różnica między miarą górną i miarą dolną naszego zbioru D jest więc nie większa, niż

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n}\epsilon(t_j - t_{j-1}) = \epsilon \cdot (b - a).$$

Różnica ta jest więc dowolnie mała, a ponieważ jest nieujemna, musi być zerem, co świadczy o mierzalności zbioru D.

W przypadku dowolnej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ można zauważyć, że każda figura prosta zawarta w trapezie krzywoliniowym T_f może być (w razie potrzeby) powiększona do figury prostej F zawartej nadal w T_f, której miara jest sumą dolną dla pewnego podziału. Jest więc nie większa od całki dolnej z f. Więc i miara dolna $m_*(T_f)$ jest $\leqslant \underline{\int}_a^b f$. Analogicznie, figura prosta zawierająca T_f zawiera w sobie fig. prostą o polu równym pewnej sumie górnej, jest więc nie mniejsza niż całka górna. Z drugiej strony, np. każda suma górna (czy też dolna) jest równa polu odpowiedniej figury prostej, co wskazuje, że całka dolna z f, to miara dolna T_f, analogicznie- dla górnych miar i całek górnych. To dowodzi, że całkowalność f jest równoważna mierzalności trapezu T_f i w takim przypadku jego miara jest równa całce:

$$m_2(T_f) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Teraz możemy (o ile znamy całki nieoznaczone z danej funkcji) wyliczać ich całki oznaczone i pola powierzchni związanych z nimi figur.

Na przykład, pole pod "garbem sinusoidy" ($f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$) wynosi 2. Faktycznie, funkcją pierwotną jest $-\cos(x)$, zaś $(-cos\pi) - (-cos0) = 1 + 1 = 2$.

Obliczmy pole ćwiartki koła, którego brzeg ma równanie $x^2 + y^2 = R^2$. To pole, to całka $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$. Najpierw wyliczmy całkę nieoznaczoną, całkując przez części iloczyn naszej funkcji przez $1 = x'$.

$$J_R := \int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{R^2 - x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx.$$

Ostatnią całkę zapiszmy w postaci

$$\int \frac{(R^2-x^2)-R^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = J_R - R^2\int \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx.$$

Ponieważ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$ całkę zawierającą R^2 zamiast 1 sprowadzimy do takiej postaci podstawiając $t=\frac{x}{R}$, gdzie $dt=\frac{1}{R}\,dx$. Przenosząc J_R na lewą stronę otrzymujemy więc $2J_R = x\sqrt{R^2-x^2}+R^2\arcsin\frac{x}{R}+C$. Wzór Newtona- Leibniza daje więc (ze względu na zerowanie się pierwszej funkcji na końcach przedziału $[0,R]$ i na fakt, że $\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$) równość: $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi R^2$ i rzeczywiście, to jest $\frac{1}{4}$ pola koła. Dla elipsy o brzegu opisanym równaniem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mielibyśmy całkę z funkcji $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ po odcinku $[0,a]$, czyli $\frac{1}{4}\pi ab$ - jako pole $\frac{1}{4}$ tej elipsy.

Policzmy jeszcze pole obszaru leżącego między prostą o równaniu $y=x$ oraz parabolą $y=7x-x^2$. Ich punkty przecięcia, powiedzmy o współrzędnych na osi OX równych a,b znajdyhemy rozwiązując układ równań, co daje równanie $x=7x-x^2$, czyli $x(6-x)=0$. Stąd $a=0, b=6$ parabola ma ramiona zwrócone w dół, więc na tym jej "środkowym fragmencie" leży nad prostą $y=x$, a szukane pole wynosi

$$\int_0^6 (7x-x^2-x)\,dx = \left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6 = 36.$$

Jeśli szukamy pola ,którego brzegiem jest fragment wykresu funkcji logarytm naturalny, oś Ox oraz proste $x=\frac{1}{e}, x=e$, to nie liczymy całki z $\ln x$, tylko całkę z modułu, bo ten zbiór jest sumą dwu obszarów A,B złożonych z tych par $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dla których odpowiednio $\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1, \ln x\leqslant y\leqslant 0$ oraz $1\leqslant x\leqslant e, 0\leqslant y\leqslant \ln x$, ze względu na zmianę znaku z $-$ na $+$ przez logarytm w punkcie 1. Stąd

$$m_2(A\cup B) = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = -1\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx$$

Licząc najpierw całkę nieoznaczoną z logarytmu, całkujemy przez części, pisząc

$$\int (x')\ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

Stąd szukane pole wynosi

$$\Big[x(1-\ln x)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} + \Big[x(\ln x - 1)\Big]_1^e = 2-\frac{2}{e}.$$

Wkrótce poznamy inne metody liczenia pól figur na płąszczyźnie ograniczonych np. przez krzywe zamknięte.

4.2 Długość łuku krzywej

Przejdźmy obecnie do zagadnienia liczenia długości krzywej.

Zaczniemy od długości odcinka $L=[P_1:P_2]$ o końcach P_1, P_2 będących punktami $P_j=(x_j,y_j)\in\mathbb{R}^2$. Odcinki o długościach $|x_2-x_1|$ oraz $|y_2-y_1|$ –są przyprostokątnymi w trójkącie, którego przeciwprostokątną jest ten odcinek L, więc jego długość wynosi $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Analogiczny wzór mamy w $\mathbb{R}^3$, gdzie trzeba jeszcze uwzględnić długość $|z_2-z_1|$ rzutu tego odcinka na oś OZ. Wygodnie jest posługiwać się tu tzw. normą euklidesową. Dla wektora $\vec{w}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ dofiniujemy jego długość $\|\vec{w}\|_2 := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ogólniej, jeśli wektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^d$ ma współrzędne $(x_1,x_2,\ldots,x_d)$, niech

$$\|\vec{v}\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Strazłkę nad wektorami będziemy raczej opuszczać. Długość euklidesowa odcinka L wynosi więc $\|P_2-P_1\|_2$ Przy użyciu normy można zdefiniować ciągłość odwzorawania $\gamma:[a,b]\ni t\to\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots x_d(t))$ w punkcie $t_0\in[a,b]$ poprzez warunek:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{s\in[a,b]}\,|s-t_0|<\delta\Rightarrow\|\gamma(s)-\gamma(t_0)\|_2<\epsilon.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to równoważne ciągłości w tym punkcie t_0 wszystkich funkcji $x_j(\cdot)$ (czyli j-tych współrzędnych γ). Definijemy też pochodną: $\gamma'(t_0)$ jako wektor złożony z pochodnych tych funkcji współrzędnych: $\gamma'(t_0)=(x_1'(t_0),x_2'(t_0),\ldots,x_d'(t_0))$

Definicja. **Krzywą** w $\mathbb{R}^d$ nazywamy odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$. Zbiór $\gamma([a,b])$ nazywamy **obrazem geometrycznym krzywej** γ. Mówimy, że krzywa jest klasy C^1, gdy jej wszystkie współrzędne $x_j(\cdot)$ są klasy C^1 w całym odcinku $[a,b]$. Gdy $\mathcal{T}$ jest podziałem $[a,b]$ punktami t_k, zaś $P_k := \gamma(t_k)$ -są ich obrazami na krzywej, to linię łamaną o kolejnych wierzchołkach w punktach P_k nazywamy **łamaną wpisaną w tę krzywą**. Kres górny długości łamanych wpisanych w krzywą oznaczamy $\ell(\gamma)$ i nazywamy **długością tej krzywej**. Gdy $\ell(\gamma) < +\infty$, mówimy, że krzywa γ jest **prostowalna**.

Długość łamanej o wierzchołkach $P_0, P_1, \dots, P_n$, to suma długości jej odcinków, czyli liczba $\sum_{k=1}^{n} \|P_k - P_{k-1}\|_2$.

Na następnym wykładzie wykażemy następujące

Twierdzenie. Każda krzywa klasy C^1 jest prostowalna. Jej długością[1] jest

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

Na płaszczyźnie krzywą jest np. odwzorowanie

$$[0, 2\pi] \ni \alpha \mapsto (R\cos\alpha, R\sin\alpha) \in \mathbb{R}^2.$$

Jej obraz geometryczny, to okrąg o środku w zerze i o promieniu R obiegany raz w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. Jest to tzw. "dodatnia orientacja okręgu". Długością tej krzywej jest $2\pi R$. Ten sam obraz geometryczny ma krzywa

$$[0, 2\pi] \ni \alpha \mapsto (R\sin(100\alpha), R\cos(100\alpha))$$

(ujemnie zorientowana), o znacznie większej długości. Wektor $\gamma'(t)$ jest wektorem stycznym do $\gamma(t)$-to "wektor prędkości" dla ruchu wzdłuż krzywej.

Wykres funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest krzywą -tu $\gamma(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Bez wyliczania całek można się przekonać, że wykres funkcji równej $x \sin\frac{1}{x}$ dla $x \in (0,1]$ oraz równej zero dla $x = 0$ **-jest krzywą nieprostowalną** (jeśli wiemy, ze dla każdego $a > 0$ jest $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} = +\infty$.)

[1] Długości: łamanych i krzywych określiliśmy korzystając z normy euklidesowej. Gdyby używać konsekwentnie jakiejś innej normy -np. "taksówkowej": $\|\vec{v}\|_1 := \sum |x_j|$, otrzymamy zupełnie analogiczny wzór na taką "nieeuklidesową długość" krzywej γ