9 Zbieżność ciągów funkcyjnych

Definicja. *Ciąg funkcyjny (np. (f_n)), to ciąg którego wyrazami są funkcje o tej samej dziedzinie (np. $f_n : D \to \mathbb{R}$ lub $f_n : D \to \mathbb{C}$). Ciąg ten jest zbieżny punktowo na zbiorze $\Delta \subset D$ gdy $\forall_{x\in\Delta}\exists \lim f_n(x)$. (Domyślnie, to będzie granica przy $n \to \infty$ i jej wartość oznaczmy przez $f(x)$.) Mówimy wtedy, że taka funkcja f jest granicą punktową ciągu (f_n) na zbiorze Δ.*

Zauważmy, że granica punktowa ciągu funkcji ciągłych (nawet klasy C^∞) nie musi być ciągła. Najprostszy przykład to ciąg $f_n(t) = t^n$ zbieżny punktowo w $[0, 1]$ do funkcji charakterystycznej zbioru 1-elementowego $\{1\}$. Z kolei, zbiór punktów nieciągłości granicy punktowej ciagu funkcji ciągłych, choć może być niepusty, musi spełniać pewne warunki (tzw. typ $\mathcal{F}_\sigma$), o czym już wspominałem.

Kolejną niedogodnością jest fakt, że nawet gdy granica punktowa jest ciągła, np. $\lim f_n(t) = 0$ dla $t \in [0, 1]$, to jej całka może być różna od granicy całek. Tak jest np. dla $f_n(t) = nt^{n-1}$ gdy $t \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, zaś na przedziale $[1 - \frac{1}{n}, 1]$ funkcja ta jest liniowa, tak określona, by była ciągła w [0,1] oraz by $f_n(1) = 0$. Ponieważ $f_n \geqslant 0$, jej całka na przedziale $[0, 1]$ jest $\geqslant \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt = (1 - \frac{1}{n})^n$, co zmierza do $\frac{1}{e} > 0 = \int_0^1 (\lim f_n(t))\,dt$.

Te dwie niedogodności usunie bardziej restrykcyjny typ tzw. "*zbieżności jednostajnej*". Zanim wprowadzimy definicję, zapiszmy warunek zbieżności punktowej przy użyciu sekwencji 3 kwantyfikatorów. Jeśli chcemy tu podkreślić, że wybór liczby M zależy od ϵ oraz od x, możemy to zaznaczyć pisząc $M = M(x, \epsilon)$. Tak więc zbieżność punktowa ciągu (f_n) na zbiorze Δ oznacza, że

$$\forall_{x\in\Delta}\forall_{\epsilon>0}\exists_{M=M(x,\epsilon)}\forall_{n>M}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{1.9}$$

Kwantyfikatory tego samego typu możemy "przestawiać" -czyli zamieniać ich kolejność. Ale implikacja typu

$$\exists_M\forall_x P(M, x) \Rightarrow \forall_x\exists_M P(M, x),$$

gdzie $P(M, x)$ jest jakąś formą zdaniową - jest prawdziwa tylko w tę jedną stronę (nie można jej zastąpić równoważnością!). Na przykład, w zbiorze liczb rzeczywistych wystarczy przyjrzeć się warunkowi $P(M, x)$ typu $x < M$, gdzie poprzednik będzie fałszywy, następnik -prawdziwy, np. dla $M = x + 1$. Zamieniając w warunku (1.9) kolejność kwantyfikatorów dotyczących x oraz M otrzymamy więc istotnie silniejszy warunek -tak zwaną zbieżność jednostajną:

Definicja. Mówimy, że ciąg funkcji f_n jest na zbiorze Δ zbieżny jednostajnie do funkcji f, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M=M(\epsilon)}\forall_{x\in\Delta}\forall_{n>M}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{2.9}$$

Zauważmy, że ϵ jest tu ograniczeniem jednostajnym na zbiorze Δ dla różnicy $|f_n(x) - f(x)|$, więc otrzymamy stąd, przechodząc do supremum po $x \in \Delta$ nierówność $\|f_n - f\|_\Delta \leqslant \epsilon$. Warunek jednostajnej zbieżności (2.9) jest więc równoważny warunkowi zbieżności wzgl. normy $\|f\|_\Delta := \sup\{|f(t)| : t \in \Delta\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\Delta = 0.$$

Najczęściej będziemy używać normy $\|\cdot\|_{[a,b]}$ -gdzie $\Delta = [a, b]$. Zbieżność jednostajną (przy $n \to \infty$) oznaczamy podwójną strzałką: $\rightrightarrows$, pisząc

$$f_n \rightrightarrows f \quad \texttt{lub} \quad f_n \underset{\Delta}{\rightrightarrows} f.$$

W systemie TEX ten symbol uzyskujemy pisząc

`\rightrightarrows,`

natomiast *zbieżność punktową ciągu* (f_n) *do funkcji* f oznaczamy symbolem $f_n \to f$ (na zbiorze Δ), lub pisząc "$f_n(x) \to f(x),\ x \in \Delta$".

Zauważmy, że ze względu na kolejność kwantyfikatorów: "$[\exists_M \forall_x P(M,x)] \Rightarrow [\forall_x \exists_M P(M,x)]$" mamy następujące

Twierdzenie 1. Jeśli ciąg funkcji f_n jest zbieżny jednostajnie, to jest on też zbieżny punktowo do tej samej granicy.

Badanie zbieżności jednostajnej powinniśmy więc zawsze zacząć od wyliczenia granicy punktowej, co jest prostszym zadaniem. Jedynie z warunku $\lim \|f_n\|_\Delta = 0$ możemy bezpośrednio wnioskować, że $f_n \rightrightarrows 0$. Przy badaniu zbieżności ciągu f_n wyliczamy najpierw $f(x) = \lim f_n(x)$ w każdym ustalonym punkcie $x \in \Delta$, dopiero w następnym kroku liczymy normę supremową $\|f_n - f\|_\Delta$. Do tego potrzebna jest już znajomość wartości $f(x)$.

Przykłady. Dla ciągu $h_n(x) = 2e^{\sin x} + x^n(1-x)$ na zbiorze $\Delta = [0,1]$ drugi składnik, czyli ciąg $f_n(x) = x^n(1-x)$ zmierza do zera, więc granicą punktową jest tu funkcja $\lim h_n(x) = 2e^{\sin x}$, zaś $\|h_n - \lim h_n(x)\|_\Delta = \|f_n\|_\Delta$, co jak łatwo sprawdzilić (=ćwiczenie na liczenie ekstremów) zmierza do zera. Zbieżność h_n jest w tym przypadku jednostajna.

Inaczej przedstawia się sytuacja dla ciągu x^n, którego granicą punktową jest funkcja równa zero w przedziale $[0,1)$ oraz równa 1 w punkcie $x = 1$ (bo tam jest ciąg stały=1). Wyliczamy $\|x^n - \lim x^n\|_{[0,1]} = \|x^n - 0\|_{[0,1)} = 1$, co nie zmierza do zera, więc zbieżność nie jest tu jednostajna, tylko punktowa. Na zbiorze nieograniczonym $\Delta = \mathbb{R}$ ciąg $\sin(\frac{1}{n}x)$ zmierza punktowo, ale nie jednostajnie do zera. Podobnie jest z ciągiem funkcji charakterystycznych $\chi_{[n,n+1]}$. Na przedziale $[0,1]$ analogiczna sytuacja wystąpi dla $\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$. Rzecz jasna, normy są tu równe 1, a granica punktowa jest stale równa zero. Faktycznie, dla $x = 0$ wartości są stale równe 0, zaś gdy $x > 0$, to dla $n > \frac{1}{x}$ mamy już $x \notin [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, więc ciąg $\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}(x)$ jest zerem począwszy od takiego miejsca.

Twierdzenie 2. Granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Faktycznie, gdy $f_n \rightrightarrows f$, to stosując nierówność trójkąta dwukrotnie, mamy

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

gdzie pierwszy i ostatni składnik są małe $(< \frac{\epsilon}{3})$ dla dostatecznie dużych n ze zbieżności jednostajnej, drugi jest $< \frac{\epsilon}{3}$ z ciągłości f_n dla $|h|$ dostatecznie małych. (Proszę dla treningu rozpisać ten dowód szczegółowo- to nie jest trudne!)

Twierdzenie 3. (O przechodzeniu do granicy pod znakiem całki). Jeśli $f_n \in R[a,b]$ oraz $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[a,b]$, to $f \in R[a,b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Dowód. Gdy dla ustalonego $\epsilon > 0$ znajdziemy $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\|f_m - f\| < \epsilon_1 := \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ i dobierzemy (na mocy kryterium Riemanna) taki podział $[a,b]$ na odcinki $\Delta_j = [t_{j-1}, t_j], j \leqslant k$ o długościach $|\Delta_j|$, że różnica między sumą górną i dolną dla f_m, czyli $\sum_{j=1}^k (\sup_{\Delta_j} f_m - \inf_{\Delta_j} f_m)|\Delta_j|$ jest mniejsza od ϵ, to analogiczna różnica dla funkcji f będzie mniesza od 2ϵ, co dowiedzie całkowalności f. Faktycnie, ponieważ $f \leqslant f_m + \epsilon_1$, więc $\sup_{\Delta_j} f \leqslant \sup_{\Delta_j} f_m + \epsilon_1$, zaś z nierówności $f \geqslant f_m - \epsilon_1$ wyniknie, że kresy dolne po każdym z odcinków Δ_j funkcji f oraz funkcji f_m są oddalone o nie więcej, niż ϵ_1. Ponieważ $\sum |\Delta_j| = b - a$, różnica tych sum nie przekracza ϵ, a taka suma dla f nie przekracza 2ϵ.

Teraz wystarczy skorzystać z faktu, iż różnica całek, to całka różnicy, zaś

$$|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \|f_n - f\|_{[a,b]} \cdot (b-a). \;\square$$

Natomiast granica ciągu funkcji całkowalnych może nie być całkowalna, jeśli zbieżność jest tylko punktowa, nawet w przypadku ciągów monotonicznych wspólnie ograniczonych i spełniających warunek Cauchy'ego w każdej z norm całkowych $\|\cdot\|_p$.

Przykład 1. Ustawmy wszystkie liczby wymierne z odcinka $[0,1]$ w ciąg $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Niech $f_k(x) = 0$ w przypadku gdy $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \cup \{r_n : n > k\}$ oraz $f_k(r_n) = 1$ gdy $n \leqslant k$. Oczywiście, są to funkcje całkowalne o całkach równych zero, bo są one równe zero poza skończoną ilością punktów. Warunek Cauchy'ego względem norm całkowych wynika z równości $\|f_m - f_k\|_p = 0$. Granicą jest funkcja Dirichleta $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \notin R[0,1]$.

Przykład 2. Niech $g_n(t) = 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$ oraz $g_n(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ dla $t \in (\frac{1}{n}, 1]$. Wówczas jest to ciąg niemalejący funkcji całkowalnych, jego granica jest nieograniczona, więc nie należy do zbioru $R[0,1]$ funkcji całkowalnych. Warunek cauchy'ego w normie całkowej $\|\|_1$ jest spełniony, bo $\|g_n - g_k\|_1 = |\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{k}}| \to 0$ przy $n, k \to \infty$. (Tym razem dla $\|\cdot\|_p$ gdy $p \geqslant 1$ nie mamy już warunku Cauchy'ego.)

Możemy teraz porównać zbieżnosci względem wprowadzonych wcześniej norm całkowych $\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p\,dt)^{\frac{1}{p}}$ oraz względem normy supremowej $\|\cdot\|_{[a,b]}$.

Twierdzenie 4. Jeśli $1 < p < \infty$, to istnieją stałe $C_p, c_p > 0$ takie, że dla wszystkich $f \in R[a,b]$ mamy nierówności:

$$\|f\|_1 \leqslant c_p\|f\|_p \leqslant C_p\|f\|_{[a,b]}. \tag{4.9}$$

Ponadto zbieżność ciągu funkcji $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ do f względem którejkolwiek z tych trzech norm implikuje zbieżność całek: $\int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$.

Dowód. Skorzystamy z nierówności Hóldera (gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) dla iloczynu funkcji $|f(t)|$ przez funkcję stałą 1, czyli przez $g_0(t) = 1\,\forall t$. Mamy więc $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)g_0(t)|\,dt \leqslant \|f\|_p\|g_0\|_q$, więc pierwszą nierówność mamy ze stałą $c_p = \|g_0\|_q = (b-a)^{\frac{1}{q}}$. Na przykład, $c_2 = \sqrt{b-a}, C_2 = (b-a)$. W każdym punkcie $t \in [a,b]$ zachodzi nierówność $|f(t)| \leqslant \|f\|_{[a,b]}g_0(t)$. Podnosząc ją stronami do potęgi (dodatniej) p i całkując następnie stronami, a na końcu podnosząc do potęgi $\frac{1}{p}$ otrzymamy nierówność $\|f\|_p \leqslant \|f\|_{[a,b]}\|g_0\|_p = \|f\|_{[a,b]}(b-a)^{\frac{1}{p}}$, stąd druga nierówność zachodzi ze stałą $C_p = (b-a)^{\frac{1}{p}} \cdot c_p$.

Co do zbieżności całek, to z liniowości całki i z całkowej nierówności trójkąta mamy

$$|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt| = |\int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt = \|f_n - f\|_1$$

i reszta wynika już z nierówności (4.9). □

Zauważmy, że zbieżność w normach całkowych nie gwarantuje zbieżności prawie wszędzie, ani tym bardziej punktowej. Przykład, to ciąg funkcji charakterystycznych odcinków $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$ gdzie $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, ustawiony w porządku leksykograficznym dla par (k, m). W tym ciągu każda z wartości 0,1 pojawia się nad punktem t (przynajmniej dla $t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$) nieskończenie często. Natomiast normy $\|\cdot\|_p$ takich funkcji, równe $(\frac{1}{m})^{\frac{1}{p}}$, zmierzają do zera. Tym niemniej (= pewne twierdzenie F. Riesza) pewien podciąg ciągu zbieżnego w tej normie -już musi być zbieżny prawie wszędzie (czyli poza zbiorem miary zero). Można też dla każdej pary wykładników $1 \leqslant p < p_1 < \infty$ znaleźć ciąg $f_n \in R[a,b]$ zbieżny w normie z wykładnikiem p, który nie jest zbieżny w normie z wykładnikiem p_1 (zaś w przeciwnym kierunku implikacje zachodzą). Mamy więc nieprzeliczalną rodzinę nierównoważnych norm w tej przestrzeni. Kontrastuje to z sytuacją przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych, gdzie, jak można wykazać, wszystkie normy są równoważne.

Jednym z najważniejszych faktów jest zupełność przestrzeni funkcji ograniczonych z normą supremową oraz przestrzeni $C(\Delta)$ w normie $\|\cdot\|_\Delta$.

Definicja. *Mówimy, że ciąg funkcji $f_n : \Delta \to \mathbb{C}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na zbiorze Δ, gdy*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{M=M_\epsilon} \forall_{n,k>M} \forall_{x\in\Delta} \quad |f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon. \tag{5.9}$$

Zauważmy, że przechodząc do supremum względem $x \in \Delta$ w ostatniej nierówności otrzymamy równoważny warunek:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{M=M_\epsilon} \forall_{n,k>M} \quad \|f_n - f_k\|_\Delta \leqslant \epsilon,$$

który skrótowo zapisujemy w postaci

$$\|f_n - f_k\|_\Delta \underset{n,k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Jest to więc dokładnie zdefiniowany w poprzednim wykładzie warunek Cauchy'ego dla ciągu w przestrzeni unormowanej (wzgl. normy $\|\cdot\|_\Delta$). Oznaczmy przez $B(\Delta)$ przestrzeń funkcji ograniczonych na zbiorze Δ. Gdy $\Delta = [a, b] \subset \mathbb{R}$, to przestrzeń wektorowa funkcji ciągłych $C(\Delta)$ jest podprzestrzenią wektorową w $B(\Delta)$. Jako domyślną traktujemy w tych przestrzeniach normę $\|\cdot\|_\Delta$.

Twierdzenie 5. Każda z przestrzeni: $B(\Delta)$ oraz $C(\Delta)$ jest zupełna. Innymi słowy, każdy ciąg (f_n) w tej przestrzeni spełniający jednostajny warunek Cauchy'ego jest jednostajnie zbieżny do funkcji należącej do tej przestrzeni.

Dowód. Dla ciągu (f_n) z jednostajnego warunku Cauchy'ego wnioskujemy warunek Cauchy'ego w dowolnie ustalonym punkcie $t_0 \in \Delta$. Faktycznie,

$$|f_n(t_0) - f_k(t_0)| \leqslant \|f_n - f_k\|_\Delta \leqslant \epsilon$$

dla n, k dostatecznie dużych. Z twierdzenia Cauchy'ego w $\mathbb{R}$, (odpowiednio w $\mathbb{C}$) -mówiącego o zupełności tych przestrzeni, istnieją granice skończone $f(t_0) := \lim f_n(t_0)$.

Teraz **najważniejszy punkt dowodu**: Przechodzimy w warunku (5.9) do granicy przy $k \to \infty$ (co jest możliwe dla $k \geqslant M$). Otrzymamy oszacowanie:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{M=M_\epsilon} \forall_{n,k>M} \forall_{x\in\Delta} \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon.$$

To oznacza zbieżność jednostajną na zbiorze Δ: $\|f_n - f\|_\Delta \to 0$. Jeśli f_n są ograniczone, powiedzmy przez $K > 0$, czyli $\forall_{x\in\Delta} |f_n(x)| \leqslant K$, to z nierówności trójkąta otrzymamy $|f(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\Delta + K < \infty$, co daje ograniczoność. Dowód zupełności $B(\Omega)$ jest więc już zakończony. Aby wykazać zupełność $C(\Omega)$ potrzebujemy jeszcze sprawdzić, czy gdy (f_n) jest ciągiem Cauchy'ego zawartym w $C(\Delta)$, to $\lim f_n$ - jego granica w $B(\Delta)$ jest również ciągła. Ale ponieważ zbieżność f_n do f jest jednostajna, wynika to z twierdzenia 2. z obecnego wykładu.

Uwaga: Często mamy do czynienia z przestrzenią $C(D)$ funkcji ciągłych na zbiorze otwartym w D (może być $D \subset \mathbb{R}$, ale również $D \subset \mathbb{R}^d$). W takim przypadku nie mamy gwarancji, że każda funkcja $f \in C(D)$ jest ograniczona, jak miało to miejsce dla zbiorów zwartych Δ. Nie można wtedy określić $\|f\|_D$ jako wartości skończonej -a przecież tego wymagamy od normy. Taka norma będzie miała sens jedynie dla podprzestrzeni wektorowej $C_b(D)$ równej zbiorowi funkcji ciągłych i ograniczonych na zbiorze D, czyli w naszych oznaczeniach

$$C_b(D) := C(D) \cap B(D).$$

Powyższy dowód możemy zastosować prawie bez zmian dla tej przestrzeni z normą $\|\cdot\|_D$ opisującą zbieżność jednostajną. W następnym wykładzie poznamy jeszcze inny typ zbieżności, tzw. *zbieżność niemal jednostajną*, która z powodzeniem zastąpi zbieżność jednostajną w przestrzeniach funkcji ciągłych na zbiorach otwartych (np. w kole zbieżności dla szeregów potęgowych).