# Uzupełnienia do wykładu z analizy matematycznej, 05.III 2013

Przy okazji omawiania całek nieoznaczonych zauważyłem, że (zwłaszcza dla studentów z poprzedniej części B I roku matematyki) warto omówić przedłużanie funkcji ciągłych. Sformułować je można bez zmian w ogólnym kontekście przestrzeni metrycznych, ale na razie wystarczy rozważać podzbiory $D, X, Y$ zawarte w osi liczbowej $\mathbb{R}$. (W ogólniejszej sytuacji trzeba zakładać, że $Y$ ma tę własność, że każdy ciąg Cauchy'ego leżący w $Y$ ma granicę w $Y$, co dla $Y \subset \mathbb{R}$ oznacza, że zbiór $Y$ jest domknięty. *W ogólnej sytuacji -nasze założenie o $Y$ oznacza zupełność przestrzeni metrycznej $Y$ i w miejsce modułów z różnic należy wpisać odległości w sensie odpowiedniej metryki, nic więcej nie ulegnie zmianie.*)

W analizie spotyka się parę typów twierdzeń o przedłużaniu, zawsze jednak pojęcie *przedłużenia* jest takie samo (odwrotne do pojęcia restrykcji, czyli zawężenia):

**Definicja 1** *Odwzorowanie $F : X \to Y$ jest* **przedłużeniem odwzorowania** *$f : D \to Y$, gdy $D \subset X$ oraz $x \in D \Rightarrow F(x) = f(x)$. Innymi słowy, dziedzina $f$ jest podzbiorem dziedziny $F$, zaś zawężenie $F|_D$ jest równe $f$. Możemy skrótowo zapisać: $F \supset f$.* ***Przedłużenie ciągłe****, to takie $F \supset f$, dla którego odwzorowanie $F$ jest ciągłe (w sytuacjach, gdy można mówić o ciągłości)*

Oczywiście, bez zakładania czegoś o $F$, wystarcza w jakikolwiek sposób określić wartości $F(x)$ dla $x \in X \setminus D$, co nie jest ani jednoznaczne (w sensie twierdzenia poniżej), ani ciekawe. Natomiast w specjalnych sytuacjach jest co najwyżej jedno (albo dokładnie jedno) przedłużenie ciągłe.

Przypomnijmy, że **zbiór** $D \subset X$ jest **gęsty w** $X$, gdy każdy element zbioru $X$ jest granicą pewnego ciągu elementów zbioru $D$.

**Twierdzenie 1** (Jednoznaczność przedłużeń ciągłych) *Jeżeli $F : X \to Y$ oraz $G : X \to Y$ są przedłużeniami ciągłymi tej samej funkcji $f : D \to Y$, o dziedzinie $D$ gęstej w $X$, to $F = G$.*

(Dowód:)

Dla dowolnie ustalonego $x \in X$ znajdziemy ciąg o wyrazach $x_n \in D$ zbieżny do $x$. Ponieważ $F|_D = f = G|D$, dla każdego $n$ mamy $F(x_n) = f(x_n) = G(x_n)$. Ale z warunku Heinego (równoważnego ciągłości) mamy $\lim F(x_n) = F(x)$ oraz $\lim G(x_n) = G(x)$. Z tw. o jednoznaczności granicy ciągu wynika więc nasza teza: $F(x) = G(x)$. $\square$

Oczywiście, pewne funkcje ciągłe nie mają przedłużeń ciągłych. Na przykład, dla $\mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funkcja $f_0 : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f_0(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nie jest przedłużalna do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$, choć zbiór $\mathbb{R}_*$ jest gęsty w $\mathbb{R}$. Podobnie jest dla $f(x) = \frac{1}{x}$.

W przypadku zbiorów ograniczonych $D \subset \mathbb{R}$, jeśli rozważymy największy zbiór $X \subset \mathbb{R}$, w którym $D$ jest gęstym podzbiorem (czyli domknięcie zbioru $D$), to $X$ będzie zbiorem domkniętym i ograniczonym, a wówczas *twierdzenie Cantora* gwarantuje jednostajną ciągłość funkcji $F$ ciągłych na $X$. Ale $f$ -jako restrykcja, $F|_D = f$ też musi być jednostajnie ciągła -na zbiorze $D$. Otrzymamy więc jako **warunek konieczny na istnienie przedłużeń ciągłych** -jednostajną ciągłość. Jest on też **wystarczający** -nawet bez zakładania ograniczoności $D$:

**Twierdzenie 2** (Istnienie przedłużeń ciągłych) *Każde odwzorowanie jednostajnie ciągłe $f : D \to Y$ na podzbiorze gęstym $D$ w zbiorze $X$ ma przedłużenie ciągłe $F : X \to Y$, o ile $Y$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}$.*

(DOWÓD:) Dla ustalonego dowolnie $x \in X$ istnieje ciąg o wyrazach $x_n \in D$ zbieżny do $x$ (powiemy: *ciąg aproksymujący punkt* $x$). Wybierzmy jeden z takich ciągów. Jeśli ciąg $(f(x_n))$ będzie spełniał warunek Cauchy'ego (=`Teza 1`), to będzie on zbieżny (z tw. Cauchy'ego) -wówczas jego granicę oznaczmy symbolem $F(x)$. Aby taki zapis był poprawny, trzeba dodatkowo sprawdzić niezależność $\lim f(x_n)$ od wyboru ciągu aproksymującego $x$ (=`Teza 2`). Dla $x \in D$ jako aproksymujący go ciąg będziemy mogli wybrać ciąg stały -co da w takim przypadu równość $F(x) = f(x)$. Wówczas $F$ będzie przedłużeniem $f$ (ciągłym). Pozostanie do wykazania jednostajna ciągłość (`Teza 3`). Dowód podzieliliśmy więc na 3 etapy:

`Teza 1` *Obraz ciągu Cauchy'ego przez odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągiem Cauchy'ego*

(DOWÓD:) Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Mamy znaleźć miejsce $n_0 \in \mathbb{N}$, począwszy od którego" (czyli takie, że dla dla $n, k > n_0$ ) będzie $|f(x_n) - f(x_k)| < \epsilon$. Warunek jednostajnej ciągłości $f$ mówi, że dla naszego $\epsilon$ możemy dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ o ile tylko $s, t \in D, |s - t| < \delta$. Ponieważ $(x_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego (w którym zamiast $\epsilon$ weźmiemy $\delta$), znajdziemy takie $n_0$, począwszy od którego $|x_n - x_k| < \delta$. Podstawiając za $t$ wartości $x_n$, zaś za $s$ -wartości $x_k$, mamy $\forall_{n,k>n_0} |f(x_n) - f(x_k)| < \epsilon$, co dzięki dowolności $\epsilon > 0$ kończy dowód tej tezy. Zauważmy jeszcze, że dzięki domkniętości zbioru $Y$, granica ciągu o wyrazach $f(x_n)$ nie tylko istnieje w $\mathbb{R}$, ale również należy do $Y$. $\square$

`Teza 2` *Gdy $f : D \to Y$ jest jednostajnie ciągła, oraz ciągi o wyrazach $x_n, x'_n \in D$ są obydwa zbieżne do tego samego $x$, przy czym $f(x_n) \to y$ oraz $f(x'_n) \to y'$, to $y = y'$.*

(DOWÓD:) Wystarczy skonstruować ciąg zbieżny $(z_n)$, którego podciągami będą zarówno $x'_n$, jak i $x_n$ i następnie skorzystać z poprzedniej tezy. Dokładniej, niech $z_{2n} = x_n$ oraz $z_{2n+1} = x'_n$. Ciąg ten jest, jak łatwo sprawdzić, zbieżny do $x$, spełnia więc warunek Cauchy'ego. W myśl poprzedniej `tezy 1`, ciąg $f(z_k)$ ma granicę przy $k \to \infty$. Ale zarówno $y$, jak i $y'$ są jego punktami skupienia, co daje równość $y = y'$. $\square$

UWAGA! Dzięki tezom 1 i 2 otrzymujemy poprawnie określone odwzorowanie $F : X \to Y$ przedłużające $f$. W dowodzie tezy 3 wykorzystamy jedynie "ciągłość ograniczoną do podzbioru $D \cup \{x_0\}$ dla każdego $x_0 \in X$", oznaczającą, że dla $x \in D$ dostatecznie bliskich punktowi $x_0$ wartości $F(x)$ (czyli $f(x)$) są dowolnie bliskie wartości $F(x_0)$. Taką "okrojoną ciągłość" uzyskaliśmy dzięki metodzie konstrukcji wartości $F(x_0)$.

`Teza 3` *Przedłużenie ciągłe $F \supset f$ funkcji jednostajnie ciągłej jest jednostajnie ciągłe.*

(DOWÓD:) Idea dowodu polega tu na zastąpieniu punktów $\alpha, \beta \in X$ przez dostatecznie bliskie punkty $a, b \in D$, z wykorzystaiem jednostajnej ciągłości na zbiorze $D$. Mając zadane $\epsilon > 0$ dobierzmy $\delta > 0$ takie, by dla $a, b \in D$ spełniających nierówność $|a - b| < \delta$ było $|f(a) - f(b)| < \frac{\epsilon}{3}$. Dla dowolnej pary punktów $\alpha, \beta \in X$ takich, że $|\alpha - \beta| < \frac{\delta}{3}$ znajdziemy jakieś punkty $a, b \in D$ spełniające warunki: $|\alpha - a| < \frac{\delta}{3}$ oraz $|\beta - b| < \frac{\delta}{3}$. Takie punkty $a, b$ możemy znajdować dowolnie blisko punktów $\alpha, \beta$ -tak blisko, by $|f(a) - F(\alpha)| < \frac{\epsilon}{3}$ oraz $|f(b) - F(\beta)| < \frac{\epsilon}{3}$ -to dzięki ciągłości $F$ (rozumianej w ograniczonym sensie- ciągłości na zbiorach $D \cup \{\alpha\}$ oraz $D \cup \{\beta\}$). Z nierównosci trójkąta mamy też $|a - b| = |(a - \alpha) + (\alpha - \beta) + (\beta - b)| < 3\frac{\delta}{3} = \delta$, więc $|f(a) - f(b)| < \frac{\epsilon}{3}$. Teraz wypisujemy analogiczne oszacowanie typu $|F(\alpha) - F(\beta)| \leqslant |f(a) - F(\alpha)| + |f(a) - f(b)| + |f(b) - F(\beta)| < 3 = \frac{\epsilon}{=}\epsilon$ zachodzące przy powyższych założeniach.$\square$

.

Jeszcze prostszy jest dowód tezy 3 w przypadku, gdy jednostajna ciągłość jest wnioskiem z warunku Lipschitza, czyli gdy $\forall a, b \in D$ zachodzi oszacowanie przyrostu wartości $f$ poprzez przyrost argmentu (pomnożony przez pewną stałą $C \geqslant 0$ jednakową dla całego zbioru $D$):

$$|f(b) - f(a)| \leqslant C|b - a|.$$

Wtedy oszacowania z tą samą stałą otrzymamy dla ciągłego przedłużenia $F \supset f$, dzięki twierdzeniu o zachowaniu słabych nierówności po przejściu do granicy ciągów.

Można zapytać, co się stanie po ominięciu założenia o domkniętości $Y$ (dla $Y \subset \mathbb{R}$, lub założenia o zupełności $Y$ w przypadku przesrzeni metrycznych z pewną metryką $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$). Tym razem wystarczy "przedłużyć $Y$" -a bardziej poprawnie, zastąpić $Y$ przez tzw. uzupełnienie $\widetilde{Y}$ przestrzeni $Y$. Okazuje się, że zawsze przestrzeń metryczną $(Y, d)$ można traktować jako podzbiór pewnej przestrzeni zupełnej $(\widetilde{Y}, \widetilde{d})$, która jest w dodatku wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izometrii (równej identyczności na $Y$), o ile zażądamy, by $Y$ była gęstym podzbiorem w $\widetilde{Y}$. Nota bene, takie izometrie konstruujemy dzięki twierdzeniu o przedłużaniu - tu dla odwzorowania $Y \in y \to y \in \widetilde{Y_1}$ do (izometrii) $J : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y_1}$, gdy $\widetilde{Y}, \widetilde{Y_1}$ są dwoma uzupełnieniami tej samej przestrzeni $(Y, d)$. W przypadku $Y \subset \mathbb{R}$ wystarczy po prostu wziąć $\widetilde{Y} = \bar{Y}$ (domknięcie zbioru $Y$), z metryką euklidesową $d(s, t) = |t - s|$. Tak więc, w przypadku "niezupełnym" przedłużenie ciągłe $F$ dla $f : D \to Y$ jest jedynie wtedy możliwe, jeśli dopuścimy, by $F$ przyjmowało wartości w $\widetilde{Y}$.

Są jeszcze inne twierdzenia o przedłużaniu -ze zbiorów domkniętych (przedłużenia ciągłe, a nawet przedłużenia klasy $C^k$)- już bez jednoznaczności.

W przypadku funkcji analitycznych (równych w pewnym otoczeniu dowolnego punktu $z_0$ z dziedziny $D$ sumie swojego szeregu Taylora: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$) -gdy $D$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}$, istnieje przedłużenie analityczne do pewnego zbioru otwartego $\Omega$ na płaszczyżnie zespolonej $\mathbb{C}$ -i to jednoznaczne -przynajmniej, gdy $\Omega$ jest tzw. obszarem jednospójnym (czyli nierozcinającym płaszczyzny). Z drugiej strony, przedłużenia analityczne dla takich funkcji, jak pierwiastek kwadratowy, czy logarytm naturalny- na obszar $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nie są ciągłe- poruszając się wzdłuż okręgu jednostkowego napotkamy po pełnym obrocie na "skok". Aby uniknąć mówienia o "funkcjach wielowartościowych" -B. Riemann wprowadził pojęcie rozmaitości zespolonej (tzw. powierzchnie Riemanna), powstała też związana z tym geometria riemannowska, stanowiąca np. podstawę ogólnej teorii względności.

W czasie studiów poznacie jeszcze Państwo twierdzenie o przedłużaniu funkcjonałów liniowych ( z równoczesnym zachowaniem liniowości i pewnych oszacowań) wykazane niezależnie przez Hahna i Banacha.

Jedynie w algebrze liniowej przedłużanie liniowe (gdzie liniowość $F$ jest jedynym postulatem) jest proste (o ile mamy możliwość konstrukcji bazy). Jako ćwiczenie proszę zauważyć, że podzbiór $D$ w przestrzeni liniowej $X$ (nad ciałem $\mathbb{R}$) jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ ma przedłużenie do odwzorowania liniowego $F : X \to \mathbb{R}$. Z kolei, $D$ jest podzbiorem liniowo generującym (rozpinającym) $X$, gdy zachodzi jednoznaczność tego typu przedłużeń liniowych.