8 Nierówności całkowe

Mówimy, że liczby dodatnie p, q stanowią parę wykładników (harmonicznie) sprzężonych, gdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Oczywiście, wynika stąd, że $p, q > 1$ oraz $pq = p + g$ Jedynym wykładnikiem sprzężonym do samego siebie jest $p = 2$. Gdy $1 < p < 2$, to $q > 2$. Zauważmy ponadto, że $(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 1$, więc funkcje potęgowe:

$$\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^{p-1} \in \mathbb{R}_+ \texttt{ oraz } \mathbb{R}_+ \ni y \mapsto x^{q-1} \in \mathbb{R}_+$$

są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami, można użyć dla ich przedstawienia tej samej krzywej γ, zamieniając jedynie rolami osie układu współrzędnych. Ustalmy dowolne dwie liczby dodatnie: $a, b \in (0, +\infty)$ i parę sprzężonych wykładników p, q. Jeśli $b = a^{p-1}$, to $a = b^{q-1}$ i sumą trapezów krzywoliniowych $T_x := \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1}\}$ oraz $T_y := \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant y^{q-1}\}$ jest prostokąt $[0, a] \times [0, b]$ o polu równym ab. Gdy $0 < b < a^{p-1}$, to taka suma $T_x \cup T_y$ pokrywa taki prostokąt, ale jest od niego większa o wystający "róg": $\{(x, y) : b^{q-1} \leqslant x \leqslant a, b < y < x^{p-1}\} \subset T_x$, więc suma pól tych dwu trapezów krzywoliniowych jest wtedy większa od ab. Taka sama ostra nierówność ma miejsce, gdy $b > a^{p-1}$, tyle, że wówczas to fragment T_y wystaje poza ten prostokąt. Ponieważ pola trapezów krywoliniowych T_x, T_y wynoszą odpowiednio $\int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}$ oraz $\int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}$, wykazaliśmy następującą nierówność:

Twierdzenie 1. (Nierówność Younga[1]): Gdy $a, b > 0$, $p, q > 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.8}$$

Powyższy dowód stosuje się też do ogólniejszej tezy, którą wykazał Young: Gdy f jest rosnącą bijekcją $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f(0) = 0$, to dla bijekcji odwrotnej f^{-1} zachodzi nierówność

$$ab \leqslant \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(s)\,ds.$$

Wykorzystamy twierdzenie 1. w dowodzie jednej z najważniejszych nierówności całkowych. Najpierw jednak zdefiniujmy normę całkową z wykładnikiem $p \geqslant 1$ (wcześniej poznaliśmy ją w przypadk $p = 1$ oraz $p = 2$. Dla $f \in R[a, b]$ niech

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jedynie warunek jednorodności jest łatwą konsekwencją liniowości całki:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p \quad \texttt{gdy } \alpha \in \mathbb{C},\ f \in R[a, b]. \tag{2.8}$$

Pozostawmy to jako "mini-ćwiczenie". Sprawdzanie nierówności trójkąta nie jest takie proste i najpierw musimy sformułować inną nierówność całkową. Dokładniej, trzeba tu zaznaczyć, że $\|\cdot\|_p$ jest to norma tylko na przestrzeni $C[a, b]$, bo dla funkcji $f \in R[a, b]$ równych zero poza skończoną liczbą punktów, (lub jak w przypadku funkcji Riemanna poza zbiorem miary zero) całka z $|f(t)|^p$ będzie zerem. Tę trudność omija się zastępując funkcje przez ich klasy równoważności modulo relacja równości poza zbiorem miary zero, nazywanej *równością prawie wszędzie*. Do dowodu nierówności trójkąta (zwanej w przypadku norm całkowych $\|\cdot\|_p$ nierównością Minkowskiego) potrzebna będzie następująca nierówność całkowa:

Twierdzenie 2. (Nierówność Höldera[2]): $f, g \in R[a, b]$ oraz dla pary wykładników p, q harmonicznie sprzężonych mamy

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.8}$$

[1] William Henry Young (1863-1942) matematyk brytyjski
[2] Ludwig Otto Hölder (1859-1937) matematyk niemiecki

Dowód. Gdy $p = 2$ jest to nierówność Schwarza (4.5) wykazana w 5. wykładzie, tu uzyskamy ją w inny sposób. Dla dowodu scałkujmy stronami nierówność Younga (1.8) stosowaną dla $a = |f(x)|, b = |g(x)|$, otrzymując nierówności:

$$|\int_a^b f(x)g(x)\,dx| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,dx. \quad (4.8)$$

Zbadajmy najpierw przypadek, gdy $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$. Obydwie całki występujące po prawej stronie są wtedy równe 1, więc prawa strona będzie w tym przypadku równa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i wówczs nasza nierówność zachodzi.

Gdy obydwie wartości: $c_1 := \|f\|_p$ oraz $c_2 = \|g\|_q$ są niezerowe (więc dodatnie), to zastępując f przez $F := \frac{1}{c_1}f$ oraz g przez $G := \frac{1}{c_2}g$ sprowadzimy dowód do poprzedniego przypadku, gdyż dzięki warunkowi jednorodności (2.8) mamy $\|F\|_p = \|G\|_q = 1$. Otrzymana nierówność $\int_a^b |FG|\,dx \leqslant 1$ po pomnożeniu stronami przez c_1c_2 daje, rzeczywiście, dowodzoną tezę.

Trudność polega na tym, że w przypadku f, g całkowalnych, ale nieciągłych, może się zdarzyć, że $\|f\|_p = 0$ lub $\|g\|_q = 0$, chociaż te funkcje nie muszą przy tym być identycznie równe zero. Jesteśmy jednak w stanie wykazać, że z zerowania się którejś z tych norm (czyli prawej strony nierówności (3.8)) wynika zerowanie się całki $\int_a^b fg\,dx$. Przypuśćmy np., że $\|g\|_q = 0$. Wtedy $\forall n \in \mathbb{N}$ również $\|ng\|_q = 0$ i z udowodnionej nierówności (4.8) wynika ograniczenie dla ciągu $n|\int_a^b fg\,dx| = |\int_a^b f(x)(ng(x))\,dx|$ przez niezależną od n wartość $\frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,dx + 0$. Wynika stąd, że $\int_a^b fg\,dx = 0$. $\square$

Używając teorii miary można dość łatwo wykazać, że $\|f\|_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ prawie wszędzie tzn. gdy zbiór $\{x : f(x) \neq 0\}$ ma miarę Lebesgue'a zero. Stąd można też wywnioskować, że $\int_a^b fg\,dx = 0$ (i tak to się robi na gruncie ogólniejszej całki Lebesgue'a), ale nasz dowód jest bardziej bezpośredni i nie korzysta z teorii całki Lebesgue'a[3].

W końcu możemy udowodnić nierówność trójkąta dla normy całkowej $\|\cdot\|_p$.

Twierdzenie 3. (Nierówność Minkowskiego) Dla $f, g \in R[a, b]$, $p \geqslant 1$ mamy

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \quad (5.8)$$

Przypadek $p = 1$ był rozstrzygnięty powyżej. Dla $p > 1$ niech q będzie wykładnikiem harmonicznie sprzężonym. Zauważmy, że z "uproszczonej arytmetki" (w której $pq = p + q$) wynika wtedy równość

$$(p - 1)q = pq - q = p + q - q = p.$$

Podnosząc wyrażenie z lewej strony do p-tej potęgi mamy

$$\|f + g\|_p^p = \int_a^b |f + g||f + g|^{p-1}\,dx \leqslant \int_a^b |f||f + g|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g||f + g|^{p-1}\,dx$$

Pierwszy ze składników ostatniej sumy szacujemy z nierówności Höldera przez $\|f\|_p\|h\|_q$, gdzie $h(x) := |f(x) + g(x)|^{p-1}$. Stąd

$$\|h\|_q = (\int_a^b |f + g|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} = (\int_a^b |f + g|^p)^{\frac{1}{q}} = \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Szacując podobnie drugi składnik i wyciągając $\|h\|_q$ przed nawias, otrzymamy więc nierówność $\|f + g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$. Przenosząc na lewą stronę ostatni czynnik widzimy że $\|f + g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. Ponieważ $p - \frac{p}{q} = \frac{pq-p}{q} = \frac{p+q-p}{q} = 1$, dowód jest zakończony.$\square$

[3] Zarówno teoria całki Lebesgue'a jak i omawiane w tym wykładzie nierówności zostały utworzone na potrzeby badania szeregów Fouriera, którymi zajmiemy się pod koniec tego semestru. Young opracował niezależne od Lebesgue'a i jak się później okazało, równoważne pojęcie całki dla dość ogólnej klasy funkcji.

Jeszcze zauważmy, że w dowodzie Twierdzenia 2 stosowaliśmy całkowanie nierówności Younga stronami. Sumując stronami, otrzymamy analogiczną nierówność Höldera dla sum (d składników) lub dla szeregów -gdy $d = \infty$):

$$\left|\sum_{n=1}^{d} x_n y_n\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{d} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{d} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Następnie -zamieniając całki na sumy w dowodzie nierówności Minkowskiego -otrzymamy nierówności trójkąta dla norm w $\mathbb{R}^d$ postaci

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_d)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{d} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Gdy $d = +\infty$, mamy do czynienia z ciągami i aby takie normy $\|\cdot\|_p$ były skończone, trzeba ograniczyć się do przestrzeni ciągowej

$$\ell^p := \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty\}.$$

Przypomnijmy, że w przestrzeni wektorowej unormowanej określamy odległość dwu wektorów u, v jako normę ich różnicy: $\|u - v\|$. Mówimy, że wektor v jest granicą ciągu wektorów $w_n \in X$ (przy $n \to \infty$), co zapisujemy symbolem $v = \lim v_n$ lub $v_n \to v$, gdy ciąg liczbowy $\|v_n - v\|$ zmierza do zera.
Wówczas też (z "drugiej nierówności trójkąta") wynika, że również $\|v_n\| \to \|v\|$.

Dla ciągów wektorów można tak samo, jak dla ciągów liczb udowodnić:
twierdzenie o jednoznaczności granicy ,
twierdzenie o ograniczoności ciągów zbieżnych,
twierdzenie o granicy sumy oraz
twierdzenie o granicy podciągu w ciągu zbieżnym.
Ponadto ciąg iloczynów $\alpha_n v_n$ skalarów α_n i wektorów v_n zmierza do granicy równej $(\lim \alpha_n) \cdot (\lim v_n)$, o ile te granice (w nawiasach) istnieją.

Definicja. Ciągiem Cauchy'ego nazywamy taki ciąg (w_n) wektorów tej przestrzeni, że

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_M \forall_{n,k\geqslant M} \; \|w_n - w_k\| < \epsilon. \tag{6.8}$$

Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego (bo gdy $w = \lim w_n$, to

$$\|w_n - w_k\| \leqslant \|w_n - w\| + \|w - w_k\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

dla n, k dostatecznie dużych). Dla ciągów liczbowych warunek Cauchy'ego implikuje też zbieżność, czyli istnienie granicy skończonej.

Dla wektorów już tak być nie musi. Na przykład, zbiór X_1 restrykcji do odcinka $[0, 1]$ wielomianów jest przestrzenią wektorową. Carl Weierstrass udowodnił, że każda funkcja ciągła jest granicą w normie $\|\cdot\|_{[0,1]}$ pewnego ciągu wielomianów. Rozważmy np. funkcję $t \mapsto \sqrt{t}$. Ciąg wielomianów przybliżających $\sqrt{t}$ spełnia warunek Cauchy'ego, (również w przestrzeni X_1, bo tam jest taka sama norma), ale nie ma granicy w X_1.

Definicja. Przestrzeń unormowaną nazwiemy przestrzenią zupełną lub przestrzenią Banacha, gdy każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni ma granicę należącą do tej przestrzeni.

Każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha jest zupełna, i na odwrót, gdy podprzestrzeń $Y \subset X$ przestrzeni unormowanej X jest zupełna, to musi ona być domkięta[4].

[4]Faktycznie, domkniętość oznacza, że gdy ciąg wektorów $(w_n) \subset Y$ ma granicę $v \in X$, to musi być $v \in Y$. W przeciwnym przypadku nie istnieje żadna granica v_* tego ciągu należąca do Y, bo z relacji $\|w_n - v_*\| \to 0$ i z jednoznaczności granic wyniknie, że $v_* = v$.

Przykładem normy przestrzeni niezupełnej będą normy całkowe[5] w przestrzeni $C[a,b]$. Ciąg $f_n \in C[-1,1]$ określony wzorem: $f_n(x) = -1$ dla $x \in [-1, -\frac{1}{n}]$, $f_n(x) = nx$, $|x| < \frac{1}{n}$ oraz $f_n(x) = 1, x \in [\frac{1}{n}, 1]$ zmierza w każdej z tych norm $\|\cdot\|_p, 1 \leqslant p < +\infty$ do funkcji nieciągłej równej $\mathrm{sgn}(x)$ (= ćwiczenie) i jest ciągiem Cauchy'ego niemającym granicy w $C[-1,1]$ w żadnej z tych norm. Wystarczy to sprawdzić dla $p = 1$, bo moduły różnic rozważanych par funkcji są $\leqslant 1$, a podnoszenie do potęgi p tylko może zmniejszyć takie wartości. Ze względu na problemy z postulatem $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ w przypadku $\|\cdot\|_p$ dla funkcji nieciągłych zauważmy, że warunek ($\|f_n - f\|_p \to 0$ oraz $\|f_n - g\|_p \to 0$) implikuje jedynie, że $\|f - g\|_p = 0$ (wystarczy przyjrzeć się nierówności trójkąta dla norm sum $(f - f_n) + (f_n - g)$). Ale dla $f = \mathrm{sgn}(x)$ nie istnieje żadna $g \in C[-1,1]$ taka, by $\|f - g\|_p = 0$, jeżeli $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

Przykładem przestrzeni Banacha jest $C[a,b]$ z normą $\|f\|_{[a,b]}$, co wykażemy w następnym wykładzie. W przestrzeni $\mathbb{R}^d$ zauważyliśmy, że zbieżność ciągu jest równoważna zbieżności każdej z jego współrzędnych. Ze względu na nierówności modułu takiej współrzędnej wektora (która jest nie większa od normy tego wektora), j-te współrzędne ciągu Cauchy'ego również są ciagami Cauchy'ego w $\mathbb{R}$, muszą więc być zbieżne. Dowodzi to zupełności $\mathbb{R}^d$ w każdej z norm $\|\cdot\|_p$. Można też wykazać (tylko nieco trudniejsze ćwiczenie) zupełność względem norm $\|\cdot\|_p$ przestrzeni ciągowych ℓ^p dla $1 \leqslant p < +\infty$.

Wzór całkowania przez części ma liczne zastosowania, ma też następujące uogólnienie, które uzyskamy stosując n-krotnie wzór z przypadku $n = 1$ (pomińmy szczegóły dowodu indukcyjnego):

$$\int_a^b f g^{(n+1)} dx = \left[f g^{(n)} - f' g^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n f^{(n)} g \right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b f^{(n+1)} g dx \tag{7.8}$$

W 2.tomie (rozdz. IX, paragraf 4, [319]) książki Fichtencholza "*Rachunek różniczkowy i całkowy*" można znaleźć ciekawe zastosowanie tego wzoru do dowodu przestępności liczby e. Ten opublikowany przez Hermite'a w 1873 roku dowód stał się źródłem jego modyfikacji, która doprowadziła von Lindemanna do rozwiązania w roku 1882 problemu kwadratury koła poprzez wykazanie, że π nie jest liczbą algebraiczną. Link do atrykułu na ten temat znajduje się poniżej:

`http://home.agh.edu.pl/~rudol/Pi_TranscendentalLindemann.pdf`

Kolejnym zastosowaniem wzoru na całkowanie przez części jest przedstawienie reszty we wzorze Taylora w postaci całkowej (bez punktów pośrednich!).

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt. \tag{8.8}$$

Dla $n = 0$ jest to inaczej zapisany wzór Newtona - Leibniza: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$. Postać ogólną można uzyskać wstawiając we wzorze (7.8) $g(t) = (x-t)^n$, łatwiej przeprawadzić dowód kroku indukcyjnego: zakładając, że $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt$, zastosujmy całkowanie przez części : $\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt = \left[-\frac{1}{n} f^{(n)}(t)(x-t)^n \right]_a^x + \frac{1}{n} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$. Wstawienie tego do wzoru dla $n-1$ kończy dowód metodą indukcji.

Z całkowej postaci reszty bardzo łatwo można uzyskać reszty w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego. Wystarczy zastosować pierwsze twierdzenie o wartości średniej dla całki $\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$, gdzie ξ jest pewnym punktem pośrednim leżącym na odcinku o końcach a, x. Stosując to samo twierdzenie, ale do iloczynu całej funkcji podcałkowej przez funkcję 1 otrzymamy resztę postaci Cauchy'ego (z możliwe, że innym punktem pośrednim λ).

[5] Można wykazać, że zbieżność w tej normie, czyli warunek $\|f_n - f\|_p$, choć nie implikuje zbieżności we wszystkich punktach przedziału $[a,b]$, to implikuje zbieżność do f pewnego podciągu (f_{n_k}) ciągu (f_n) prawie wszędzie, czyli we wszystkich punktach zbioru $[a,b] \setminus N$, gdzie N jest pewnym zbiorem miary Lebesgue'a zero.