Szeregi Fouriera- „wersja minimalistyczna”

Wstęp

Wiemy dobrze, co oznacza `prostopadłość wektorów` $\vec{u}, \vec{v}$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Ich iloczyn skalarny, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ma wynosić zero i wówczas piszemy $\vec{u} \perp \vec{v}$, zaś długości takich wektorów, oznaczane szmbolami: $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ spełniają na mocy twierdzenia Pitagorasa relację

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2. \tag{TP}$$

Jej algebraiczny dowód wynika z dwuliniowości iloczynu skalarnego oraz z relacji $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$. Analogiczne związki zachodzą dla wektorów d-wymiarowej przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^d$. Gdy mamy układ wektorów kanonicznej bazy 0-1-kowej $\vec{\epsilon}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$, gdzie jedyną niezerową jest jest j-ta współrzędna, to dowolny wektor $\vec{w} = (w_1, \ldots w_d) \in \mathbb{R}^d$ ma jednoznaczny rozkład w postaci sumy

$$\vec{w} = w_1\vec{\epsilon}_1 + \cdots + w_d\vec{\epsilon}_d, \quad \texttt{gdzie} \quad w_j = \vec{w} \cdot \vec{\epsilon}_j,\ \|\vec{w}\|^2 = \sum_{j=1}^{d} w_j^2. \tag{R}$$

Pewnym uogólnieniem może być przestrzeń ℓ^2 złożona z ciągów nieskończonych sumowalnych z kwadratem, tzn. spełniających warunek $\sum_{j=1}^{\infty} w_j^2 < +\infty$. Można uzyskać analogiczne do (R) rozwinicie ortogonalne dowolnego wektora z tej przestrzeni względem kanonicznych wektorów bazowych $\vec{\epsilon}_j$ (ciągów mających same zera z wyjątkiem j-tego wyrazu równego 1). *Nota bene*, taki ciąg nie będzie już bazą wektorową w sensie znanym z algebry liniowej, czyli tzw. bazą Hamela, tam mogły występować jedynie sumy skończone. To rozwinięcie jest postaci „sumy nieskończonej”, czyli sumy szeregu

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{\infty} w_j\vec{\epsilon}_j, \quad \texttt{gdzie} \quad w_j = \vec{w} \cdot \vec{\epsilon}_j,\ \|\vec{w}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} w_j^2. \tag{RF}$$

W pewnych zbiorach funkcji możemy również określić strukturę przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym i znaleźć odpowiedniki układu kanonicznych wektorów bazowych. Podstawowym warunkiem będzie wzajemna prostopadłość elementów takiego układu. (Będzie jeszcze drugi istotny warunek -tzw. zupełność układu, ale nawet bez niego pewne częściowe rezultaty, jak zbieżność odpowiedniego szeregu -będą osiągalne.)

Niestety, gdy naszymi wektorami staną się funkcje, nie będziemy mogli dalej używać symbolu kropki dla oznaczenia iloczynu skalarnego, bo dla funkcji u, v zmiennej t symbol $u \cdot v$ powinien być rozumiany jako iloczyn tych funkcji, czyli funkcja, której wartością w punkcie t jest $u(t)v(t)$. Na ogół t przebiega przedział $[-\pi, \pi]$. Dla oznaczenia iloczynu skalarnego funkcji u oraz v będę więc używał nawiasu graniastego:

$$\langle u, v \rangle.$$

W niektórych książkach używa się nawiasów okrągłych, (co zwykle oznacza jednak pary uporządkowane), lub symbolu $\langle u \,|\, v \rangle$. Zrezygnujemy też z umieszczania strzałek oznaczających wektory nad u, v -tym bardziej, że czasami będą rozważane funkcje o wartościach zespolonych, wówczas $\overline{v(t)}$ oznaczać będzie liczbę sprzężoną do $v(t)$. Będziemy rozważali jedynie funkcje całkowalne w sensie Riemanna (ewentualnie, całkowalne w sensie zbieżności całek niewłaściwych). Teoria ogólna (wymagająca użycia całki Lebesgue'a) nie będzie tu omawiana, ale przedstawione tu wyniki będzie łatwo rozszerzyć w tym ogólnym kontekście -korzystając jedynie z dwu twierdzeń: o zmajoryzowanej zbieżności i o przybliżaniu funkcji całkowalnych przez funkcje ciągłe.

0.1 Wstępne definicje

$R(a,b)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalnych w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$. (Według jednego z twierdzeń -są to takie funkcje ograniczone, których zbiór punktów nieciągłości jest miary zero.) Przez $R^2(a,b)$ oznaczę ogół tych funkcji, dla których istnieje zarówno całka niewłaściwa $\int_a^b |f|^2$, jak i całki niewłaściwe z f (chodzi o wykluczenie sytuacji, gdyby znak f, czyli funkcja $t \mapsto sgn f(t)$ była nieciągła na zbiorze miary dodatniej). Iloczyn takich funkcji będzie miał również zbieżną całkę niewłaściwą. Iloczyn skalarny w $R^2(a,b)$ defiujemy jako całkę:

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b u(t)v(t)\,dt \quad \texttt{dla} \quad u,v \in R^2(a,b).$$

W przypadku funkcji o wartościach zespolonych (zbiór funkcji, dla których zarówno część rzeczywista, jak i zespolona należą do $R^2(a,b)$ oznaczmy $R^2_{\mathbb{C}}(a,b)$) iloczynem skalarnym jest

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b u(t)\overline{v(t)}\,dt \quad \texttt{dla} \quad u,v \in R^2_{\mathbb{C}}(a,b).$$

Teraz funkcje będziemy traktowali jako elementy przestrzeni wektorowej ($R^2(a,b)$, lub $R(a,b)$), definiując ich „długość” - tzw. normę średniokwadratową wzorem

$$\|u\|_2 := \Big(\int_a^b |u(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (= \sqrt{\langle u, u\rangle}).$$

Dokładniej, jest to norma na $C[a,b]$- przestrzeni funkcji ciągłych w naszym przedziale, natomiast dla $u \in R^2(a,b)$ równość $\|f\|_2 = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdzy zbiór $\{t \in [a,b] : u(t) \neq 0\}$ jest miary zero. Na przykład -każdy zbiór przeliczalny jest miary zero, f równa zero wszędzie poza skończoną ilością punktów jest w $R(a,b)$ i nie jest wektorem zerowym tej przestrzeni, ale $\|f\|_2 = 0$. W przypadku funkcji nieciągłych tezy o jednoznaczności rozwinięcia w szereg Fouriera musimy rozumieć z dokładnością do relacji równości „prawie wszędzie”.

Jedyne własności $\|\cdot\|_2$ oraz iloczynu skalarnego, jakie wykorzystamy, to :

(i) `symetria` (w przypadku zespolonym -tzw. „`skośna symetria`”):

$$\langle u, w\rangle = \overline{\langle w, u\rangle} \tag{1}$$

(ii) `liniowość iloczynu skalarnego względem pierwszej zmiennej`:

$$\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle, \qquad u,v,w \in R^2(a,b), \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\texttt{odpowiednio} \in \mathbb{C}), \tag{2}$$

W szczególności,

$$\|u + tv\|^2 = \|u\|_2^2 + 2t\texttt{Re}\langle u, v\rangle + t^2\|v\|_2^2 \quad , t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(iii) `nierówność Schwarza` (Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza):

$$|\langle u, w\rangle| \leq \|u\|_2\|w\|_2 \tag{4}$$

(iv) `nierówność trójkąta`:

$$\|u + w\|_2 \leq \|u\|_2 + \|w\|_2 \tag{5}$$

(v) `druga nierówność trójkąta` (wynikająca z pierwszej gdy podstawić $u = g, w = f - g$):

$$\big|\|f\|_2 - \|g\|_2\big| \leq \|f - g\|_2 \tag{6}$$

(vi) `porównanie norm`:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt \le \sqrt{b-a}\|f\|_2 \le (b-a)\|f\|_{[a,b]} \tag{7}$$

Własności te udowodniliśmy dla całek (właściwych) Riemanna, a przypadek ogólny otrzymamy po przejściach do granic występujących w definicji całki niewłaściwej po obu stronach dowodzonej równości (odp. nierówności). Przypomnijmy, że zbieżność średnio-kwadratowa, czyli względem normy $\|\cdot\|_2$ ciągu funkcyjnego (f_n) do funkcji f_0 oznacza, że $\lim \|f_n - f_0\|_2 = 0$. Dzięki (vi), wynika ona ze zbieżności jednostajnej, czyli względem normy

$$\|f\|_{[a,b]} := \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Zauważmy też, że z całkowej nierówności trójkąta:

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

stosowanej do $f = f_n - f_0$ wynika na podstawie (v), (vi), że całki $\int_a^b f_n(t)\,dt$ zmierzają do $\int_a^b f_0(t)\,dt$, o ile zbieżność f_n do f_0 zachodzi w którejkolwiek z trzech norm porównywanych w (v). Ponadto łatwo zauważyć, że gdy $\|v\|_{[a,b]} < +\infty$, to otrzymamy wtedy również zbieżność iloczynów skalarnych

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, v\rangle = \langle f_0, v\rangle. \tag{8}$$

0.2 Układy ortogonalne

Układ nieskończony $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (czyli obustronnie nieskończony ciąg) funkcji $\phi_n \in R[a,b]$ nazwiemy **układem ortogonalnym**, (dla odcinka $[a,b]$) gdy dla wszystkich $n, m \in \mathbb{Z}, n \ne m$ mamy $\langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0$. Normalizacją takiego układu nazwiemy układ złożony z funkcji $e_n(t) := \frac{1}{\|\phi_n\|_2}\phi_n(t)$. Tak otrzymany układ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nazwiemy **układem ortonormalnym**. Oznacza to, że

$$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}, \tag{9}$$

gdzie $\delta_{n,m} = 1$ dla $n = m$ oraz $\delta_{n,m} = 0$ gdy tylko $n \ne m$. Dla dowolnego układu ortonormalnego i dla dowolnych układów skalarów (α_n), gdzie $n \in \{-M, -M+1, \cdots, -1, 0, 1, \dots M-1, M\}$ (co skrótowo zapiszemy: $|n| \le M$) -zachodzi następujące uogólnienie relacji (R), (RF) ze str.1:

Lemat o współczynnikach: Gdy

$$g = \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e_k, \quad \text{odpowiednio} \quad g = \sum_{k=-M}^{M} \beta_k \phi_k \tag{10}$$

to dla $n \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\langle g, e_n\rangle = \alpha_n, \langle g, \phi_n\rangle = \alpha_n\|\phi_n\|^2 \forall_{|n|\le M} \quad \texttt{oraz} \ \langle g, e_n\rangle = 0 \quad \forall_{|n|>M}, \tag{11}$$

$$\|g\|_2^2 = \sum_{k=-M}^{M} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=-M}^{M} |\beta_k|^2\|\phi_k\|^2. \tag{12}$$

Faktycznie, gdy zapiszemy g jako sumę, zauważamy, że e_n jest wektorem prostopadłym do prawie wszystkich składników tej sumy -jedynym niezerowym iloczynem skalarnym jest więc $\langle \alpha_n e_n, e_n\rangle = \alpha_n$, dzięki (9). Podobnie sprawdzamy drugą tezę rozpisując $\|g\|_2^2$ jako iloczyn skalarny $\langle g, g\rangle$. Lemat o sumach częściowych: Dla $f \in R^2(a,b)$ i dla $M \in \mathbb{N}\cup\{0\}, k \in \mathbb{Z}$ niech

$$c_k(f) := \langle f, e_k\rangle, \qquad S_N[f] := \sum_{k=-M}^{M} c_k(f) e_k \tag{13}$$

Wówczas dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ jeśli $|k| \le M$, to $\langle f - S_M[f], e_k \rangle = 0$ oraz

$$\|f\|_2^2 = \|S_M[f]\|_2^2 + \|f - S_M[f]\|_2^2. \tag{14}$$

Prostopadłość $f - S_M[f]$ do e_k wnioskujemy z poprzedniego lematu, stosując (2). Ostatnia równość wynika więc z (3).

Wynikają stąd dwa bardzo ważne lematy:

LEMAT O NAJLEPSZYM PRZYBLIŻENIU: Dla ustalonej liczby $M \in \mathbb{N}$ odległość $\|f - g\|_2$ od $f \in R^2(a, b)$ do dowolnego elementu g postaci (10) jest nie mniejsza, niż odległość od $S_M[f]$, czyli

$$\|f - S_M[f]\|_2 \le \|f - \sum_{k=-M}^{M} \alpha_k e_k\|_2$$

Faktycznie, prostopadłość $f - S_M[f]$ do e_k dla $|k| \le M$ i liniowość (2) iloczynu skalarnego implikują prostopadłość $f - S_M[f]$ do g oraz do $S_M[f] - g$. Teraz z (TP) (lub (3)) wynika, że $\|f - g\|_2^2 = \|f - S_M[f]\|_2^2 + \|S_M[f] - g\|_2^2$, co daje naszą tezę.

NIERÓWNOŚĆ BESSELA: Ciąg współczynników $c_k(f)$ funkcji $f \in R^2(a, b)$ jest sumowalny z kwadratem, przy czym

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \le \|f\|_2^2. \tag{15}$$

Zauważmy najpierw, że rozważany tu szereg jest bezwzględnie zbieżny, więc kolejność sumowania, czyli sposób ustawienia w ciąg -nie ma wpływu na wartość jego sumy. Sumę tego szeregu traktować możemy więc jako granicę $\lim_{M\to\infty} \sum_{k=-M}^{M} |c_k(f)|^2$. Każda z tych ostatnich sum jest, dzięki (12), (14) nie większa, niż $\|f\|_2^2$

1 Uklad trygonometryczny

Dla uproszczenia, przyjmijmy w dalszym ciągu $a = -\pi, b = \pi$ i rozważmy układ złożony z funkcji $\sin mt, \cos mt$. Wykorzystując parzystość tych ostatnich funkcji, możemy przyjąć, że $\phi_n(t) = \cos nt$ dla $n \in \mathbb{Z}, n \le 0$ oraz $\phi_n(t) = \sin nt$ dla $n \in \mathbb{N}$. Nietrudne przeliczenie wskazuje, że jest to układ ortogonalny: $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t)\phi_k(t)\,dt = 0$ dla $n \ne k$. Ponadto $\|\phi_n\|_2$ są równe $\sqrt{\pi}$ gdy $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $\|\phi_0\|_2 = \sqrt{2\pi}$.

Odpowiadającym mu układem ortonormalnym (czyli normalizacją (ϕ_n)) jest układ funkcji

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\phi_n \quad \texttt{dla} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ |t| \le \pi, \quad e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Jeszcze wygodniejszy w użyciu jest **zespolony układ trygonometryczny**, $\psi_n(t) := e^{int}$, również określony na przedziale $[-\pi, \pi]$, normy są tu jednakowe: $\forall_{n\in\mathbb{Z}} \|\psi_n\|_2 = \sqrt{2\pi}$, gdyż

$$\langle \psi_n, \psi_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t)\overline{\psi_k(t)}\,dt = 2\pi\delta_{nk}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Tradycyjnie, unikając użycia pierwiastkowania π używa się współczynników sinusowych ($b_n = b_n(f), n \in \mathbb{N}$) i cosinusowych ($a_n = a_n(f)$, $n = 0, 1, 2, \dots$) funkcji okresowej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π lub funkcji $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ określonych wzorami:

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Nie są to więc dokładnie współczynniki $c_n(f)$ względem układu unormowanego (e_n), gdyż np.

$$c_n(f) := \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\phi_n(t)\,dt = \sqrt{\pi}a_n(f) \ \texttt{dla}\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Gdy $n=0$, $\sqrt{\pi}a_0(f)=2c_0(f)$. Ale dla $n\neq 0$ mamy

$$c_n(f)e_n(t)=c_n(f)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\phi_n(t)=\big\{a_n\cos nt \texttt{ gdy } -n\in\mathbb{N} \texttt{ oraz } \quad =b_n\sin nt \texttt{ dla } n\in\mathbb{N}\big\}. \tag{16}$$

Natomiast $c_0(f)e_0(t)=\frac{1}{2}a_0(f)$. Stąd sumy częściowe dane dla układu znormalizowanego wzorem (13), wyrażają się następująco:

$$S_M[f](x)=\sum_{k=-M}^{M}c_k(f)e_k(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{M}\big(a_n(f)\cos nx\,+\,b_n(f)\sin nx\big) \tag{17}$$

Podstawiając wzory całkowe na współczynniki, otrzymujemy (wykorzystując liniowość całki)

$$S_M[f](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\big[1+2\sum_{k=1}^{M}\cos k(x-t)\big]\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_M(x-t)\,dt,$$

gdzie przez D_M oznaczamy funkcję, której wartość w punkcie $s:=(x-t)$ dana jest w nawiasie kwadratowym w przedostatniej całce. Funkcję tę nazywamy **jądrem caki Dirichleta**.

Dla funkcji **okresowych** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o okresie $T>0$ mamy następujący

LEMAT O PRZESUNIĘCIU GRANIC CAŁKOWANIA: Gdy $a\in\mathbb{R}$, to $\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$.

Po podstawieniu $s=x-t$, $ds=-dt$ dolna granica całkowania z punktu $-\pi$ przejdzie do punktu $x+\pi$, zaś górna - do $x-\pi$, zamiana kolejności tych granic odpowiada zastąpieniu różniczkki $-ds$" przez $+ds$, co daje wzory:

$$S_M[f](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi}f(x-s)D_M(s)(-1)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-s)D_M(s)\,ds \tag{18}$$

Dotychczas wykorzystaliśmy jedynie wzór na $\cos(\alpha-\beta)$. Teraz wykorzystując inny wzór: $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)$, gdzie $\alpha=\frac{s}{2},\beta=ks$, otrzymamy po zastosowaniu nieparzystości sinusa i skreśleniu powtarzających się (z przeciwnym znakiem) składników, wzór:

$$D_M(s)=\frac{\sin\big((M+\frac{1}{2})s\big)}{\sin\frac{s}{2}}. \tag{19}$$

Równoważność układów trygonometrycznych: rzeczywistego i zespolonego wynika też stąd, że M-te sumy częściowe są takie same: Mnożąc stronami przez $\psi_1(s)-1$ sumę dla $\psi_k(s)$, otrzymamy bowiem

$$(\psi_1(s)-1)\sum_{k=-M}^{M}\psi_k(s)=\psi_{M+1}-\psi_{-M}, \tag{20}$$

co pomnożone stronami przez $\psi_{-\frac{1}{2}}(s):=\exp(-i\frac{s}{2})$ i uwzględnieniu równości $\psi_\alpha(s)-\psi_{-\alpha}(s)=2i\sin(\alpha s)$ zachodzących dla $s,\alpha\in\mathbb{R}$, daje równość $\sum_{k=-M}^{M}\psi_k(s)=D_M(s)$. Tak więc -obliczając M-tą sumę częściową dla f względem zespolonego układu ortonormalnego $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi_n$ otrzymamy dokładnie taki sam wzór, jak dla układu rzeczywistego! Współczynniki układu zespolonego często oznaczane są jako $c_n[f]$, ale my użyjemy innego oznaczenia:

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt,\quad S_M[f](t)=\sum_{n=-M}^{M}\hat{f}(n)e^{int}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-s)D_M(s)\,ds.$$

Będziemy korzystać z następujących, łatwych w dowodzie, własności tych funkcji:

WŁASNOŚCI D_M: Parzystość ($\forall_t\ D_M(-t) = D_M(t)$),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_M(t)\,dt = 1 \tag{21}$$

$$\forall_{b>0} \lim_{M\to\infty}\int_0^b |D_M(s)|\,ds = +\infty. \tag{22}$$

Faktycznie, całki każdego ze składników $\cos kx$, z wyjątkiem odpowiadającego $k = 0$ składnika $\frac{1}{2}$, są równe zero. Druga teza wynika z oszacowania mianownika we wzorze (19) przez $\frac{s}{2}$, co prowadezi po zmianie zmiennych do nierówności $\int_0^b |D_M(s)|\,ds \geq 2\int_0^{M+\frac{1}{2}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$. Całka niewłaściwa Dirichleta nie jest, jak wiemy, bezwzględnie zbieżna: $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = +\infty$.

Specyfiką obydwu rozważanych układów jest okresowość oraz ograniczoność każdej z funkcji układu (przez tę samą stałą).

Zauważmy, że funkcję określoną na $[-\pi,\pi]$ można przedłużyć do funkcji na $\mathbb{R}$ o okresie 2π, jeśli zmienimy, w razie potrzeby, jej wartość w jednym punkcie -np. w punkcie π. Współczynniki $a_n(f), b_n(f)$ nie ulegną przy tym zmianie, bo są wyrażone przez całkę, a ta jest „niewrażliwa" na zmiany wartości w skończonej ilości punktów. Jedynie możemy popsuć ciągłość, czy też różniczkowalność, ma więc sens pojęcie „funkcja ciągła okresowa na $[-\pi,\pi]$". Gdy obliczamy współczynniki i sumy częściowe $S_M[f]$ szeregu Fouriera, możemy wykorzystać parzystość D_M otrzymując:

$$S_M[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)D_M(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big\{f(x-t)+f(t+x)\Big\}D_M(t)\,dt.$$

Oznaczmy funkcję w nawiasie przez $g(t;x)$. Wówczas $\frac{1}{2}g(t;x)$ zmierza przy $t\to 0^+$ do średniej arytmetycznej granic: lewo- i prawo-stronnych dla f w punkcie x (czyli do $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$). Dirichlet wykazał następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE DIRICHLETA Gdy $f \in R^2(-\pi,\pi)$ jest w pewnym otoczeniu punktu x różnicą dwu funkcji monotonicznych (czyli funkcją o wahaniu ograniczonym), to wartości $S_M[f](x)$ ciągu sum częściowych szeregu Fouriera funkcji f zmierzają do $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$.

Poza częścią rachunkową, wykorzystującą m. inn. równość zachodzącą $\forall a > 0$:

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^a \frac{\sin Mt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

istotnym elementem dowodu jest inne ważne twierdzenie, znane jako Lemat Riemanna - Lebesgue'a:

TWIERDZENIE (LEMAT R-L) Gdy f ma zbieżną całkę z modułu, czyli $\int_a^b |f(t)|\,dt < \infty$, to całki $\int_a^b f(t)\sin nt\,dt$ zmierzają do zera przy $n\to\infty$.

Dowód Lematu R-L. Gdy $f \in R(-\pi,\pi)$, zaś $a = -\pi$, $b = \pi$, teza „R-L"wynika z nierówności Bessela (15), bo skoro ciąg współczynników Fouriera f względem układu unormowanego ma sumowalne kwadraty modułów, to musi on zmierzać do zera (a współczynniki, przez które mnożymy normalizując wyrazy ϕ_k dla $k \neq 0$ są stałe). Gdy przedział jest krótszy (np. $a = -\pi, b < \pi$), to możemy przedłużyć f zachowując pozostałe założenia, jeśli przyjmiemy $f(t) = 0$ dla $t \in (b,\pi]$, przez co sprowadzimy zagadnienie do poprzedniego przypadku. Gdy przedział jest dłuższy, dzielimy $[a,b]$ na skończoną sumę odcinków $[a_k,b_k]$ o długości $\leq 2\pi$ -każdy, całka $\int_a^b f(t)\sin nt\,dt$ wyraża się przez skończoną sumę całek w granicach od a_k do b_k -które zmierzają do zera przy $n\to\infty$. Pozostaje wytłumaczyć, dlaczego założenie $f \in R(a,b)$ można osłabić do założenia o zbieżności $\int_a^b |f(t|\,dt$, co prześledzimy w przypadku, gdy jest to całka niewłaściwa z punktem niewłaściwym b. Dla $a < \beta < b$ niech $f_\beta(t) = f(t)$ dla $t \in [a,\beta]$ oraz $f_\beta(t) = 0$ dla $\beta < t \leq b$. Jeśli (a tak zakładamy) b jest jedynym punktem niewłaściwym, to $f_\beta \in R(a,b) \subset R^2(a,b)$, zaś $\|f - f_\beta\|_1 = \int_\beta^b |f(t)|\,dt$ zmierza do zera przy $\beta\to b^-$. Wynika to niemal bezpośrednio z definicji całki niewłaściwej, jako granicy $\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta \ldots$ Mając więc zadane $\epsilon > 0$ dobieramy najpierw $\beta < b$ tak, by $\int_a^b |f(t)|\,dt < \int_a^\beta |f(t)|\,dt + \frac{\epsilon}{2}$, czyli $\|f - f_\beta\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Dla f_β- funkcji z $R(a,b)$ stosujemy poprzednią część dowodu wyznaczając n_0 tak, by dla $n \geq n_0$ było $|\int_a^b f_\beta(t)\sin nt| < \frac{\epsilon}{2}$. Wystarczy jeszcze skorzystać z nierówności trójkąta i z oszacowania $|\int_a^b f(t)\sin nt\,dt - \int_a^b f_\beta(t)\sin nt\,dt| \leq \int_a^b |(f(t)-f_\beta(t))\sin nt|\,dt \leq \|f - f_\beta\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$.

INNY DOWÓd (ten z wykładu): Zamiast z nierówności Bessela, skorzystamy z wyliczenia $\int_a^b \sin(\lambda t)\,dt = \frac{1}{\lambda}(\cos(\lambda a) - \cos\lambda b))$. Ta wartość zmierza do zera przy $\lambda\to+\infty$ nawet bez zakładania, że λ jest całkowita, więc możemy to wykorzystać np. dla $\lambda = n+\frac{1}{2}$ bezpośrednio. Zbiór $\mathfrak{M}$ tych funkcji f, dla których teza Lematu R-L zachodzi jest oczywiście zamknięty na branie skończonych kombinacji liniowych, bo całka zależy w sposób liniowy od funkcji podcałkowej f, zaś skończona suma ciągów (lub funkcji) zbieżnych do zera -też dąży do zera (przy $\lambda\to\infty$). Kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych przedziałów, to tzw. funkcje schodkowe- dla nich więc teza zachodzi.

Co więcej, zbiór $\mathfrak{M}$ jest domknięty w normie $\|\cdot\|_1$: gdy $f_n \in\mathfrak{M}$ oraz $\|f_n - f\|_1 \to 0$, to również $f \in \mathfrak{M}$. Faktycznie, gdy mamy zadaną wartość $\epsilon > 0$, dobieramy taki wskaźnik m, by $\|f_m - f\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Dla funkcji f_m znajdziemy z kolei liczbę $K > 0$ o tej własności, że dla wszystkich $\lambda > K$ mamy $|\int_a^b f_m(t)\sin(\lambda t)\,dt| < \frac{\epsilon}{2}$. Teraz stosujemy nierówność trójkąta:

$$|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt| \leq |\int_a^b (f(t)-f_m(t))\sin(\lambda t)\,dt| + |\int_a^b f_m(t)\sin(\lambda t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)-f_m(t)|\cdot 1\,dt + |\int_a^b f_m(t)\sin(\lambda t)\,dt| < \epsilon \text{ gdy } \lambda > k.$$

Pozostaje więc sprawdzić, czy dla $f \in R[a,b], \epsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa h dla której $\|h - f\|_1$ do f. Z warunku całkowalności wynika, że dla dowolnie zadanego $\epsilon > 0$ istnieje podział odcinka $[a,b]$ punktami $(t_j), 1 \leq j \leq m$ dla którego różnica $\overline{S}_m - \underline{s}_m$ między górną i dolną sumą całkową nie przekracza $\frac{\epsilon}{2}$. Funkcja $h(t)$ równa $\sup\{f(s) : s \in [t_{j-1}, t_j]\}$ na odcinku $[t_{j-1}, t_j)$ jest funkcją schodkową taką, że $\int_a^b h(s)\,ds = \overline{S}_m$ oraz $f(s) \leq h(s)$ we wszystkich punktach. Stąd $\|h - f\|_1 = \int_a^b |h(s) - f(s)|\,ds = \int_a^b (h(s) - f(s))\,ds = \overline{S}_m - \int_a^b f(s)\,ds \leq \overline{S}_m - \underline{s}_m < \frac{\epsilon}{2}$. Przedostatnia nierówność wynika z przedstawienia w analogiczny sposób sumy dolnej $\underline{s}_m = \int_a^b \sum_{j=1}^m \inf\{f(s) : s \in [t_{j-1}, t_j]\} \cdot \chi_{[t_{j-1}, t_j)}(s)\,ds$ i z nierówności pomiędzy taką funkcją schodkową oraz f. Ostatni fragment dowodu- przypadek f mającej zbieżną całkę niewłaściwą z modułu- był omawiany w poprzedniej wersji dowodu.

Dowód Tw. Dirichleta poprzedzimy wyliczeniem całki niewłaściwej z $\frac{\sin t}{t}$ wykorzystując lemat (R-L). Ustalmy $a > 0$. Podstawiając za Ls zmienną t, mamy $\int_0^a \frac{\sin(Ls)}{s}], ds = \int_0^{La} \frac{\sin t}{t}\,dt$, co zmierza do $I := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$. Zbieżność ostatniej całki wynika z kryterium Dirichleta. Wykażemy, że $I = \frac{\pi}{2}$, a nawet nieco więcej:

2 Sumowanie -metoda srednich

Już w II połowie XIX w. (1873) zauważono, że dla funkcji ciągłych okresowych szereg Fouriera może nie być zbieżny jednostajnie, a nawet punktowo, do rozwijanej funkcji f. Z punktu widzenia praktyki wiadomo, że zakłócenia w teorii sygnałów związane są z "pewną nadreprezentacją wysokich częstotliwości", czyli składników $a_n(f)\cos nx$, $b_n(f)\sin nx$ dla dużych wartości n. Podana poniżej prosta procedura prowadzi do tłumienia wpływu tych składników i eliminuje ich niekorzystny wpływ na rekonstrukcję sygnału wyjściowego f. Gdy ciąg $S_n[f]$ dąży do f, ciąg średnich arytmetycznych będzie też zbieżny do tej samej granicy. Ale średnie mogą być (i będą, jak wykażemy dla f ciągłej, okresowej) zbieżne do f również w sytuacji, gdy sam ciąg $S_n[f]$ jest rozbieżny. Dokładniej, definiujemy:

Średnią Cesáro rzędu M dla f nazwiemy funkcję daną wzorem

$$\sigma_M[f](x) = \frac{1}{M+1}\big(S_0[f](x) + S_1[f](x) + \cdots + S_M[f](x)\big)$$

Jeśli zastosować dodawanie (dla $N = 0, 1, \ldots M$) stronami do wzoru całkowego

$$S_N[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,dt,$$

otrzymamy następujący wzór:

$$\sigma_M[f](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Big\{\frac{D_0(t) + \cdots + D_M(t)}{M+1}\Big\}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_M(t)\,dt, \tag{24}$$

w którym $K_M(t)$ oznacza średnią arytmetyczną $\frac{D_0(t)+\cdots+D_M(t)}{M+1}$, zwaną jądrem całki Fejéra

Jeśli we wzorze (20) pomnożymy obydwie strony równości przez $\psi_{-1} - 1$, korzystając z równości $\psi_{-k}(s) + \psi_k(s) = 2\cos(ks)$ otrzymamy wzór

$$K_M(s) = \frac{1}{M+1}\cdot\frac{1 - \cos((M+1)s)}{1 - \cos s}.$$

Twierdzenie Fejéra. Średnie Cesáro funkcji ciągłej, okresowej o okresie 2π zmierzają jednostajnie do f na przedziale $[-\pi, \pi]$.

Faktycznie, wykorzystamy 3 podstawowe własności K_M:

1. (1) ich średnia całkowa po odcinku $[-\pi, \pi]$ wynosi 1, bo tyle wynosi ona dla D_n, a średnia arytmetyczna z jedynek, to 1.

2. Są to funkcje nieujemne (więc $\|K_M\|_1 = 2\pi$, dzięki (1)).

3. Poza otoczeniem zera, czyli dla $t \in \Omega_\delta := [-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$, gdy $\delta > 0$ ustalimy, są jednostajnie zbieżne do zera: $|K_N(t)| \leq \frac{2}{(N+1)(1-\cos\delta)}$.

Teraz dzięki (1), możemy zapisać $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_M(t)\,dt$, więc

$$2\pi|f(x) - \sigma_M[f](x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-t)K_M(t)\,dt\right| = \left|\left\{\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\Omega_\delta}\right\}(f(x) - f(x-t))K_M(t)\,dt\right|.$$

Moduł pierwszej z całek jest dowolnie mały dla dostatecznie małych $\delta > 0$, dzięki jednostajnej ciągłości f i z oszacowania $\int |K_M(t)|\,dt$ przez 2π. W drugiej całce (po 2 odcinkach dających w sumie zbiór Ω_δ) szacujemy $|f(x) - f(x-t)|$ przez normę supremową: $2\,\|f\|_{[-\pi,\pi]}$, zaś $|K_M(t)|$ przez wyrażenie z (3), zmierzające do zera jednostajnie na Ω_δ.

Wynikają z tego 3 bardzo istotne i nietrywialne fakty:

Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa Każda funkcja ciągła $f \in C[a,b]$ jest granicą ciągu (restrykcji do [ab]) wielomianów zbieżnego jednostajnie, czyli w normie supremowej $\|\ \|_{[a,b]}$

Faktycznie, gdy $a = -\pi, b = \pi$ oraz $f(a) - f(b)$, to dla $\epsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, dla którego $\|f - \sigma_n[f]\| < \frac{\epsilon}{2}$. Ponieważ średnia Cesáro, jako wielomiany trygonometryczne, mają szereg potęgowy Taylora zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[-r, r]$, pewna jego suma częściowa (wielomian Taylora, powiedzmy T_m) spełnia warunek $\|\sigma_n[f] - T_m\|_{[a,b]} < \frac{\epsilon}{2}$. Nierówność trójkąta daje więc $\|f - T_m\| < \epsilon$. W przypadku ogólnym -przedłużamy f do funkcji ciągłej okresowej na większym przedziale, np. w $[a, b+1]$ Taką funkcję możemy teraz traktować jak okresową o okresie $2c = b+1-a$ na $\mathbb{R}$, a więc i na przedziale symetrycznym $[-c, c]$. Podstawiając nową zmienną $s = \frac{c}{\pi}t$ otrzymamy funkcję okresową ciągłą na $[-\pi, \pi]$, którą przybliżamy jednostajnie wielomianami. Zamiana zmiennych zachowuje fakt bycia wielomianem, jak i zbieżność jednostajną.

Zupełność układu trygonometrycznego

Zbieżność jednostajna implikuje zbieżność w normie $\|\ \|_2$ na zbiorach miary skończonej. Średnie Cesaró przybliżają jednostajnie funkcje ciągłe okresowe, a średnie te należą do obwiedni liniowej układu trygonometrycznego. Na wykładzie udowodniełem, że funkcje ciągłe okresowe przybliżają w $\|\ \|_2$ funkcje schodkowe, a te ostatnie przybliżają w $\|\ \|_2$ każdą funkcję całkowalną w sensie Riemanna ($f \in R[-\pi, \pi]$) lub, ogólniej -każdą funkcję, dla której zarówno f, jak i $|f|^2$ mają zbieżne całki niewłaściwe Riemanna. Oznacza to, że jest co najwyżej skończenie wiele punktów niewłaściwych dla f. Warunek zupełności układu ortogonalnego (ϕ_n) względem takich f oznacza, że gdy $\forall_n f \perp \phi_n$, to musi być $\|f_2\| = 0$, czyli $f = 0$ prawie wszędzie (=poza zbiorem miary Lebesgue'a zero). Przy takich założeniach o prostopadłości f do układu trygonometrycznego -$\forall \epsilon > 0$ ze wspomnianej gęstości kombinacji liniowych $\psi = \sum_{n=-M}^{M} c_n phi_n$ układu trygonometrycznego, znajdziemy wielomian trygonometryczny ψ, dla którego $\|f - \psi\|_2 < \epsilon$. Teraz $f \perp \psi$ oraz równość $\|f\|_2^2 = \langle f, \psi\rangle + \langle f, f - \psi\rangle \leq 0 + \|f\|_2\|f - \psi\|_2$ implikują $\|f\|_2 \leq \epsilon$, co przy dowolności $\epsilon > 0$ daje oczekiwaną równość: $\|f\|_2 = 0$.

Zbieżność $S_M[f]$ **do** f **w normie średniokwadratowej** $\|\ \|_2$ (oznaczanej dalej $\|\ \|$). Jeżeli ψ jest jak w poprzednim dowodzie, i dla uproszczenia zamiast $S_M[f]$ zapiszemy S_M, to ponieważ $f - S_M[f] \perp \phi_n$ dla $|n| \leq M, n \in \mathbb{Z}$, mamy też $f - S_M \perp \psi - S_M$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy $\|f - \psi\|^2 = \|f - S_M\|^2 + \|S_M - \psi\|^2$. Wynika stąd

Lemat o Najlepszym Przybliżeniu : $\|f - S_M\| \leq \|f - \psi\|$, czyli w normie średniokwadratowej M-ta suma częściowa szeregu Fouriera jest bliższa f, niż jakikolwiek inny wielomian trygonometryczny odpowiadający ćzęstotliwościom $|m| \leq M$. W przypadku f ciągłej, okresowej -mamy dla $\psi = \sigma_M$ nierówność: $\|f - S_M\| \leq \|f - \sigma_M\| \leq \sqrt{2\pi}\|f - \sigma_M\|_{[-\pi,\pi]} \to 0$ przy $M \to \infty$. Z wykazanego wcześniej wzoru na $\|S_M[f]\|^2$ (z dowodu nierówności Bessela) otrzymujemy $\|S_M[f]\| \leq \|f\|$, czyli operator liniowy przypisujący funkcji f funkcję $S_M[f]$ spełnia w normie średniokwadratowej warunek Lipschitza ze stałą 1. Przybliżając f spełniającą najogólniejsze założenia tw. o zupełności układu w normie $\|\ \|_2$ przez funkcje ciągłe okresowe, otrzymamy wartość $\|f - S_M[f]\|$ dowolnie małą dla M dostatecznie dużych.