6 Zastosowania całki oznaczonej-c.d.

Ostatnio wykazaliśmy twierdzenie o przyrostach mówiące, że gdy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ jest odwzorowaniem ciągłym (krzywą) i w przedziale otwartym istnieje pochodna: $\gamma'(t)$, to

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2 \leqslant (b - a) \sup_{t \in (a,b)} \|\gamma'(t)\|_2.$$

W tym celu użyliśmy Tw. Lagrange'a dla funkcji $\Phi(t) = \langle \gamma(t), w \rangle$ dla odpowiednio ustalonego wektora w o normie 1. Do pochodnej $\Phi'(t)$ równej iloczynowi skalarnemu $\langle \gamma'(t), w \rangle$ stosowaliśmy nierówność Schwarza: $|\langle u, w \rangle| \leqslant \|u\|_2 \|w\|_2$.

6.1 Długość łuku krzywej

Dowodząc woru $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$ dla krzywej klasy C^1 wystarczy wykazać, że gdy $L(t)$ oznacza długość początkowego fragmentu badanej krzywej -odpowiadającego zawężeniu $\gamma|_{[a,t]}$ odwzorowania γ do przedziału $[a, t]$, to jest to funkcja różniczkowalna i

$$L'(t) = \|\gamma'(t)\|_2.$$

Wtedy faktycznie, będzie $\ell(\gamma) = L(b) = L(a) + \int_a^b L'(t) \, dt$, co da nasz wzór, ponieważ $L(a) = 0$. Ponieważ funkcja L jest niemalejąca, ta pochodna, o ile istnieje, musi być nieujemna. Badamy iloraz różnicowy $\frac{L(t+h)-L(t)}{h}$. Tym razem dla $h < 0$ na tyle bliskich zeru, by $t + h \in (a, b]$.

Długość krzywej podzielonej na dwa kawałki jest sumą długości tych kawałków, co łatwo wykazać (ale dowód opuśćmy). Ponieważ tu $a < t + h < t$, więc $L(t) = L(t + h) + \ell(\gamma|_{[t+h,t]})$, w związku z tym $L(t + h) - L(t)$ jest pomnożoną przez (-1) długością krzywej $\gamma|_{[t+h,t]}$, zaś sam iloraz różnicowy jest jej długością podzieloną prez $|h|$, bo $\frac{1}{h} = \frac{-1}{|h|}$ i znaki "minus" się uproszczą. Długość każdej łamanej wpisanej w rozważaną krzywą o odpowiadającą podziałowi odcinka o końcach $\alpha = t + h, \beta = t$ punktami t_j, jest długości odcinków o końcach $\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)$. Zapisujemy ją jako $\sum_j \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2$. Każdy z tych składników, dzięki twierdzeniu o przyrostach można oszacować przez $(t_j - t_{j-1}) \sup_{s \in (t_{j-1}, t_j)} \|\gamma'(s)\|_2$, a tym bardziej jest on nie większy niż iloczyny $(t_j - t_{j-1})$ przez supremum po większym -za to wspólnym dla wszystkich j zbiorze $[\alpha, \beta]$. Ponieważ mamy tu $\sum_j (t_j - t_{j-1}) = \beta - \alpha = |h|$, więc długość każdej łamanej wpisanej nie przekracza wartości $|h| \sup_{s \in [t+h,h]} \|\gamma'(s)\|_2$, zaś po podzieleniu przez $|h|$ -cały iloraz różnicowy dla L jest mniejszy lub równy od $\sup_{s \in [t+h,h]} \|\gamma'(s)\|_2$. Dzięki założeniu o ciągłości γ' i dzięki ciągłości normy, przy $h \to 0^-$ te suprema zmierzają do $\|\gamma'(t)\|$. Aby skorzystać z twierdzenia o 3 granicach wystarczy jeszcze oszacowanie od dołu przez warość zmierzającą do $\|\gamma'(t)\|$ przy $h \to 0^-$. Ale to jest oszacowanie długości krzywej $\gamma|_{[\alpha,\beta]}$ przez długość cięciwy (odcinka o końcach $\gamma(\alpha), \gamma(\beta)$ -czyli norma różnicy. Iloraz różnicowy $\frac{L(t)-L(t+h)}{h}$ (znaki "minus" znikną z podobnych względów, jak w poprzednim oszacowaniu) jest więc większy lub równy od $\frac{1}{|h|} \|\gamma(x + h) - \gamma(x)\|_2 = \|\frac{1}{h}(\gamma(x + h) - \gamma(x))\|_2$, co dzięki ciągłości normy zmierza do $\|\gamma'(t)\|_2$ przy $h \to 0^-$. Przypadek $h > 0$ opisałem w notatkach do 5. wykładu. $\square$

Aby nie stresować osób nielubiących norm, przedstawię jeszcze bardziej bezpośredni dowód wzoru na długość krzywej.

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $d = 2$, zaś współrzędnymi naszej krzywej są funkcje $x(t), y(t)$ klasy C^1 w przedziale $[a, b]$. Chcemy wykazać, że

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt. \tag{1.6}$$

Rozważmy podział odcinka $[a,b]$ punktami $t_j, j \leqslant m$. Niech $\Delta_j(t) := t_j - t_{j-1}$ oznacza długość j-tego odcinka podziału. Odcinki łączące punkty $\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)$ mają długości $\sqrt{(\Delta_j x)^2 + (\Delta_j y)^2}$, gdzie $\Delta_j x := x(t_j) - x(t_{j-1})$ oraz $\Delta_j y := y(t_j) - y(t_{j-1})$ oznaczają przyrosty odpowiednich funkcji (współrzędnych γ). Twierdzenie Lagrange'a stosowane do każdego z tych przyrostów **(osobno!)** implikuje istnienie punktów pośrednich: $\alpha_j, \beta_j \in (t_{j-1}, t_j)$, dla których

$$\frac{\Delta_j x}{\Delta_j t} = x'(\alpha_j) \texttt{ oraz } \frac{\Delta_j y}{\Delta_j t} = y'(\beta_j).$$

Zapinując więc $\Delta_j x = x'(\alpha_j) \cdot \Delta_j t$ oraz $\Delta_j y = y'(\beta_j) \cdot \Delta_j t$ i wyciągając wspólny czynnik przed nawias (w kwadracie), a następnie (już be kwadratu) przed pierwiastek, możemy długość łamanej wpisanej w krzywą zapisać w postaci sumy

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j t \sqrt{(x'(\alpha_j))^2 + (y'(\beta_j))^2}.$$

Problem w tym, że sumy całkowe S_m dla całki (1.6) są troszeczkę inne- odpowiadają sytuacji, gdy $\forall_j\ \alpha_j = \beta_j$ (układ punktów pośrednich dla sumy całkowej Riemanna.) Wiemy, że jako funkcja ciągła, funkcja podcałkowa we wzorze (1.6) jest całkowalna i dla normalnych ciągów podziałów (o średnicach dążących do zera) sumy całkowe S_m zmierzają do całki (1.6). Aby więc zakończyć dowód, wystarczy "przesunąć punkty pośrednie", czyli wykazać, że różnica $S_m - \sigma_m$ zmierza do zera dla normalnych ciągów podziałów. Oczywiście, możemy korzystać z jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na przedziale domkniętym.

Oto detale tego fragmentu dowodu: Funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ nie spełnia, niestety, warunku Lipschitza, bo w żadnym sąsiedztwie zera jej pochodna nie jest ograniczona. Ale tu mamy do czynienia z funkcją trochę innej postaci: $x \mapsto \sqrt{c + x^2}$, gdzie $c \geqslant 0$ jest jakąś stałą -może nawet równą 0. Jej pochodna ma moduł $\frac{2|x|}{2\sqrt{c+x^2}} \leqslant 1$, bo mianownik jest $\geqslant 2\sqrt{x^2} = 2|x|$. Dzięki temu zachodzi warunek Lipschitza ze stałą 1. Teraz $|\alpha_j - \beta_j|$, jako $\leqslant \delta$, gdzie δ jest (dowolnie małą) średnicą podziału implikuje, dzięki ciągłości [jednostajnej!] funkcji $x'(t), y'(t)$, że dla δ dostatecznie małych (dobranych do zadanego $\epsilon > 0$) mamy $|x'(\alpha_j) - x'(\beta_j)| < \epsilon$. Wspomniany warunek Lipschitza ze stałą 1 daje wówczas nierówności

$$\left| \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2} - \sqrt{x'(\beta_j)^2 + y'(\beta_j)^2} \right| < \epsilon.$$

Moduł różnicy między $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\alpha_j)^2 + y'(\beta_j)^2}$ oraz $\sum_j \Delta_j t \sqrt{x'(\beta_j)^2 + y'(\beta_j)^2}$ szacujemy więc przez $\epsilon \cdot (b-a)$. Dla normalnych ciągów podziałów różnice te zmierzają więc do zera, a druga z sum -zmierza do całki Riemanna podanej w naszej tezie. $\Box$

Większa, niż 2 ilość zmiennych też nie stanowi problemu - możemy punkty pośrednie "wyrównywać krok po kroku" -czyli dla każdej pary zmiennych $k, k+1 \in \{1, 2, \dots d\}$ z osobna, zamieniając w końcu sumy otrzymane dzięki zastąpieniu $\Delta_j \gamma_k$ przez $\Delta_j t \cdot \gamma_k'(t_k, j)$, gdzie pochodne liczone są w pewnych (zależnych od k, j) punktach pośrednich $t_{k,j} \in (t_{j-1}, t_j)$.

W szczególności, długość linii wykresu dla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, czyli krzywej $\{(t, f(t)) : t \in [a,b]\}$, to liczba $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$.

6.2 Funkcje o wahaniu skończonym.

O normach wektorów będziemy jeszcze dość dużo mówić przy rachunku różniczkowym wielu zmiennych. Poniżej zdefiniujemy przestrzeń wektorową $BV[a,b]$, w której wektorami będą pewne funkcje $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, a normą będzie liczba $\|\gamma\|_{BV[a,b]} := \ell(\gamma) + |\gamma(a)|$. Odpowiemy zarazem na dość trudne pytanie: *" Jaka /czy każda/ funkcja* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ *da się zapisać w postaci różnicy dwu funkcji niemalejących?"*

Definicja Wahaniem całkowitym funkcji γ na przedziale $[a,b]$, oznaczanym $V_a^b(\gamma)$ nazwiemy wartość $\ell(\gamma)$, czyli kres górny po wszystkich podziałach $\mathcal{T} = (t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b)$ odcinka $[a,b]$ z sum modułów przyrostów tej funkkcji na odcinkach podziału, czyli

$$V_a^b(\gamma) := \sup_{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

(Jest to długość "krzywej γ" - choć jej obraz geometryczny wcale nie jest zakrzywiony - to odcinek postaci $[m, M] \subset \mathbb{R}$.) Przestrzeń funkcji o wahaniu ograniczonym (ang. "*bounded variation*"), to zbiór

$$BV[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \; V_a^b(f) < +\infty\} \quad \texttt{z normą} \quad \|f\|_{BV[a,b]} := |f(a)| + V_a^b(f).$$

Sprawdzenie, że BV jest przestrzenią wektorową oraz że to jest norma - pozostawmy jako ćwiczenie. Dodanie modułu z $f(a)$ jest tu potrzebne, bo dla funkcji stałej $f(t) = c$ mamy zawsze wahanie zerowe, nawet gdy $c \neq 0$. Dla "trywialnego podziału" złożonego z tylko 2 punktów: $t_0 = a, t_1 = b$, czyli gdy $n = 1$ mamy, rzecz jasna, nierówność, którą nawiemy "przyrost $\leqslant$ wahanie":

$$|f(b) - f(a)| \leqslant V_a^b(f).$$

Nota bene, jest ona równością gdy f jest monotoniczna. Stąd i z nierówności trójkąta, jaką nietrudno tu uzyskać wynika, że różnica dwu funkcji monotonicznych ma wahanie skończone. Okazuje się, że i na odwrót:

Twierdzenie Jordana. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest różnicą $f = f_1 - f_2$ dwu funkcji niemalejących wtedy i tylko wtedy, gdy ma wahanie skończone. Ponadto wówczas można przyjąć

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(V_a^x(f) + f(x)), \;\; f_2(x) = \frac{1}{2}(V_a^x(f) - f(x)).$$

Dowód: Równość $f = f_1 - f_2$ jest oczywista dla takich f_2, f_1, pozostaje wykazać monotoniczność. W tym celu należy zauważyć najpierw, że analogicznie, jak całka Riemanna, wahanie jest zależne w sposób addytywny od przedziału: gdy $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, to $V_a^\alpha(f) + V_\alpha^\beta(f) = V_a^\beta(f)$ (= proste ćwiczenie). Wykażemy np., że f_2 jest niemalejąca. Dla α, β jak wyżej -należy sprawdzić, czy $2f_2(\beta) - 2f_2(\alpha) \geqslant 0$. Dzięki addytywnej zależności od przedziału, ta różnica, to $V_\alpha^\beta(f) - (f(\beta) - f(\alpha))$, co jak zauważyliśmy ("przyrost $\leqslant$ wahanie") jest faktycznie liczbą nieujemną. Tak samo dowodzimy monotoniczności f_1.

Przypomnijmy: mówimy, że krzywa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ jest prostowalna, gdy ma skończoną długość: $\ell(\gamma) < +\infty$. Zauważmy, że gdy $d = 1$, to ostatni warunek oznacza, że $\gamma \in BV[a,b]$. Natowiast w sytuacji wielowymiarowej ($d > 1$) mamy następujące kryterium:

Twierdzenie. Krzywa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ o współrzędnych $(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_d(t))$ jest prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej współrzędne mają wahanie ograniczone. Ponadto

$$\forall_{k \leqslant d} \; V_a^b(\gamma_k) \leqslant \ell(\gamma) \leqslant V_a^b(\gamma_1) + \ldots + V_a^b(\gamma_d.)$$

Faktycznie, każdy wektor łamanej, np. $V = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$ spełnia nierówności: $|\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1})| \leqslant \|V\| \leqslant \sum_{m=1}^{d} |\gamma_m(t_j) - \gamma_m(t_{j-1})|$. Sumując po $j \in \{1, \ldots n\}$ i przechodząc do kresów górnych względem podziałów $(t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b)$ odcinka $[a,b]$ otrzymujemy naszą tezę, gdyż kresami tymi są odpowiednio: wahania $V_a^b(\gamma_k)$, $\ell(\gamma)$ oraz suma odpowiednich wahań. $\square$

Przykładem krzywej nieprostowalnej jest wykres funkcji $y(x) = x \cos \frac{1}{x}, x \in (0, 1]$, przedłużonej (przez podanie wartości 0 w punkcie zero) do funkcji ciągłej w $[0, 1]$. Tu więc $\gamma(x) = (x, x \cos \frac{1}{x})$ dla $0 < x \leqslant 1$. Wystarczy wykazać, że druga współrzędna (czyli $y(x)$) nie ma wahania skończonego. Dla $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$\cos(k\pi) = (-1)^k$, więc biorąc jako punkty podziału (wymienione w malejącej kolejnosści) punkty $t_k = \frac{1}{k\pi}$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant M$, otrzymamy $y(t_k) = (-1)^k t_k$, moduły przyrostów są równe $\frac{1}{2j} + \frac{1}{2j-1}$ dla k parzystych i tworzą sumy częściowe szeregu harmonicznego, nieograniczone gdy $M \to \infty$. A każda z takich sum jest mniejsza od wahania funkcji $y(\cdot)$.

Uwaga: ze względu na obecność pierwiastka we wzorze- często otrzymujemy całki z funkcji niewymiernych. Na przykład, dla elipsy

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), \quad a, b > 0, a > b, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

otrzymamy nieelementarną całkę eliptyczną: przyjmując $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$, stosując jedynkę trygonometryczną, przekształcamy wzór na długość do postaci: $\ell(\gamma) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt$. Nie ma tu elementarnie wyrażalnej funkcji pierwotnej gdy mimośród $(= \varepsilon)$ jest > 0.

Dla paraboli $2py = x^2, 0 < x < b$, otrzymamy

$$\ell = \frac{1}{p}\int_0^b \sqrt{x^2 + p^2}\, dx = \frac{1}{2p} b\sqrt{b^2 + p^2} + \frac{p}{2}\ln(b + \sqrt{b^2 + p^2}).$$

Dla linii łańcuchowej $y = a\cosh\frac{x}{a}$ oraz dla asteroidy $\gamma(t) = (a^3\cos^3 t, a^3\sin^3 t)$, gdzie $0 < t < 2\pi$ wyliczenia (i ładne ilustracje graficzne) znajdziecie Państwo np. na stronie
https:epodreczniki.open.agh.edu.plopenagh-podreczniki_
view.php?mode=view&categId=4&handbookId=53&moduleId=560
(Adres nie zmieścił się w 1 linii, po znaku podkreślenia nie powinno bycć spacji.)

6.3 Objętość bryły obrotowej

Wspominaliśmy już o wzorze na pole trapezu krzywoliniowego. Całka może służyć też do mierzenia objętości brył obrotowych.

Obrót w $\mathbb{R}^3$ wykresu funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ dookoła osi $0X$ tworzy zbiór

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leqslant (f(x))^2\}.$$

Przekrojami tej bryły płaszczyznami $\{(x, y, z) : x = x_0\}$ równoległymi do $0YZ$ są koła o środku w zerze, promieniu $f^2(x_0)$. Przybliżenia z niedomiarem objętości Ω (oznaczanej tu symbolem $|\Omega|$) otrzymamy sumując objętości walców

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [t_{j-1}, t_j], y^2 + z^2 \leqslant m_j^2\},$$

czyli sumując liczby $\Delta_j t\pi m_j^2$, gdzie m_j są, jak w przypadku obliczeń dla trapezów krzywoliniowych, wartościami najmniejszymi f na przedziałach $[t_{j-1}, t_j]$ (kresami dolnymi w przypadku f nieciągłej). Przybliżenia z nadmiarem otrzymamy biorąc walce opisane na j-tych fragmentach zbioru Ω. Ich sumy objętości dają po przejściu do odpowiednich kresów całkę dolną (odp. górną) z funkcji $\pi(f(x))^2$. Stąd wynika, że w przypadku $f \in R[a, b]$ mamy

$$|\Omega| = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

6.4 Pole powierzchni obrotowej

Powierzchnię obrotową

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = (f(x))^2\}$$

przybliżamy odcinkami powierzchni bocznej stożka, otrzymując wzór

$$|S| = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(ten fragment będzie rozwinięty)