Zebrane wiadomości o funkcjach ciągłych

Gdy $D \subset \mathbb{R}^m$ jest dziedziną odwzorowania $F : D \to \mathbb{R}^k$, to $F(P) = (f_1(P), \ldots, f_k(P))$ dla $P \in D$, czyli odwzorowanie jest zestawieniem funkcji $f_1, \ldots, f_k$ o wartościach skalarnych (rzeczywistych).

DEFINICJA 1^a**.** Mówimy, że F *jest odwzorowaniem ciągłym w punkcie* $P_0 \in D$, jeśli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{P\in D}\ \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow \|F(P) - F(P_0)\| < \epsilon. \tag{1}$$

Tu dla $P = (x_1, \ldots, x_m)$ symbol $\|P\|$ oznacza normę euklidesową $\|P\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$. *Odwzorowanie ciągłe na zbiorze* $E \subset D$, to odwzorowanie ciągłe w każdym punkcie $P_0 \in E$ tego zbioru.

Ponieważ wszystkie normy na przestrzeni skończenie wymiarowej są równoważne -definiują te same funkcje ciągłe, zamiast $\|P\|$ można używać np. normy maksimum: $\|P\|_{\max} := \max(|x_1|, \ldots, |x_m|)$, oznaczanej też $\|P\|_\infty$, lub jednej z norm o wykładniku $q \geqslant 1$, a mianowicie $\|P\|_q = \sqrt[q]{|x_1|^q + \ldots + |x_m|^q}$. Uzasadnieniem powyższej notacji jest prosty do sprawdzenia fakt: $\|P\|_{\max} = \lim_{q\to\infty} \|P\|_q$. (Sprawdzenie mniej oczywistego, gdy $p \neq 1$ faktu, że $\| \cdot \|_q$ jest faktycznie normą -pomijamy.) Odnotujmy jedynie bardzo ważne oszacowane:

$$\|P\|_\infty \leqslant \|P\| \leqslant \sqrt{m}\|P\|_\infty, \tag{2}$$

dzięki któremu widać możliwość zamiany normy euklidesowej na normę maksimum w naszej definicji (1) -przynajmniej po prawej stronie implikacji, gdzie (przy danym układzie kwantyfikatorów) zamiast $\|F(P) - F(P_0)\| < \epsilon$ możemy umieścić $\|F(P) - F(P_0)\|_{\max} < \epsilon$, co równoważne jest koniunkcji warunkóe $|f_1(P) - f_1(P_0)| < \epsilon, \ldots, |f_k(P) - f_k(P_0)| < \epsilon$.

WNIOSEK: *Ciągłość zestawienia* $F = (f_1, \ldots, f_k)$ *w punkcie* P *jest równoważna ciągłości każdej z zestawianych funkcji* $f_j, j = 1, \ldots, k$ *w tym punkcie.*

Zamieniając normę różnicy $\|P - P_0\|$ przez odległość $d(P, P_0)$ możemy sformułować definicję ciągłości w sensie dowolnej metryki d określonej na zbiorze D (oraz drugiej metryki d_1 określonej na przeciwdziedzinie F):

DEFINICJA 1^b**.** Odwzorowanie $F : D \to D_1$ między przestrzeniami metrycznymi $(D, d), (D_1, d_1)$ jest ciągłe w punkcie $P_0 \in D$, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{P\in D}\ d(P, P_0) < \delta \Rightarrow d_1(F(P), F(P_0)) < \epsilon. \tag{3}$$

WARUNEK HEINEGO (zwany też **ciągową ciągłoscią**): Odwzorowanie F przekształca dowolny ciąg punktów $P_n \in D$ zbieżny do P_0 w ciąg $(F(P_n))$ zbieżny do $F(P_0)$.

W przestrzeniach metrycznych jest to warunek równoważny ciągłości, dowód jest taki sam, jak dla funkcji 1 zmiennej (w trudniejszym kierunku -dowodzimy nie wprost).

Wnioskujemy stąd, że suma odwzorowań ciągłych , iloczyn skalarny, iloczyn funkci ciągłych - są ciągłe. Podobnie, jak złożenie odwzorowań ciągłych.

Dla $m = k = 1$ mieliśmy możliwość wykorzystywania struktury porządku liniowego na $\mathbb{R}$ (zgodnego z własnościami topologicznymi). Niestety, brak takiej możliwości jest źródłem istotnych trudności. Na przykład, dla przedziału $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$ injekcja ciągła $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ miała ciągłą odwrotną: $f^{-1} : f[D] \to D$. Dla $k = 2$, $D = [0, 2\pi)$ odwzorowanie określone wzorem $F(t) = (\sin t, \cos t)$ jest ciągłe (na okrąg jednostkowy), bez ciągłej odwrotności. Odwzorowanie $F : D \to D_1$ nazywamy *homeomorfizmem,* gdy jest to bijekcja ciągła, której odwrotna: $F^{-1} : D_1 \to D$ jest też ciągła. Mówimy wtedy też, że przestrzenie metryczne (D, d) oraz (D_1, d_1) są homeomorficzne. Można wykazać, że okrąg nie jest homeomorficzny z żadnym podzbiorem prostej, sfera (brzeg kuli w $\mathbb{R}^3$) -nie jest homeomorficzna z żadnym podzbiorem płaszczyzny, żaden niepusty zbiór otwarty w $\mathbb{R}^m$ nie jest homeomorficzny z żadnym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$ dla $m \neq k$. Co więcej, obraz homeomorficzny zbioru otwartego D w $\mathbb{R}^m$ przez injekcję ciągłą $F : D \to \mathbb{R}^m$ jest otwarty. (Jest to tak zwane *twierdzenie o niezmienniczości obszaru.*)

Warto podkreślić, że w odróżnieniu od norm, dwie metryki d, d_* na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^m$ nie są na ogół równoważne, na przykład dla tzw. metryki dyskretnej $\delta(P, Q) = 1$ gdy tylko $P \neq Q$, zaś $\delta(P, P) = 0(\forall_{P\in D})$ każde odwzorowanie $F : D \to D_1$ jest ciągłe (co łatwo zauważyć =ćwiczenie). Z kolei, żadne odwzorowanie $G : [0, 1] \to D$ różne od stałego nie jest ciągłe, gdy na odcinku $[0, 1]$ mamy metrykę eklidesową, zaś na zbiorze D -dyskretną. (dowód -za chwilę). Z tego powodu, na ogół nie będziemy rozważać abstrakcyjnych metryk na obszarach w $\mathbb{R}^m$, pozostając przy kontekście definicji (1).

Jednak w poniższym twierdzeniu wygodnie będzie używać metryk. Chodzi o to, by uniknąć pojęcia podprzestrzeni i zbiorów relatywnie otwartych (domkniętych) -a taki sens mają punkty (c), (d). Na przykład, dziedziną F może być okrąg na płaszczyźnie, przeciwobrazy czegokolwiek -jako podzbiory okręgu, nie będą przecież otwarte w $\mathbb{R}^2$. Jeśli D traktować jako podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$, to podzbiorami otwartymi U w podprzestrzeni D są dokładnie zbiory postaci $U = V \cap D$, gdzie V jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, czyli tzw. zbiory relatywnie otwarte. Wyniknie to z punktu (c) poniższego twierdzenia, bo odwzorowanie inkluzji: $j_D : D \ni P \to P \in \mathbb{R}^m$ jest ciągłe (jest to izometria, więc mamy warunek Lipschitza), przeciwobrazem jest odpowiednie przecięcie: $j_D^{-1}[V] = V \cap D$.

TWIERDZENIE. Niech F będzie odwzorowaniem przestrzeni metrycznej (D, d) o wartościach w przestrzeni (D_1, d_1). Następujące warunki są równoważne:

a) Odwzorowanie F jest ciągłe w każdym punkcie P_0 przestrzeni D,

b) $\forall_{P_0 \in D}$ i dla każdego otoczenia W punktu $F(P_0)$ w przestrzeni (D_1, d_1) istnieje otoczenie: U punktu P_0, którego obraz zawiera się w W, czyli $F[U] \subset W$.

c) Przeciwobraz każdego zbioru otwartego w przestrzeni (D_1, d_1) jest otwarty.

d) Przeciwobraz każdego zbioru domkniętego w przestrzeni (D_1, d_1) jest domknięty.

e) Obraz domknięcia $\overline{E}$ dowolnego podzbioru $E \subset D$ zawiera się w domknięciu obrazu: $F[\overline{E}] \subset \overline{F[E]}$.

`[Dowód]` $(a \Rightarrow b)$: Zbiór W zawiera pewną kulę $K(F(P_0), \epsilon) = \{y \in D_1 : d_1(F(P_0), y) < \epsilon\}$. Z warunku ciągłości (3) dobieramy $\delta > 0$. Dla $U = K(P_0, \delta) = \{P \in D : d(P_0, P) < \delta\}$ inkluzja $F[U] \subset K(F(P_0), \epsilon)$ jest przeformułowanym warunkiem ciągłości: (3). Wystarczy teraz skorzystać z relacji $K(F(P_0), \epsilon) \subset W$ i z przechodniości inkluzji.

$(b \Rightarrow c)$: Jeśli zbiór $W \subset D_1$ jest otwarty oraz $P_0 \in F^{-1}W$, to $F(P_0) \in W$ oraz W jest otoczeniem tego punktu, dla W dobieramy U -otoczenie P_0 tak, jak w (b), stąd $U \subset F^{-1}[W]$, co dowodzi otwartości tego przeciwobrazu.

$(c \Rightarrow d)$: Zbiór K jest domknięty (w przestrzeni metrycznej (D_1, d_1)) wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie, czyli zbiór $W := D_1 \setminus K$ jest otwarty. Ale jego przeciwobrazem jest zbiór $U := D \setminus F^{-1}[K]$, otwarty na mocy (c). Domkniętość $F^{-1}[K]$ wynika teraz z otwartości U.

$(d \Rightarrow e)$: Korzystamy z prostego faktu: domknięcie jest zawsze zbiorem domkniętym. Dla $K = \overline{F[E]}$ mamy zbiór domknięty: $F^{-1}[K]$ zawierający cały zbiór E. Domknięcie jest najmniejszym spośród domkniętych nadzbiorów, więc $\overline{E} \subset F^{-1}[K]$. Obkładając tę inkluzję przez operację brania obrazu, otrzymamy $F[\overline{E}] \subset F[F^{-1}[K]] \subset K$.

$(e \Rightarrow a)$: Tym razem -proponuję nie wprost: gdyby w pewnym punkcie P_0 nie było ciągłości, to przy pewnym $\epsilon_0 > 0$ znajdziemy (dla $\delta = \frac{1}{n}$) punkty $P_n \in D$ takie, że $d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}$, ale $d_1(F(P_n), F(P_0)) \geqslant \epsilon_0$. Gdy $E = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, to $P_0 \in \overline{E}$, ale odległość $F(P_0)$ od obrazu: $F[E]$ jest $\geqslant \epsilon_0$, wobec czego ten punkt nie leży w domknięciu $F[E]$, wbrew założeniu. `[Q.e.d.]`

W zbiorze dwuelementowym $D_1 = \{0, 1\}$ metryka euklidesowa pokrywa się z metryką dyskretną, a w tej ostatniej dowolny punkt jest kulą otwartą o promieniu $r = \frac{1}{2}$, wiec jest otwarty. Każdy podzbiór przestrzeni dyskretnej jest otwarty -a (dzięki otwartości jego dopełnienia) również -domknięty. Wykazane w poprzednim fragmencie twierdzenie o spójności [0,1] dowodzi dzięki warunkom (c), (d) -stosowanym do przeciwobrazów $F^{-1}[\{0\}]$, $F^{-1}[\{1\}]$, że są to dwa relatywnie otwarte, rozłączne podzbiory odcinka, dające w sumie cały [0,1]. Jeden z nich musi więc być pusty. F musi więc być stała. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej przestrzeni dyskretnej D_1 -wykazując, że przeciwobraz tylko jednego zbioru jednopunktowego $\{q\}$ może być niepusty. (rozważamy wówczas zbiory relatywnie otwarte, rozłączne $F^{-1}[\{q\}]$ oraz $F^{-1}[D_1 \setminus \{q\}]$, których sumą mnogościową jest [0,1], gdy $F : [0, 1] \to D_1$ jest ciągłe.

Przypomnijmy, gdy D jest podprzestrzenią przaestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$, to zbiory otwarte w D jako przestrzeni metrycznej (z zawężoną do D metryką euklidesową) -to takie zbiory $E \subset \mathbb{R}^m$, które są relatywnie otwarte w zbiorze D, czyli postaci $V \cap D$, gdzie V jest pewnym podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$. Jedynie wtedy, gdy D jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, pojęcia zbiorów: otwartych relatywnie (względem D) oraz otwartych w $\mathbb{R}^m$ i zawartych w D są równoważne. Faktycznie, przecięcie dwu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Jest parę równoważnych definicji przestrzeni spójnych i spójnych podzbiorów w przestrzeni euklidesowej (na razie interesują nas te ostatnie).

DEFINICJA S1 Przestrzeń metryczna D jest spójna, gdy jedynymi jej podzbiorami równocześnie otwartymi i domkniętymi są $\emptyset$ oraz D. Równoważnie, nie istnieją zbiory niepuste, otwarte (w przestrzeni D) i rozłączne W, U takie, że $D = U \cup W$.

DEFINICJA S2 Przestrzeń metryczna D jest spójna, gdy jedynymi odwzorowaniami ciągłymi o wartościach w przestrzeni dyskretnej są odwzorowania stałe. (w tym przypadku wystarczy ograniczyć się do przestrzeni dyskretnych dwupunktowych $\{0, 1\}$

Zbiory spójne w przestrzeni metrycznej, to zbiory, które są spójne jako podprzestrzenie danej przestrzeni metrycznej. Są to więc takie podzbiory D, w których jedynymi relatywnie otwartymi i równocześnie relat. domkniętymi podzbiorami są $\emptyset$ oraz D. Równoważnie, D nie jest sumą dwu niepustych, rozłącznych relatywnie otwartych podzbiorów.

Lemat: Gdy zbiory $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^m$ są spójne oraz $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, to $D_1 \cup D_2$ jest zbiorem spójnym. (najłatwiej wynika to z S_2).

TWIERDZENIE 1 Obraz przestrzeni spójnej przez odwzorowanie ciągłe jest zbiorem spójnym.

TWIERDZENIE 2 Zbiór otwarty $D \subset \mathbb{R}^m$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą w D.

TWIERDZENIE 3 Obraz zbioru spójnego, domkniętego i ograniczonego D przez funkcję ciągłą $f : D \to \mathbb{R}$ jest przedziałem domkniętym postaci $[m, M]$, gdzie $m = \min f[D], M = \max f[D]$.

Szkic dowodów: (1) Nie wprost: gdyby $F[D]$ był niespójny, to istnieje $\Phi : F[D] \to \{0, 1\}$ -różne od stałej odwzorowanie ciągłe o wartościach w dwupunktowej przestrzeni dyskretnej. $\Phi \circ F$ też nie będzie stałe, a ciągłość jego jest oczywista.

(2) Jeżeli D jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, ustalmy $P_0 \in D$ i niech

$$G := \{P \in D : P \ \texttt{można połączyć łamaną z} \ P_0\}.$$

Oczywiście, $G \neq \emptyset$, bo $P_0 \in G$. Jeśli wykażemy, że zarówno G jak i $D \setminus G$ są relatywnie otwarte (w przypadku otwrtego D -po prostu -otwarte w $\mathbb{R}^m$), to ze spójności wyniknie, że $G = D$. To da jedną z implikacji. Faktycznie, gdy $[P_0; P_1; \ldots; P_j] \subset D$ oznacza odpowiednią łamaną łączącą P_0 z P_j, to z otwartości D, punkt P_j zawiera się tam wraz z pewną kulą U i każdy punkt P_{j+1} z tej kuli łączymy odcinkiem zawartym w $U \subset D$ punktem P_j, otrzymując łamaną złoąoną z $j + 1$ odcinków, łączącą P_0 z P_{j+1}, zawartą w D, stąd $U \subset G$, co daje otwartość G. Zamiast otwartości $D \setminus G$, wykażemy relatywną domkniętość G (tu nie można opuścić słowa "relatywna"). Tak więc, gdy $Q \in D$ oraz dowolnie blisko Q są punkty postaci P_j należące do G, wybierzmy taki punkt P_j zawarty w pewnej kuli o środku Q zawierającej się w zbiorze otwartym D. Teraz odcinek łączący P_j z Q zmieści się w zbiorze D i dołaczając go do poprzednio użytej łamanej -otrzymamy łamaną łączącą punkty P_0 oraz Q.

Implikacja przeciwna wynika z lematu. Dokładniej, wynika z niego spójność łamanej. (Można też skorzystać z faktu, że łamana jest obrazem odcinka przez odwzorowanie ciągłe.) Teraz można jeszcze wykazać jeden lemat: gdy dla każdej pary punktów $P, Q \in D$ istnieje zawierający je spójny podzbiór Λ przestrzeni D, to przestrzeń jest spójna. W przeciwnym przypadku dla pewnego odwzorowania ciągłego $F : D \to \{0, 1\}$ o wartościach w przestrzeni dyskretnej jest $F(P) \neq F(Q)$. Zawężenie F do podprzestrzeni Λ jest ciągłe, nie jest stałe, co w myśl S2 przeczy spójności Λ.

(3) Użyjemy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, by wykazać osiąganie wartości $M := \sup_D f$ oraz $m := \inf_D f$ -co zapewni ograniczoność f i należenie wartości m oraz M do obrazu. Na przykład, istnieje ciąg $P_n \in D$ taki, że $f(P_n) \to M$. Wybierając (dzięki tw. B-W) podciąg zbieżny, powiedzmy $P_{n_k} \to P_+$, z ciągłości (war, Heinego), otzymamay $f(P_{n_k}) \to f(P_+)$, ale jako podciąg zbieżnego ciągu liczbowego, zmierza on również do M. Stąd $f(P_+) = M \inf(D) \subset \mathbb{R}$. Łatwo sprwadzić (nie wprost), że spójny podzbiór $\mathbb{R}$, jakim dzięki Tw.1 jest $f(D)$, musi być przedziałem. Jego końcami są więc m, M.

Analogicznie wykazuje się następujące:

TWIERDZENIE 4 obraz przez odwzorowanie ciągłe zbioru domkniętego i ograniczonego w $\mathbb{R}^m$ jest domknięty i ograniczony.

Twierdzenia 1, 4 stanowią uogólnienia własności Bolzano - Darboux finkcji ciągłych na przedziale oraz twierdzenia Weierstrassa o ograniczoności o osiąganiu kresów przez funkcje ciągłe na domkniętych i ograniczonych podzbiorach osi liczbowej $\mathbb{R}$.