Analiza matematyczna II semestr wykład nr 1. (2021.)

1 Wstęp

Jednym z ważniejszych zastosowań matematyki jest **mierzenie**. Pomiary mogą dotyczyć długości wektora (norma) prędkości zmian położenia (pochodna), pola figur, długości krzywych, objętości brył (miara Jordana). Wszystkie powyższe zastosowania w sposób bardziej lub mniej bezpośredni wiążą się z całką. Rachunek całkowy jest jednym z podstawowych narzędzi dla zastosowań matematyki. Jego geneza (w pracach Barrowa, Newtona i Leibniza)
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barrow/ ,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Newton.html [1],
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Leibniz.html)
związana była z tworzeniem opisu ilościowego zjawisk fizycznych. Na przykład, z rozwiązywaniem równań opisujących ruch. Badania związane z rozwojem rachunku całkowego dostarczały przełomowych odkryć w matematyce i ich zastosowań przez niemal 400 lat. W połowie XIX w. pojawiła sie potrzeba analizy funkcji nieciągłych i zdefiniowania dla nich całki oznaczonej. Jeden z najwybitniejszych matematyków tego okresu, **Bernhard Riemann** (1826-1866) podał powszechnie dziś stosowaną definicję, którą w tym wykładzie poznamy.

W pierwszym semestrze poznaliśmy całkę nieoznaczoną -czyli rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych dla danej f. Wiemy też, że dla wielu "porządnych funkcji" jest problem:

Całki $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ nie da się wyliczyć przy użyciu funkcji elementarnych, jest to funkcja transcendentna Ei(x) (z dokładnocią do stałej), podobnie, jak funkcja erf(x) związana z $\int e^{-x^2}\,dx$ i z rozkładem normalnym ('Error function"). Nie można też wyrazić $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ i wielu innych "dość prostych całek" przez funkcje elementarne.

Tym niemniej, niedługo poznamy całkę oznaczoną i przy jej użyciu wykażemy, że każda funkcja ciągła $f \in C[a,b]$ ma funkcję pierwotną.

Najpierw odpowiedzmy na pytanie, jakich własności oczekujemy po liczbie $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Dla funkcji stałej $f(t) = C$ chcemy, by $I(C) = C(b-a)$. Gdy $C > 0$, będzie to pole prostokąta o bokach długości $b - a$ oraz C. Albo droga przebyta od chwili $t = a$ do $t = b$, czyli w czasie $b-a$ ze stałą prędkością $V = C$, albo praca wykonana na odcinku $[a,b]$ przez stałą siłę $F = C$ zwróconą w kierunku osi.

Większość funkcji nie jest stała, ale gdy są to funkcje f ciągłe, to przynajmniej na krótkich odcinkach Δx wartości f niewiele się od siebie różnią (jak wiemy, mówi o tym Tierdzenie Cantora) i w przybliżeniu można je zastąpić przez stałe.

I mamy jeszcze **fundamentalną własność: miara całości jest sumą miar części.** Ta własność (addytywność miary) będzie w tym semestrze dotyczyć podziałów na skończoną ilość części (skończona addytywność). W następnym roku poznamy przeliczalną addytywność (o wiele bardziej efektywną, ale i stwarzającą spore problemy).

Gdy podzielimy odcinek punktami $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots t_n = b$ na n części, a taki uporządkowany układ punktów oznaczymy literą $\mathcal{T}$, to długości odcinków podziału (czyli liczby $t_j - t_{j-1}$) wysumują się do długości całego $[a,b]$:

$$\sum_{j=1}^{n} t_j - t_{j-1} = t_n - t_0 = b - a \tag{1.1}$$

[1] Epidemia jednej z najgroźniejszych chorób miała, co może zaskakiwać, istotny, pozytywny wpływ na pracę nankową Newtona. Przytoczę tu jeden cytat z tej strony www: " Despite some evidence that his progress had not been particularly good, Newton was elected a scholar on 28 April 1664 and received his bachelor's degree in April 1665. It would appear that his scientific genius had still not emerged, but it did so suddenly when the plague closed the University in the summer of 1665 and he had to return to Lincolnshire. There, in a period of less than two years, while Newton was still under 25 years old, he began revolutionary advances in mathematics, optics, physics, and astronomy."

(jest to tzw. "suma teleskopowa"). Wprowadźmy też oznaczenie

$$\delta(\mathcal{T}) := \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

-tak zwaną **średnicę podziału** $\mathcal{T}$. Może się okazać, że na każdym z tych odcinków f jest już stała, czyli istnieją liczby $h_1, \ldots, h_n$ takie, że dla $t \in [t_{j-1}, t_j)$ jst $f(t) = h_j$. Wykresem takiej f są schodki o wysokościach h_j i jeśli są to wysokości nieujemne, to sumę $\sum_{j=1}^{n} h_j(t_j - t_{j-1})$, czyli sumę pól takich schodków (prostokątów $[t_{j-1}, t_j] \times [0, h_j]$) –możemy przyjąć jako $I(f)$. Takie funkcje nazywamy **funkcjami schodkowymi**.

Pozwólmy sobie (przy zadanym $\epsilon > 0$) na mały błąd udając, że dana $f \in C[a, b]$ jest schodkowa. Konkretnie, dobierzmy $\delta_\epsilon > 0$ w warunku jednostajnej ciągłości tak małe, by

$$\forall_{t,s\in[a,b]}\, |t - s| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Jeśli $\delta(\mathcal{T}) < \delta_\epsilon$, zaś dla $t \in [t_{j-1}, t_j)$ wartości $f(t)$ zamienimy na wartość $h_j = f(\lambda_j)$, gdzie $\lambda_j \in [t_{j-1}, t_j)$ jest dowolnie wybranym "punktem pośrednim", to naszym przybliżeniem dla $I(f)$ może być suma

$$S = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1}). \tag{2.1}$$

Gdyby dokonać innego wyboru punktów -biorąc jakieś inne $\tilde{\lambda_j} \in [t_{j-1}, t_j)$, jako punkty "odczytu wartości f", to otrzymamy analogiczną sumę (oznaczmy ją $\tilde{S}$) i z nierówności $|\lambda_j - \tilde{\lambda_j}| < \delta_\epsilon$ wyniknie po trywialnych przeliczeniach, że $|S - \tilde{S}| < \epsilon$. Jak wkrótce zobaczymy, zarówno w przypadku f ciągłych, jak i f monotonicznych - przy $\delta(\mathcal{T}) \to 0^+$ takie sumy będą miały wspólną granicę, zależną tylko od f, oznaczmy ją chwilowo $I(f)$, lub dokładniej $I_a^b(f)$, to będzie właśnie całka oznaczona $I(f) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Jakie własności możemy uzyskać dla takiej całki?

- liniowość: $I(f + g) = I(f) + I(g)$, $I(\alpha f) = \alpha I(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- monotoniczność: $\forall_{t\in[a,b]}\, f(t) \leqslant g(t) \Rightarrow I(f) \leqslant I(g)$
- warunek unormowania: $I(1) = b - a$ dla funkcji stałej równej 1
- Addytywność wzgl. drogi całkowania: $a < d < b \Rightarrow I_a^b(f) = I_a^d(f) + I_d^b(f)$

Gdy $m = \min\{f(t) : t \in [a, b]\}$ oraz $M = \max\{f(t) : t \in [a, b]\}$, to z monotoniczności (stosowanej do f i do funkcji stałych m, M) i z warunku unormowania łatwo wywnioskować, że liczba

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\, dt$$

zwana **średnią całkową** f na przedziale $[a, b]$ należy do przedziału $[m, M]$ i gdy $x_0 \in (a, b)$ jest punktem, w którym f jest ciągła, zaś $\delta \to 0$, to średnie całkowe z f po odcinkach o końach $x_0, x_0 + \delta$ zmierzają do $f(x_0)$. Z addytywnej zależności wzgl. drogi całkowania wynika, że te średnie całkowe, to nic innego, jak ilorazy różnicowe dla funkcji $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$. W ten sposób skonstruujemy funkcję pierwotną F dla dowolnej funkcji ciągłej f. Stąd już łatwo wyniknie wzór Newtona-Leibniza: $\int_a^b f(t)\, dt = \Phi(b) - \Phi(a)$, gdzie $\int f(t)\, dt = \Phi(t) + C$.

Aby zdefiniować całkę Riemanna, na początku określmy pojęcia:

- podziału $\mathcal{T}$ odcinka $[a, b]$,
- średnicy $\delta(\mathcal{T})$ tkiego podziału,
- normalnego ciągu podziałów $\mathcal{T}_n$,
- Układu Λ punktów pośrednich dla $\mathcal{T}$
- sum całkowych $S(f, \mathcal{T}, \Lambda)$

Definicja.
(1) Skończony układ punktów $\mathcal{T} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ nazywamy **podziałem odcinka** $[a, b]$, gdy $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n$.
(2) Liczbę $\delta(\mathcal{T}) := \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ nazywamy **średnicą tego podziału**.
(3) Mówimy, że ciąg podziałów $(\mathcal{T}_n)$ jest **normalny**, gdy $\lim_{n\to\infty} \delta(\mathcal{T}_n) = 0$.
(4) Zbiór skończony $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset [a, b]$ nazywamy układem **punktów pośrednich** dla podziału $\mathcal{T}$, gdy $\forall_j\ \lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$.
(5) **Sumę całkową** $S(f, \mathcal{T}, \Lambda)$ dla funkcji f, podziału $\mathcal{T}$ i układu punktów pośrednich Λ definiujemy jako liczbę

$$S(f, \mathcal{T}, \Lambda) := \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1}). \tag{3.1}$$

Przykład normalnego ciągu podziałów, to podziały $[a, b]$ na n równych części, czyli podziały punktami $t_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$. Tutaj $\forall_j t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}$ i taka jest też średnica tego podziału. Dla funkcji $f(x) = x$ i dla punktów pośrednich $\lambda_j = t_j$ sumą całkową przy równomiernym podziale $[a, b]$ na n części jest

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(a+\frac{j(b-a)}{n}\Big)\frac{b-a}{n} = a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = a(b-a)+\frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}.$$

Ostatnie wyrażenie dąży przy $n \to \infty$ do $(a + \frac{b-a}{2})(b-a) = \frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. Podobna sytuacja ma miejsce dla funkcji $f(x) = x^2$ i w pewnym miejscu trzeba znać wzór na $\sum_{j=1}^{n} j^k$ dla $k = 2$. Taki wzór znamy jedynie dla $k = 1, 2, 3$ ale dla pozostałych $k \in \mathbb{N}$ z pomocą Twierdzenia Stolza można wyznaczyć granicę $\lim \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1}$. Dla większości funkcji takie obliczenia nie są jednak możliwe. Zresztą podziały nie muszą być równomierne.

Najprostsze jest wyliczenie sum całkowych dla funkcji stałej: $f(x) = c$. Wartości $f(\lambda_j)$ stale równe c można wyłączyć przed znak sumy, a ponieważ dla każdego podziału mamy

$$\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1}) = b - a, \tag{4.1}$$

więc suma całkowa dla funkcji stałej równej c na odcinku [a,b] wynosi $c(b-a)$ niezalenie od wyboru punktów podziału i punktów pośrednich.
Definicja. Funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją całkowalną w sensie Riemanna**, co oznaczamy pisząc $f \in R[a, b]$, jeśli dla każdego normalnego ciągu podziałów $\mathcal{T}_n$ oraz układów punktów pośrednich Λ_n dla $\mathcal{T}_n$ istnieje granica skończona ciągu sum całkowych: $\lim S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n)$. Wówczas, jak można wykazać[2] granice te są jednakowe dla wszystkich ciągów normalnych podziałów.
Tę wspólną granicę oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(t)\, dt \tag{5.1}$$

i nazywamy calką oznaczoną z funkcji f od a do b (całką po przedziale $[a, b]$).

UWAGA: W odróżnieniu od całki nieoznaczonej, zmienna t w zapisie (5.1) jest zmienną "pozorną", czyli "związaną" -wartość całki jest liczbą i nie zależy od t. Zamiast t możemy zresztą wpisać inną zmienną, co nie zmieni wartości całki, np. $\int_a^b x\, dx = \int_a^b t\, dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. Całka ta jest "całką po odcinku skierowanym", istotna jest kolejność: punkt a jest początkiem, zaś punkt b -końcem. Definiuje się nawet $\int_a^b f(t)\, dt$ w przypadku, gdy $b < a$ wzorem $\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a\, dt$. Ponadto przyjmujemy, że $\int_a^a f(t)\, dt = 0$. Zapis$\int_{[a,b]} f(t)\, dt$ będzie zarezerwowany dla ogólniejszego pojęcia całki Lebesgue'a.

[2]Dowód metodą "przetasowania 2 ciągów" pokażę na wykładzie

Podobnie, jak warunek Heinego granicy funkcji jest równoważny definicji granicy sformułowanej w terminach ϵ i δ, tak mamy równoważną definicję całkowalności: (dowód proponuję potraktować jako ćwiczenie)

$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0}$ gdy $\mathcal{T}$ jest podziałem o średnicy $\delta(\mathcal{T}) < \delta$, to dla dowolnego układu punktów pośrednich Λ jest $|S(f,\mathcal{T},\Lambda) - \gamma| < \epsilon$.

Pierwszą z własności (odróżniającą całkę Riemanna od ogólniejszej całki Lebesgue'a, którą poznamy w następnym semestrze) jest następujące

Twierdzenie. Funkcje całkowalne muszą być ograniczone.

Dowód (nie wprost). Przypuśćmy, że $f \in R[a,b]$ jest nieograniczona. Na przykład z góry. Dla $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ powinno się znaleźć $\delta > 0$ takie, że

$$\delta(\mathcal{T}) < \delta \Rightarrow |S(f,\mathcal{T},\Lambda) - \gamma| < \epsilon.$$

Gdy $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n)$ jest innym układem punktów pośrednich dla tego samego podziału $\mathcal{T}$, to z nierówności trójkąta wyniknie, że

$$|S(f,\mathcal{T},\tilde{\Lambda}) - S(f,\mathcal{T},\Lambda)| \leqslant |S(f,\mathcal{T},\tilde{\Lambda}) - \gamma| + |S(f,\mathcal{T},\Lambda) - \gamma| < 2\epsilon < 1 \quad (6.1).$$

Ale w przynajmniej jednym z odcinków podziału, np. w $[t_{k-1}, t_k]$ funkcja f musi być nieograniczona (*dlaczego?*) - w naszym przypadku z góry. Mając już dany układ Λ tworzymy jego modyfikację $\tilde{\Lambda}$ pozostawiając te same punkty w pozostałych odcinkach: $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ dla $j \neq k$, zaś $\tilde{\lambda}_k$ dobieramy tak, by było $f(\tilde{\lambda}_k) - f(\lambda_k) > \frac{1}{t_k - t_{k-1}}$. Różnica występująca po lewej stronie (6.1) będzie dokładnie równa $(f(\tilde{\lambda}_k) - f(\lambda_k))(t_k - t_{k-1}) > 1$ (pozostałe składniki- dla $j \neq k$ wyzerują się). To sprzeczność. $\square$

Gdy $E \subset [a,b]$, to niech χ_E (inne oznaczenie: 1_E) oznacza funkcję charakterystyczną zbioru E, czyli $\chi_E(t) = 1$ dla $t \in E$ oraz $\chi_E(t) = 0$ gdy $t \notin E$. Gdy $E = [a,b] \cup \mathbb{Q}$, otrzymamy tak zwaną **funkcję Dirichleta**, która jest ograniczona, ale nie jest całkowalna, gdy $a < b$. [?] Nie jest ona ciągła w żadnym punkcie. Henri Lebesgue podał dość wygodne kryterium całkowalności funkcji ograniczonych na przedziale odwołujące się do miary Lebesgue'a μ_1 zbioru $\mathcal{NCG}(f)$ punktów nieciągłości tej funkcji:

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow (\sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\} < \infty) \texttt{ oraz } \mu_1(\mathcal{NCG}(f)) = 0.$$

Na szczęście, nie musimy definiować (1-wymiarowaej) miary Lebesgue'a -to nastąpi w przyszłym semestrze. Wystarczy określić, jakie są **zbiory miary zero.** Oznaczmy długość odcinka $\Delta = [\alpha, \beta]$, gdzie $\alpha \leqslant \beta$, symbolem $|\Delta| := \beta - \alpha$.

$$\mu_1(E) = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall_{\epsilon>0} \exists_{\Delta_n = [\alpha_n, \beta_n]} E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \texttt{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \epsilon.$$

Jako ćwiczenie proszę sprawdzić, że zbiory przeliczalne są zawsze miary zero. (Można nawet wykazać, że trójkowy zbiór Cantora też jest miary zero - sumując długości wyrzuconych z [0,1] odcinków, ale to w przyszłym semestrze.)

Za chwilę wykażemy (stosując tw. o 3 ciągach), że wszystkie funkcje ciągłe i wszystkie funkcje monotoniczne na odcinku domkniętym $[a,b]$ są całkowalne.

W tym celu zdefiniujmy dla danej funkcji ograniczonej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i dla danego podziału $\mathcal{T} = (t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b)$ odcinka $[a,b]$ tak zwane **sumy dolne**, $\underline{s}(f,\mathcal{T})$ oraz **sumy górne**: $\overline{S}(f,\mathcal{T})$ wzorem

$$\underline{s}(f,\mathcal{T}) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{[t_{j-1},t_j]} f \cdot (t_j - t_{j-1}), \quad \overline{S}(f,\mathcal{T}) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{[t_{j-1},t_j]} f \cdot (t_j - t_{j-1}). \quad (7.1)$$

Oczywiście, sumy całkowe (odpowiadające wyborowi punktów pośrednich) są pomiędzy sumami dolnymi i sumami górnymi. Wykażemy, że dla normalnych ciagów podziałów $\mathcal{T}_n$ różnice $\overline{S}(f,\mathcal{T}_n) - \underline{s}(f,\mathcal{T}_n)$ zmierzają do zera, jeśli f jest albo ciągła, albo monotoniczna. Aby skorzystać z twierdzenia o 3 ciągach wystarczy ponadto sprawdzić, że istnieje liczba γ większa lub równa od wszystkich sum dolnych i równocześnie nie większa niż jakiekolwiek sumy górne.

Użyte w tym tekście oznaczenia:

$$|\Delta| := \beta - \alpha \quad \text{dugość odcinka } \Delta = [\alpha, \beta]$$

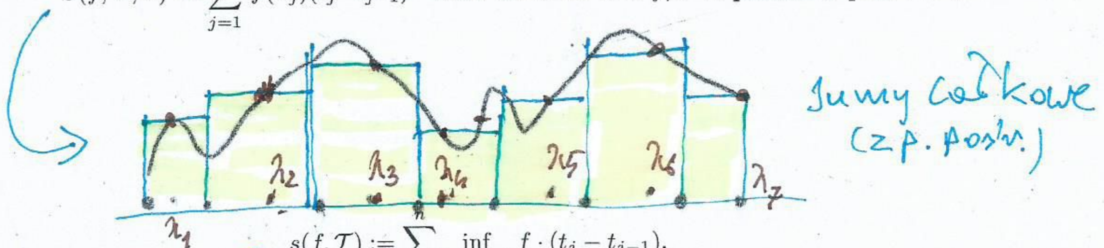
$$\sup_E f := \sup\{f(t) : t \in E\} \quad \text{(kres } f \text{ po zbiorze) } E$$

$\mathcal{T} = (a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b)$ -podział $\mathcal{T}$(=układ punktów podziału)

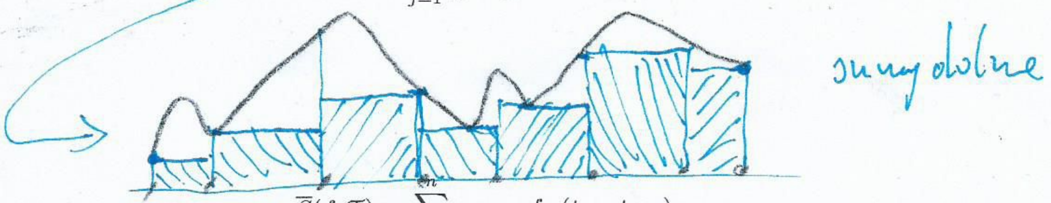
$\delta(\mathcal{T}) = \max(t_j - t_{j-1})$ (średnica podziału $\mathcal{T}$)

$\Lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ układ punktów pośrednich -gdzie $\lambda_j \in [t_{j-1}, t_j]$

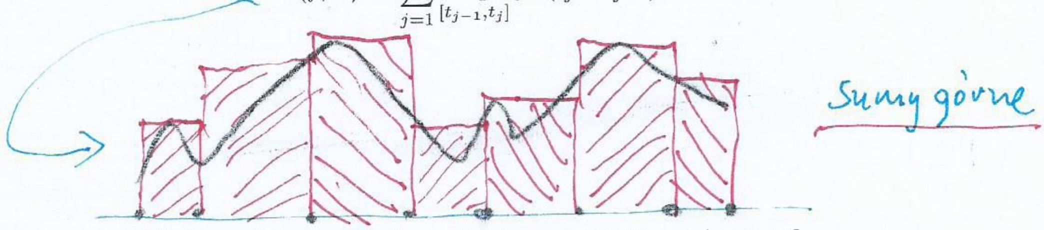
$$S(f, \mathcal{T}, \Lambda) := \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)(t_j - t_{j-1}) \quad \text{suma całkowa dla } f, \mathcal{T} \text{ z punktami pośr. z } \Lambda$$



$$\underline{s}(f, \mathcal{T}) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot (t_j - t_{j-1}),$$



$$\overline{S}(f, \mathcal{T}) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{[t_{j-1}, t_j]} f \cdot (t_j - t_{j-1})$$



$\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ wspólne rozdrobnienie dwu podziałów: $\mathcal{T}$ oraz $\mathcal{S}$

w poniższym przykładzie będzie $\mathcal{S} = (a = s_0 < s < b = s_2)$, $t_2 < s < t_3$.
Zawsze jest

$\leq \overline{S}(f, \mathcal{S})$

$$\underline{s}(f, \mathcal{T}) \leqslant \underline{s}(f, \mathcal{T} \cup \mathcal{S}) \leqslant \overline{S}(f, \mathcal{T} \cup \mathcal{S}) \leqslant \overline{S}(f, \mathcal{T}). \tag{8.1}$$