7 Dalsze zastosowania całki.

7.1 Obszary ograniczone krzywymi -c.d.

Układ współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie przypisuje punktowi $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ parę (r, ϕ), gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest odległością P od początku układu O, zaś $\phi \in [0, 2\pi)$ oznacza miarę łukową kąta $\phi(P)$, jaki tworzy odcinek $\overline{OP}$ z osią OX. Tak więc $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Funkcja "długości promienia wodzącego": $R : [\alpha, \beta] \ni \phi \to R(\phi) \in \mathbb{R}_+$ określa więc krzywą. Jest to krzywa o równaniu

$$\gamma(\phi) = (R(\phi)\cos\phi, R(\phi)\sin\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \tag{1.7}$$

parametrem jest tu kąt ϕ. Pozwala to na wyliczenie długości tej krzywej opisanej we współrzędnych biegunowych przez funkcję $R(\phi)$ ze wzoru zawierającego całkę z $\|\gamma'(\phi)\|$. Po uproszczeniach wynikłych z jedynki trygonometrycznej,

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2(\phi) + (R')^2(\phi)}\, d\phi. \tag{2.7}$$

Zbiór punktów P, dla których $\phi(P) \in [\alpha, \beta]$ nazwiemy sektorem kątowym wyznaczonym przez parę α, β.

Lemat Krzywa (1.7) wraz z ramionami tego kąta (czyli z brzegiem sektora kątowego) ogranicza obszar

$$\Omega = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) : \phi \in [\alpha, \beta], 0 \leqslant r \leqslant R(\phi)\} \quad \texttt{o polu} \quad \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\phi)\, d\phi. \tag{3.7}$$

Dowód. Pole wycinka koła o kącie ψ i promieniu R wynosi $\frac{1}{2}\psi R^2$ (np. dla kąta pełnego $\psi = 2\pi$ pole koła, to πR^2). Jeśli zdefiniujemy dla podziału odcinka $[\alpha, \beta]$ punktami $\tau_0 = \alpha < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \beta$ jako wartości m_j, M_j -kresy: dolne (odp. górne) z wartości $R(\phi)$, $\phi \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$, to powstałe wycinki kół o promieniach m_j, odpowiadające $\phi \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ są zawarte w Ω i ich suma pól, to suma dolna dla całki ze wzoru (3.7), podczas gdy suma analogicznych wycinków o promieniach M_j zawiera zbiór Ω i ma miarę będącą sumą górną dla całki z (3.7). Jeśli funkcja $R(\cdot)$ jest całkowalna na przedziale $[\alpha, \beta]$, to te sumy (zarówno dolne, jak i górne) zmierzają do całki z (3.7) przy średnicach podziałów zmierzających do zera. $\square$

7.2 Miara powierzchni obrotowej

Powierzchnia obrotowa, to powierzchnia 2-wymiarowa (nazwijmy ją S) -zawarta w $\mathbb{R}^3$, ale na ogół zakrzywiona - nie można jej poskładać z fragmentów płaszczyzn i posumować ich miary Jordana. Nie mamy tu niestety odpowiednika łamanej wpisanej w krzywą, nasuwający się pomysł wpisywania trójkątów nie jest dobry. Przybliżanie np. pola powierzchni bocznej S walca przez sumy pól trójkątów których wierzchołki leżą na powierzchni S, a każde 2 sąsiednie mają wspólny bok -prowadzi do dowolnie dużych wartości sum pól takich trójkątów. To dało by, jak zauważył H. Schwarz, absurdalną wartość $|S| = +\infty$.[1]

Odpowiednim podejściem jest dopiero metoda zastępowania małych fragmentów powierzchni S przez ich rzuty na płaszczyzny styczne, co wymaga użycia rachunku różniczkowego wielu zmiennych i będzie przedstawione w następnym semestrze tego kursu (ale jest skuteczne dla wszystkich powierzchni gładkich opisanych funkcjami klasy C^1, niekoniecznie obrotowych). Wykażemy wtedy, że stosowana poniżej
metoda przybliżenia powierzchni obrotowej fragmentami powierzchni stożków
jest właściwa. Fragmenty obracanej krzywej płaskiej γ zastępujemy tu przez odcinki łamanej wpisanej w krzywą. Obrót każdego z tych odcinków zatacza powierzchnię boczną odcinka stożka.

[1]Hermann Amadeus Schwarz (1843-1921) -matematyk niemiecki, jego przykład jest przedstawiony w 3. tomie "Rachunku Różniczkowego i Całkowego" Fichtencholza (§2 rozdz. XVII)

Dokładniej, mamy $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ oraz oś obrotu L , to oś OX (lub odpowiednio OY). Oznaczmy przez $\delta(t)$ odległość punktu $\gamma(t)$ od osi L. Np. gdy $L = OX$, to

$$S = \{(x, y, z) : t \in [a, b], x = x(t), y^2 + z^2 = y(t)^2\}, \quad \delta(t) = |y(t)|.$$

w przypadku obrotu wokół osi OY mamy $\delta(t) = |x(t)|$, zaś

$$S = \{(x, y, z) : t \in [a, b], y = y(t), x^2 + z^2 = x(t)^2\}.$$

Jak to działa np. dla sfery (= brzeg kuli) o promieniu 1? -dzielimy ją na cieniutkie *pasy ograniczone przez równoleżniki* i pola tych pasów sferycznych przybliżamy przez ich obwód razy szerokość pasa (tu długość małego łuku południka zastąpimy długością cięciwy. (Obwód równoleżnika blisko równika to prawie 2π, dokładniej -możemy brać średnią długości tych równoleżników.) Otrzymamy sumy dążące do $4\pi \approx 12,56$, CZYLI PRAWIDŁOWO, bo R=1.

Ale gdzie robimy błąd stosując podobne podziały- tylko na *paski między południkami* -otrzymując wąskie, a długie trójkąty sferyczne? Ich pola przybliżamy (są wąskie, więc "można je rozprasować na płasko") przez "$\frac{1}{2}$ razy wysokość razy długość podstawy". Suma długości podstaw, to (w granicy) 2π, wysokość każdego z dwu (północnego i południowego) trójkątów, to $\frac{\pi}{2}$. Otrzymamy bardzo błędny wynik przybliżenia pola sfery jednostkowej przez $\pi^2 \approx 9,86$. Podobne rozumowanie z dzieleniem pola koła w $\mathbb{R}^2$ na wąskie trójkąty o sumie podstaw przybliżających $2\pi R$ i wysokościach przybliżających R działało poprawnie -ale wtedy mogliśmy porównać powstały z sumy tych trójkątów wielokąt wpisany w koło z wielokątem opisanym - różnica ich pól zmierza do zera (np. dowód w 1. tomie książki Fichtencholza). wygląda na to, że błąd wynika z traktowania trójkąta sferycznego w taki sam sposób, jak płaskiego (problem stanowi więc jego "rozprasowanie").

Tak więc- nie mając formalnej definicji, uwierzmy na razie, że tak jest, że granica sumy pól odcinków powierzchni bocznych stożków, to nasze $|S|$. Teraz możemy zinterpretować te sumy pól jako sumy całkowe dla całki wyrażającej pole : $|S|$ tej powierzchni wzorem:

$$|S| = 2\pi \int_a^b \delta(t) d\ell(t), \quad \texttt{gdzie} \quad d\ell(t) = \|\gamma'(t)\|\, dt,\ \delta(t) = \operatorname{dist}(\gamma(t), L) \quad (4.7)$$

co da wartość $|S|$, jeśli $\delta(t)$ oznacza odległość punktu $\gamma(t)$ od osi obrotu, $d\ell(t) = \|\gamma'(t)\|\, dt$ oznacza różniczkę ("element") długości łuku krzywej. Gdy obracamy krzywą o równaniu $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ wokół OX, to $\delta(t) = |y(t)|$, zaś przy obrocie względem OY należy wstawić $\delta(t) = |x(t)|$ i dostajemy dwa dość podobne wzory. Często spotykamy w podręcznikach takie wzory bez modułów, ale wtedy przyjmuje się założenie o nieujemności funkcji $y(t)$ (odp. $x(t)$).

Na przykład, gdy krzywa $\gamma(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ jest wykresem funkcji nieujemnej $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, to obrót wokół osi OX tego wykresu f daje powierzchnię S o polu

$$|S| = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

zaś gdy obrót jest wokół OY oraz $0 \leqslant a < b$, to

$$|S| = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Uzasadnienie tych wzorów -już przy założeniu, że $|S|$ można przybliżyć sumą wspomnianych odcinków stożków jest następujące: Przyjmijmy, że obracamy krzywą $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ klasy C^1 wokół OX. Odcinek łamanej wpisanej o końcach $\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)$ po obrocie wokół OX zatoczy powierzchnię boczną stożka ściętego (lub walca). Łatwo ją zmierzyć rozprostowując ją (po rozcięciu) na płaszczyźnie, co da wycinek z pierścienia kołowego (lub po rozprostowaniu walca- gdy $y_{j-1} := y(t_{j-1}) = y(t_j)$ otrzymamy łatwy do zmierzenia prostokąt). Rozważmy np.przypadek $0 \leqslant y_{j-1} < y_j$. Dla uproszczenia oznaczeń ustalmy jeden taki odcinek i pomińmy na chwilę indeks j. Promieniem wewnętrznym $r := r_{j-1}$ tego pierścienia będzie odległość od punktu przecięcia OX z prostą zawierającą nasz odcinek łamanej do bliższego z końców odcinka -tu jest nim y_{j-1}. Proszę to sobie rozrysować (= ćwiczenie).

Podobnie znajdziemy promień zewnętrzny R. Pole całego pierścienia, to $\pi(R^2 - r^2)$, ale po rozwinięciu stożka otrzymamy tylko jego wycinek. Proporcja pól będzie taka, jak proporcja pełnego obwodu koła zewnętrznego: $2\pi R$ do długości łuku zatoczonego przez dalszy od osi obrotu punkt- czyli do $2\pi y_j$. Pole naszego fragmentu wynosi więc $\pi \frac{y_j}{R}(R + r)(R - r)$. Przyblieniem dla $|S|$ będzie suma takich składników, gdzie $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zależne od j ułamki $\frac{R+r}{R}$ zmierzają (niezależnie od j) do 2. (Faktycznie funkcje klasy C^1 na przedziale domkniętym mają pochodne ograniczone -więc spełniają watunek Lipschitza. Stąd przyrosty $y_j - y_{j-1}$ oraz różnice $1 - \frac{R_j + r_j}{2R_j}$ są ograniczone przez wspólną dla wszystkich j stałą razy średnica podziału ($t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$) odcinka $[a, b]$ wyznaczającego wierzchołki naszej łamanej wpisanej w γ.) Ta niezależność od j pozwala na zastąpienie (przy liczeniu granicy dla normalnego ciągu podziałów) sum pól wycinków przez $2\pi \sum_{j=1}^{n} y_j (R_j - r_j)$. Natomiast różnice $R_j - r_j$ to dokładnie długości j-tych odcinków łamanej, czyli cięciw dla γ. Ich długości możemy zastąpić przez długości łuków krzywej -a te, wiedząc już o postaci różniczki długości krzywej- przez $\|\gamma'(\lambda_j)\|(t_j - t_{j-1})$ dla pewnego układu punktów pośrednich $\lambda_j \in (t_{j-1}, t_j)$. Dokładniej, niech $G(s)$ oznacza długość krzywej $\gamma|_{[a,s]}$ (odpowiadającej punktom $\gamma(t), a \leqslant t \leqslant s$). Jak już wiemy, $G'(t) = \|\gamma'(t)\|$, zaś $R_j - r_j$ przybliżamy przez $G(t_j) - G(t_{j-1})$. Przybliżeniami pola $|S|$ są sumy postaci

$$\sum_{j=1}^{n} y(t_j)(G(t_j) - G(t_{j-1})). \tag{5.7}$$

Ostatecznie $|S|$ jest więc granicą ciągu sum

$$2\pi \sum_{j=1}^{n} y_j \|\gamma'(\lambda_j)\|(t_j - t_{j-1}).$$

A są to sumy całkowe dla całki występującej we wzorze (4.7).

Dla przykładu rozpatrzmy okrąg $x = 2 + \cos t, y = \sin t, |t| < \pi$. Półobrót dookoła OX nałoży górny półokrąg na dolny, wiec w tym przypadku należy obracać półokręgiem, czyli biorąc $t \in [0, \pi]$. Tu $R = 1$, zaś $d\ell(t) = dt$, powierzchnia tej sfery więc równa więc będzie całce

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin t d\ell(t) = 2\pi[-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi.$$

Dla sfery o promieniu R mielibyśmy $d\ell(t) = Rt$, zaś $\int R \sin t \, dt = -R \cos t + C$ i otrzymamy pole $4\pi R^2$.

Obrót okręgu $(2 + \cos t, \sin t)$ dookoła OY daje torus, dla którego trajektoria środka obracającego się koła ma promień 2. Otrzymamy tym razem $|S| = 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \cos t) \, d\ell(t) = 8\pi^2$. Drugi składnik pod całką, czyli $\cos t$ ma zerową całkę, gdyż funkcja pierwotna jest tu okresowa.

Niektóre krzywe wygodnie jest zapisywać we współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie poprzez podanie kąta i promienia wodzącego jako funkcji kąta, czyli w postaci $\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)$, $\phi \in [\alpha, \beta]$. Wtedy mówimy też, że ta krzywa ma we współrzędnych biegunowych równanie $r(\phi)$. Natomiast $d\ell(\phi) = \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2} \, d\phi$, co wyliczyliśmy we wzorze (2.7). Przy mierzeniu pól powierzchni obrotowych należy to uwzględnić.

Na przykład, dla ustalonego $\rho > 0$ równanie $r(\phi) = \rho$, $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$ daje łuk ($\frac{1}{8}$ okręgu) o promieniu ρ, różniczce $d\ell(\phi) = \sqrt{\rho^2 + 0} d\phi = \rho \, d\phi$ i obrót wokół OX da pas sfery o polu $2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \sin \phi \, d\ell(\phi) = 2\pi\rho^2[-\cos \phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\pi\rho^2$.

7.3 Całka Riemanna-Stieltjesa

Sumy postaci (5.7) są to tzw. *sumy całkowe Stjeltjesa*[2], zaś ich granica przy normalnych ciągach podziałów istnieje dla każdej funkcji ciągłej $y(t)$, o ile G ma wahanie skończone i nazywa się całką Stjeltjesa z tej funkcji, oznaczaną

$$\int_a^b y(t)dG(t).$$

Zakładamy tu, że y jest funkcją ciągłą w $[a,b]$, więc z jednostajnej ciągłości można tu zamieniać $y(t_j)$ na wartości $y(\lambda_j)$ w jakichś punktach pośrednich $\lambda_j \in [t_{j-1},t_j]$ -nie zmieniając wartości granicy, co już wiemy w przypadku całki Riemanna. Oczywiście, całka Riemanna jest szczególnym przypadkiem całki Stieltjesa -odpowiada ona funkcji $G(t)=t$.

Gdy G jest klasy C^1, to ta całka Stjeltjesa jest całką Riemanna postaci $\int_a^b y(t)G'(t)\,dt$, zgodnie zresztą z zapisem różniczki: $dG(t)=G'(t)\,dt$. Aby to zauważyć wystarczy najpierw zastosować Twerdzenie Lagrange'a o wartości średniej do przyrostów $G(t_j)-G(t_{j-1})$, a następnie "przesunąć punkty pośrednie" korzystając z jednostajnej ciągłości funkcji G'. Dla nieciągłych funkcji $G \in BV[a,b]$ symbol dG na końcu całki Stjeltjesa ma już całkiem inny sens.

Okaże się np. (za parę semestrów), że każde odwzorowanie liniowe $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ (czyli tzw, funkcjonał liniowy) na przestrzeni funkcji ciągłych, spełniający "warunek ciągłości": $|\Phi(f)| \leqslant M \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$ jest postaci $\Phi(f)=\int_a^b f\,dG$ dla pewnej $G \in BV[a,b]$ takiej, że $V_a^b(G) \leqslant M$.

Proszę sprawdzić, że gdy G jest funkcją charakterystyczną przedziału $[s,b]$, $a < s < b$, zaś $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to $\int_a^b f(t)d\chi_{[s,b]}(t)=f(s)$. Jest to więc reprezenacja całkowa funkcjonału δ_s "delta Diraca w punkcie s", przypisującego funkcji f wartość $f(s)=\delta_s(f)$ w tym (ustalonym) punkcie s. Jak łatwo zauważyć, nie ma takiej funkcji całkowalnej $g \in R[a,b]$ dla której zachodziły by równości $f(s)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ dla wszystkich $f \in C[a,b]$.

Jeśli ψ jest funkcją ciągłą określoną w punktach $\gamma(t), t \in [a,b]$ danej krzywej, to dla funkcji $L(x) := \ell(\gamma|_{[a,b]})$ całkę Stieltjesa $\int_a^b \psi(\gamma(t))dL(t)$ zapisuje się zazwyczaj jako $\int_\gamma \psi d\ell$ i nazywa się całką krzywoliniową nieskierowaną wzdłuż krzywej γ z funkcji ψ. Taka całka jest granicą sum (odpowiadającym punktom podziału odcinka $[a,b]$) postaci

$$\sum_{j=1}^{n} \psi(\gamma(t_j))\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\|.$$

W fizyce taka całka wyraża masę niejednorodnej krzywej materialnej, mającej (mierzoną np. w gramach na mm długości) gęstość liniową równą $\psi(t)$.

Obecnie możemy uzasadnić wzór na pole trapezu krzywoliniowego w przypadku krzywej zadanej parametrycznie:

Twierdzenie. Jeżeli $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$ jest krzywą, której współrzędna $x(\cdot)$ jest funkcją monotoniczną klasy C^1, to pole figury ograniczonej osią OX, prostymi $x=x(a), x=x(b)$ oraz obrazem krzywej γ wynosi

$$\int_a^b |y(t)x'(t)|\,dt. \tag{6.7}$$

Dowód. Tu pole fragmentu, gdzie $y(t)<0$ wliczamy ze znakiem "plus". Więc dzieląc trapez na fragmenty, w których znak $y(t)$ jest stały i korzystając z symetrii wzgl. OX, możemy przyjąć, że funkcja podcałkowa jest nieujemna. Pola "maksymalnych prostokątów mieszczących się pod wykresem γ, a nad osią OX" wynoszą $m_j(x(t_j)-x(t_{j-1}))$ - w przypadku poprzednio rozważanego wykresu $y=y(x)$ - to było $m_j(t_j-t_{j-1})$, gdzie w obu przypadkach $m_j=\min\{y(t) : t \in [t_{j-1},t_j]\}$. Te wartości m_j są równe $y(\lambda_j)$ dla pewnych $\lambda_j \in [t_{j-1},t_j]$. Otrzymujemy więc sumę całkową dla całki Stieltjesa $\int_a^b y(t)\,dx(t)$, która jest dla $x \in C^1[a,b]$ równa całce $\int_a^b y(t)x'(t)\,dt$. (Innego uzasadnienia tego twierdzenia dostarcza wzór Greena, który poznamy w następnym semestrze.)

[2]Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894) matematyk holenderski