Elementarne własności całki

Zbiór $R[a,b]$ funkcji całkowalnych na przedziale $[a,b]$ jest, jak wkrótce zobaczymy, dość duży. Jest to przestrzeń wektorowa, w kórej wektorami są funkcje, suma funkcji f, g to "zwykła suma", czyli funkcja: $f+g : [a,b] \ni x \mapsto f(x)+g(x)$. Iloczynem wektora f przez skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ jest funkcja $[a,b] \ni x \mapsto \alpha f(x)$. Należy oczywiście udowodnić, że gdy $f, g \in R[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to również $f+g \in R[a,b]$ oraz $\alpha f \in R[a,b]$. Wynika to z arytmetyki granic dla ciągów sum całkowych, bo

$$S(f+g, \mathcal{T}_n, \Lambda_n) = S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n) + S(g, \mathcal{T}_n, \Lambda_n), \quad S(\alpha f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n) = \alpha S(f, \mathcal{T}_n, \Lambda_n).$$

Przechodząc do granicy w tych równościach otrzymujemy dodatkowo tezę o liniowości odwzorowania $R[a,b] \ni f \to \int_a^b f(x)\,dx$, czyli następujące:

Twierdzenie. Suma i iloczyn przez stałą $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcji całkowalnych- są całkowalne. Ponadto, gdy $f, g \in R[a,b]$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, to

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Wykażemy nawet wkrótce (używając kryterium Riemanna), że iloczyn dwu funkcji całkowalnych jest całkowalny, ale nie ma już zależności między całką iloczynu a iloczynem całek, jedynie częściowych informacji dostarczą twierdzenia o wartości średniej dla całek.

Dla $f, g \in R[a,b]$ zapis $f \leqslant g$ oznacza, że $\forall_{x\in[a,b]}\, f(x) \leqslant g(x)$. Ponieważ wynika stąd analogiczna nierówność dla sum całkowych, więc z twierdzenia o przechodzeniu do granicy z nierównościami otrzymujemy wówczas nierówność dla całek: $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$. Tę własność nazywamy "możliwością **całkowania nierówności stronami**", lub monotonicznością całki jako funkcjonału liniowego na przestrzeni $R(a,b)$.

Na przykład, gdy porównamy $f \in R[a,b]$ z funkcjami stałymi równymi $m, M \in \mathbb{R}$ takimi, że $m \leqslant f \leqslant M$, czyli $\forall_{x\in[a,b]}\, m \leqslant f(x) \leqslant M$, to całkując stronami otrzymamy: $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$, skąd wyniknie część (a) następującego twierdzenia:

Pierwsze Twierdzenie o Wartości Średniej. Załóżmy, że $f \in R[a,b]$ spełnia nierówności $m \leqslant f \leqslant M$.

(a) Liczba $\sigma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, zwana **średnią całkową** z funkcji f na odcinku $[a,b]$ również należy do przedziału $[m, M]$.

(b) Jeśli funkcja $g \in R[a,b]$ jest stałego znaku w $[a,b]$, to istnieje taka stała $\mu \in [m, M]$, że

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \mu \int_a^b g(t)\,dt. \tag{1.2}$$

Gdy ponadto f jest ciągła, ta stała μ jest równa $f(c)$ dla pewnego punktu $c \in [a,b]$, a średnia całkowa σ jest równa $f(c_1)$ dla pewnego $c_1 \in [a,b]$.

Pozostaje wykazać część (b)- najpierw w przypadku, gdy $\forall_x\, g(x) \geqslant 0$. Mnożąc strony nierówności $m \leqslant f \leqslant M$ przez g , a następnie całkując stronami, otrzymamy nierówności:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Gdy $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, to z tych nierówności wynika, że również $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ i równość (1.2) zachodzi z każdym μ. W przeciwnym przypadku za μ powinniśmy wziąć liczbę $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$. Natomiast gdy $\forall_{x\in[a,b]}\, g(x) \leqslant 0$, to kierunki nierówności zmienią się zarówno przy mnożeniu nierówności $m \leqslant f \leqslant M$ przez g, jak i (po raz drugi) przy dzieleniu nierówności (2.2) przez $\int_a^b g(x)\,dx$. Gdy f jest ciągła, to μ jest wartością pośrednią między $m = \min\{f(t) : t \in [a,b]\}$ oraz $M = \max_{[a,b]} f$. Z tezy (b) wynika też (a), bo wystarczy przyjąć za g funkcję stałą 1. $\square$

Gdy $a < b < c$, to dla $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ możemy badać zależności między całkami po poszczególnych przedziałach. Ważną własnością jest tak zwana "**addytywność całki względem drogi całkowania**", o której mówi następujące:

Twierdzenie. Funkcja f jest całkowalna po całym odcinku $[a,c]$ wtedy i tylko wtedy gdy jest całkowalna po każdym z jego fragmentów: $[a,b]$ oraz $[b,c]$. Ponadto w takim przypadku

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Pomińmy nietrudny dowód polegający na łączeniu podziałów odcinków $[a,b]$ i $[b,c]$ w jeden podział $[a,c]$ i odwrotnie- na rozdzielaniu podziału $[a,c]$ na podziały jego 2 fragmentów (dołączając w razie potrzeby jako punkt podziału -punkt b). Jest to odpowiednik pojęcia skończonej addytywności miary zbiorów.

2 Kryteria całkowalności

Podane ostatnio nierówności (8.1)oznaczają, że po rozdrobnieniu podziału sumy dolne rosną, a sumy górne maleją (w sensie słabych nierówności). Aby wykazać którąś z tych nierówności wystarczy (dodając sukcesywnie po 1 punkcie) założyć, że podział drobniejszy $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ powstaje przez dodanie tylko jednego nowego punktu s do $\mathcal{T}$, dzieląc jeden z odcinków podziału $\mathcal{T}$, nazwijmy go $\Delta = [t_{k-1}, t_k]$ na dwa odcinki $A = [t_{k-1}, s], B = [s, t_k]$. Ponieważ $A \subset \Delta$, mamy $\inf_A f \geqslant \inf_\Delta f$ oraz $\sup_A f \leqslant \sup_\Delta f$. Analogicznie jest dla zbioru B. Ponieważ długości tych odcinków (oznaczane tu przez $|A|, |B|$) sumują się do długości odcinka Δ, mamy składniki sumy dolnej po podziale równe

$$\inf_A f \cdot |A| + \inf_B f \cdot |B| \geqslant \inf_\Delta f \cdot |A| + \inf_\Delta f \cdot |B| = \inf_\Delta f \cdot |\Delta|$$

- co jest składnikiem sumy dolnej dla $\mathcal{T}$. Pozostałe odcinki $[t_{j-1}, t_j]$ nie są dzielone i dają identyczne składniki sum dolnych dla $\mathcal{T}$ oraz dla $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$. Wynika stąd pierwsza z nierówności (8.1). Drugą usyskujemy analogicznie.

W ostatniej nierówności(8.1) zamiast $\overline{S}(f, \mathcal{T})$ można umieścić sumę górną $\overline{S}(f, \mathcal{S})$. W ten sposób wykażemy, że dla każdego podziału $\mathcal{S}$ odcinka $[a,b]$ suma $\overline{S}(f, \mathcal{S})$ jest majorantą dla zbioru sum dolnych, a więc i dla ich kresu górnego.

Kres górny zbioru sum dolnych, oznaczany symbolem $\underline{\int}_a^b f(t)\,dt$ nazwiemy całką dolną z funkcji f.

Z podobnych względów ta całka dolna jest minorantą zbioru wszystkich sum górnych $\overline{S}(f, \mathcal{S})$, więc jeśli przez $\overline{\int}_a^b f(t)\,dt$ oznaczymy **kres dolny zbioru wszystkich sum górnych**, to mamy dla dowolnej pary podziałów $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ naszego odcinka $[a,b]$ nierówności:

$$\underline{s}(f, \mathcal{T}) \leqslant \underline{\int_a^b} f(t)\,dt \leqslant \overline{\int_a^b} f(t)\,dt \leqslant \overline{S}(f, \mathcal{S}) \tag{4.2}$$

Stąd i z twierdzenia o 3 ciągach (odp. o 3 granicach) wynika, że gdy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i przy średnicach podziałów zmierzających do zera różnice między sumami górnymi i dolnymi zmierzają do zera, to f jest całkowalna. Wywnioskujemy następujące ważne twierdzenie:

Twierdzenie. Wszystkie funkcje ciągłe oraz wszystkie funkcje monotoniczne są całkowalne.

Dowód. Gdy $f \in C[a,b]$, to funkcja ta osiąga w każdym z odcinków $\Delta_j := [t_{j-1}, t_j]$ podziału $\mathcal{T}$ wartości: największą (oznaczmy ją M_j) oraz najmniejszą: m_j, czyli istnieją $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$ takie, ze $f(\alpha_j) = m_j$, $f(\beta_j) = M_j$. Ponadto dzieki twierdzeniu Cantora, f jest jednostajnie ciągła, więc dla dowolnie zadanego $\epsilon > 0$ znajdziemy $\delta > 0$ takie, że gdy $|s-t| < \delta_\epsilon$, $s, t \in [a,b]$, to $|f(s)-f(t)| < \epsilon$. Teraz gdy $\delta(\mathcal{T}) < \delta_\epsilon$, to $|\beta - \alpha| < \delta_\epsilon$ i w konsekwencji, $\forall_j\ M_j - m_j < \epsilon$. Różnicę między sumą górną i dolną można zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leqslant \epsilon \sum_{j=1}^{n}((t_j - t_{j-1}) = \epsilon(b-a).$$

Różnica ta jest więc dowolnie mała jeśli tylko $\delta > 0$ jest dotatecznie mała. A dla ciągów normalnych przedziałów te różnice zmierzają do zera. Dzięki nierównościom (4.2) granice sum dolnych i sum górnych są równe zarówno całce dolnej, jak i górnej (które są w tym przypadku identyczne).

W przypadku f monotoniecznej -wystarczy założyć, że jest to funkcja niemalejąca. Wtedy $m_j = f(t_{j-1})$, $M_j = f(t_j)$, zaś długości odcinków, czyli $t_j - t_{j-1}$ szacujemy prez $\delta(\mathcal{T})$. Różnica między sumami: górną i dolną, to w przypadku f niemalejącej wyrażenie

$$\sum_{j=1}^{n}(f(t_j) - f(t_{j-1}))((t_j - t_{j-1}) \leqslant \delta \sum_{j=1}^{n}(f(t_j) - f(t_{j-1})) = \delta \cdot (f(b) - f(a)).$$

I podobnie, jak dla f ciągłej, otrzymujemy równość całki dolnej i górnej oraz zmierzanie sum całkowych do tej wartości.

Ponieważ z twierdzenia o addytywnej zależności od drogi całkowania możemy wywnioskować, że gdy $f \in R[t_{j-1}, t_j]$ dla wszystkich odcinków pewnego podziału odcinka $[a,b]$, to f jest całkowalna na $[a,b]$, otrzymujemy całkowalność funkcji przedziałami ciągłych (często mówi się "kawałkami ciągłych") - czyli mających skończenie wiele punktów nieciągłości. Z podobnych powodów całkowalne są funkcje przedziałami monotoniczne.

Okazuje się, że istnieją funkcje całkowalne, które nie są ani ciągłe, ani monotoniczne na żadnym przedziale o dodatniej długości. Pierwszy przykład takiej funkcji $f_* : [0,1] \to \mathbb{R}$ podał B.Riemann. Dla $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ niech $f_*(x) = 0$, a gdy $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ jest postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, niech $f_*(\frac{p}{q}) := \frac{1}{q}$. Jest to funkcja nieciągła w punktach $(0,1] \cap \mathbb{Q}$, ale ciągła we wszystkich punktach niewymiernych. Co więcej, ta f_* jest całkowalna. (Proszę to sprawdzić na ćwiczeniach i wyliczyć jej całkę). Amatorom ekstremalnie trudnych zadań można by polecać próbę konstrukcji funkcji nieciągłej w punktach niewymiernych, a ciągłej w wymiernych. Ale taka funkcja nie istnieje! (W zbiorze zadań Kaczor Nowak można znaleźć dowód, że zbiór punktów nieciągłości jest zawsze sumą pewnego ciągu zbiorów domkniętych -powiedzmy K_n. Gdyby $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ był taką sumą, to wnętrza zbiorów K_n będą puste i dołączając zbiory 1-elementowe $\{t\}$ (też domknięte, o pustym wnętrzu), gdzie $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ otrzymamy w sumie $[0,1]$- co stoi w sprzeczności z Twierdzeniem Baire'a.

Aby uzyskać warunki konieczne i wystarczające dla całkowalności musimy jeszcze pokonać jedną istotną trudność. Chodzi o następujące twierdzenie.

Lemat Darboux. Gdy średnica podziału, $\delta(\mathcal{T})$ zmierza do zera, to dla funkcji ograniczonej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jej sumy dolne zmierzają do całki dolnej, a sumy górne- do całki górnej.

Zauważmy, że w poprzednim twierdzeniu takie zbieżności też zachodziły, ale wtedy całki: dolne i górna były równe. Tu wcale nie muszą być równe (np. dla funkcji Dirichleta).

Dowód. Wystarczy go przeprowadzić dla sum i całek dolnych, bo sumy (odp. całki) górne dla f są równe sumom (całkom) dolnym dla $(-f)$ pomnożonym przez -1.

Załóżmy, że $|f(t)| \leqslant M$ dla wszystkich $t \in [a,b]$. Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$.

Ponieważ całka dolna $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$ jest kresem górnym sum dolnych, istnieje podział $\mathcal{S} = (a = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = b)$ taki, że $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt - \underline{s}(f, \mathcal{S}) < \frac{\epsilon}{2}$. Teraz rozważmy dowolny podział $\mathcal{T}$ o małej średnicy δ. Suma dolna utworzona dla wspólnego rozdrobnienia $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ jest nie mniejsza niż $\underline{s}(f, \mathcal{S})$, więc i jej odległość od całki dolnej nie przekracza $\frac{\epsilon}{2}$. Wystarczy wykazać, że gdy średnica $\delta > 0$ jest dostatecznie mała, to różnica

$$\underline{s}(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) - \underline{s}(\mathcal{T}) \tag{5.2}$$

będzie mniejsza od $\frac{\epsilon}{2}$.

Zwróćmy uwagę na fakt, że ilość punktów ($= k$) podziału $\mathcal{S}$ jest ustalona, zaś wraz ze zmierzaniem δ do zera ilość punktów z $\mathcal{T}$ staje się nieograniczenie duża. Większość odcinków $\mathcal{T}$ nie zawiera wewnątrz żadnych punktów z $\mathcal{S}$, odpowiadające im składniki są takie same w sumach dolnych dla podziału rozdrobnionego $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$, jak dla $\mathcal{T}$ i podczas liczenia różnicy (5.2) zredukują się.

Tych odcinków Δ podziału $\mathcal{T}$, wewnątrz których są punkty podziału $\mathcal{S}$ (i które dają niezerujące się składniki różnicy (2.5)) jest co najwyżej $k-1$. Każdy taki odcinek (nazwijmy go Δ) podzielony jest punktami z $\mathcal{S}$ na jakieś odcinki -powiedzmy $A_1, A_2, \ldots A_p$ i odpowiedni składnik różnicy (5.2) ma postać $\sum_{j=1}^{p} \inf_{A_j} f \cdot |A_j| - \inf_{\Delta} f \cdot |\Delta|$. Szacując: $|\inf_{A_j} f| \leqslant M$, $|\inf_{\Delta} f| \leqslant M$, zamieniając znak minus na $+$ i stosując nierówność trójkąta widzimy, że każdy taki składnik różnicy jest $\leqslant 2M|\Delta| \leqslant 2M\delta$. Ponieważ jest mniej niż k takich składników, różnica (2.5) jest mniejsza, niż $2kM\delta$ i będzie faktycznie mniejsza od $\frac{\epsilon}{2}$ dla dostatecznie małych δ. Dla takich δ mamy więc (dzięki nierówności trójkąta) oszacowanie $|\underline{\int_a^b} f(t)\, dt - \underline{s}(f, \mathcal{T})| < \epsilon$. $\square$

W szczególności -dla normalnych ciągów podziałów w przypadku, jeśli całki: dolna i górna są równe (np. równe jakiejś liczbie I), to sumy dolne i sumy górne mają taką samą granicę. Pomiędzy tymi dwoma ciągami: sum dolnych i sum górnych znajduje się ciąg sum całkowych dla danych układów punktów pośrednich i z twierdzenia o 3 ciągach otrzymujemy zbieżność sum całkowych do granicy równej tej liczbie I. W ten sposób uzyskujemy najważniejszą implikację w następującym twierdzeniu (zwanym Kryterium Darboux całkowalności):

Twierdzenie Darboux. Funkcja ograniczona jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.

Dowód trudniejszej implikacji już przeprowadziliśmy. Teraz zakładając całkowalność f wykażemy, że wówczas całki: górna i dolna są równe całce Riemanna $\int_a^b f(t)\, dt$. Dla dowolnie ustalonego $\epsilon > 0$ znajdziemy $\delta_\epsilon > 0$ takie, że gdy $\mathcal{T}$ jest podziałem $[a, b]$ o średnicy $\delta(\mathcal{T}) < \delta_\epsilon$, to przy każdym wyborze układu punktów pośrednich Λ dla $\mathcal{T}$ będzie

$$|S(f, \mathcal{T}, \Lambda) - \int_a^b f(t)\, dt| < \epsilon.$$

Z Lematu Darboux wiemy, że δ_ϵ może być równocześnie tak dobrane, by

$$\delta(\mathcal{T}) < \delta_\epsilon \Rightarrow |\underline{s}(f, \mathcal{T}) - \underline{\int_a^b} f(t)\, dt| < \epsilon.$$

Wystarczy wykazać, że gdy $\mathcal{T}$ jest jakimś ustalonym podziałem $[a, b]$ na n części, to dla odpowiednio dobranego układu Λ punktów pośrednich mamy

$$S(f, \mathcal{T}, \Lambda) - \underline{s}(f, \mathcal{T}) < \epsilon. \tag{2.6}$$

Ale gdy Δ_j jest jednym z odcinków podziału $\mathcal{T}$, to istnieje $\lambda_j \in \Delta_j$ taki, że $|\inf_{\Delta_j} f - f(\lambda_j)| < \frac{\epsilon}{n|\Delta_j|}$ Wówczas faktycznie zachodzi oszacowanie (2.6) i z nierówności trójkąta wyniknie, że różnica między całką Riemanna i całką dolną nie przekracza 3ϵ. Podobnie wykażemy, że całka górna jest równa całce Riemanna. $\square$

Wynika też stąd już prawie natychmiast bardziej wygodne

Kryterium Riemanna. Funkcja ograniczona f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{T}$ taki, że $\overline{S}(f, \mathcal{T}) - \underline{s}(f, \mathcal{T}) < \epsilon$.

Wykorzystamy to kryterium np. dowodząc całkowalności iloczynu.

Twierdzenie. Jeżeli dla funkcji ograniczonej $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ istnieją funkcje całkowalne $f, g \in R[a, b]$ oraz stała $M > 0$, że

$$s, t \in [a, b] |h(s) - h(t)| \leqslant M(|f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)|), \tag{2.7}$$

to funkcja h też jest całkowalna. W szczególności iloczyn $f(t)g(t)$ określa funkcję całkowalną. Moduł z funkcji całkowalnej jest całkowalny

Dowód. Zauważmy najpierw, że gdy zdefiniujemy oscylację funkcji h na zbiorze Δ wzorem

$$\operatorname{osc}_\Delta h := \sup\{|h(s) - h(t)| : s, t \in \Delta\},$$

to całkowalność h jest równoważna warunkowi:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\mathcal{T}} \text{ -podział taki, że } \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}_{[t_{j-1}, t_j]} h \cdot |t_j - t_{j-1}| < \epsilon. \tag{2.8}$$

Faktycznie, lewa strona ostatniej nierowności, to różnica między sumami: górną i dolną dla h, czyli liczba

$$\sum_{j=1}^{n} (\sup_{[t_{j-1}, t_j]} h - \inf_{[t_{j-1}, t_j]} h) \cdot (t_j - t_{j-1}).$$

W celu sprawdzenia możemy dla ustalonego (j-tego) odcinka podziału $\mathcal{T}$, który oznaczmy $\Delta_j := [t_{j-1}, t_j]$ wybrać takie ciągi $x_k, y_k \in \Delta_j$, że $f(x_k) \to \inf_{\Delta_j} h$, $f(y_k) \to \sup_{\Delta_j} h$. Wówczas $\lim |f(y_k) - f(x_k)| \leqslant \operatorname{osc}_{\Delta_j} h$ przy $k \to \infty$. Wynika stąd, że $\sup_\Delta h - \inf_\Delta h \leqslant \operatorname{osc}_\Delta h$. Przeciwną nierówność równie łatwo jest wykazać. Jest tu więc równość i różnica między sumami: górną i dolną wyraża się wzorem (2.8).

Jeśli zachodzi warunek (2.7), to dla oscylacji h po dowolnym odcinku $\Delta_j \subset [a, b]$ mamy nierówności:

$$\operatorname{osc}_{\Delta_j} h \leqslant M(\operatorname{osc}_{\Delta_j} f + \operatorname{osc}_{\Delta_j} g).$$

(Dowodzimy ich w analogiczny sposób, jak wyżej -dobierając odpowiednie ciągi x_k, y_k, dla których $|h(y_k) - h(x_k)| \to \operatorname{osc}_{\Delta_j} h$ i wykorzystując nierówności (2.7) dla y_k, x_k w miesjsce s, t. Teraz sumując po $1 \leqslant j \leqslant n$ wnioskujemy, że

$$\overline{S}(h, \mathcal{T}) - \underline{s}(h, \mathcal{T}) \leqslant M(\overline{S}(f, \mathcal{T}) - \underline{s}(f, \mathcal{T}) + \overline{S}(g, \mathcal{T}) - \underline{s}(g, \mathcal{T})).$$

Wyrażenie po prawej stronie jest dowolnie małe dla pewnego podziału $\mathcal{T}$, co kończy dowód pierwszej części twierdzenia.

Dzięki ograniczoności f, g całkowalnych istnieje wspólna stała $M > 0$ taka, że $\forall_{s\in[a,b]} |f(s)| \leqslant M, |g(s)| \leqslant M$. Jak w dowodzie twierdzenia o granicy iloczynu, szacujemy przyrost funkcji $h = fg$ tak:

$$|h(s)-h(t)| \leqslant |f(s)g(s)-f(s)g(t)|+|f(s)g(t)-f(t)g(t)| \leqslant M(|g(s)-g(t)|+|f(s)-f(t)|).$$

Warunek (2.7) jest więc spełniony dla $h = fg$. Dla funkcji $H = |f|$ warunek (2.7) ze stałą $M = 1, g = 0$ jest drugą nierównością trójkąta. □

Uwaga Sumy całkowe można w analogiczny sposób zdefiniować dla funkcji o wartościach zespolonych, a nawet wektorowych. Wówczas nie mamy do dyspozycji nierówności, ale zbieżność sum całkowych dla normalnych ciągów podziałów w przypadku funkcji ciągłych można sprawdzać poprzez warunek Cauchy'ego, używając wspólnych rozdrobnień dla pary podziałów i wykorzystując jednostajną ciągłość f ciągłych. Dla funkcji o wartościach w $\mathbb{C}$ lub w $\mathbb{R}^d$ można całkować każdą ze współrzędnych f z osobna (np. część rzeczywistą i część urojoną funkcji zespolonej $f : [a, b] \to \mathbb{C}$).