Wstępne uwagi o przestrzeniach metrycznych

Przypuśćmy, że w zbiorze X można każdej parze punktów $a, b \in X$ przypisać ich odległość, oznaczaną przez $d(a, b)$ w taki sposób, by wartości $d(a, b) \in [0, +\infty)$ i aby spełnione były 3 warunki (aksjomaty przestrzeni metrycznej):

1. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
2. $d(b, a) = d(a, b)$ oraz
3. $d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$.

Wówczas parę (X, d) nazywany **przestrzenią metryczną**. Zdefiniujemy **kulę otwartą** $K(x_0, r)$ o środku w punkcie x_0 i promieniu $r > 0$ jako zbiór

$$K(x_0, r) = \{y \in X : d(x_0, y) < r\}.$$

Na przykład, $d(s, t) = |t - s|$ określa "metrykę euklidesową" w $\mathbb{R}$ (jak również w $\mathbb{C}$). W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ dla $s = (x, y, z), t = (x_1, y_1, z_1)$ jako odległość (też często oznaczaną jako $|t - s|$, lub jednym z symboli: $\|t - s\|$, czy też $\|t - s\|_2$) bierzemy

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Można podać mnóstwo innych metryk, chociażby biorąc $d_{**}(s, t) = \min\{d(s, t), 1\}$, lub $d_*(s, t) = \frac{d(s,t)}{1+d(s,t)}$, otrzymamy z metryki d inne dwie metryki w pewnym sensie (określonym poniżej) równoważne z metryką d. Wygodnie będzie wprowadzić pojęcie **podprzestrzeni** (G, d) w **przestrzeni metrycznej** (X, d), jako zbioru $G \subset X$ z metryką d zawężoną do zbioru $G \times G$.

Definicja 1 *Mówimy, że **ciąg** punktów $x_n \in X$ **jest zbieżny** według metryki $d : X \times X \to [0, +\infty)$ do punktu $x_0 \in X$, pisząc wówczas $x_n \xrightarrow{d} x_0$, lub gdy wiadomo, o jaką metrykę chodzi -po prostu $x_n \to x_0$ lub $x_0 = \lim x_n$, jeżeli ciąg (liczbowy) odległości: $d(x_n, x_0)$ zmierza do zera w zwykłym sensie. Dwie **metryki** uważamy za **równoważne**, gdy zbieżności przez nie podyktowane są równoważne*

Można wykazać, że dla dowolnych norm na przestrzeni n-wymiarowej $\mathbb{R}^n$ (dla $n \in \mathbb{N}$) metryki przez nie generowane, tzn. określone wzorami typu

$$d(s, t) = \|t - s\| \tag{1}$$

są równoważne. (Sytuacja jest diametralnie odmienna w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych, gdzie punktami są np. pewne funkcje o wartościach rzeczywistych określone na zbiorach nieskończonych.)

Definicja 2 ***Ciąg*** *(x_n) w przestrzeni X z metryką d **spełnia warunek Cauchy'ego**, jeżeli*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{n,k}\ M < n < k \ \Rightarrow\ d(x_n, x_k) < \epsilon.$$

*Innymi słowy, od pewnego miejsca odległości między wyrazami ciągu stają się dowolnie małe. Mówimy, że **przestrzeń** X jest **zupełna**, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny. **Przestrzeń Banacha** − to taka przestrzeń wektorowa unormowana, która jest zupełna względem metryki generowanej przez normę tej przestrzeni wzorem (1).*

Definicja 3 Odwzorowanie *$F : X_1 \to X_2$ pomiędzy przestrzeniami metrycznymi (X_1, d_1) oraz (X_2, d_2) jest **ciągłe** w punkcie $x_0 \in X_1$, gdy*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X_1}\ d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(F(x), F(x_0)) < \epsilon. \tag{2}$$

*Ciągłość F w punktach podzbioru $D \subset X_1$ oznacza ciągłość w każdym ("z osobna") punkcie tego zbioru D. Odwzorowanie F jest **jednostajnie ciągłe** na przestrzeni (X_1, d_1), jeżeli zachodzi warunek:*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in X_1}\ d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(F(x), F(y)) < \epsilon. \tag{3}$$

Ciąłość w punkcie x_0 jest równoważna *warunkowi Heinego:* $x_n \to x_0 \Rightarrow F(x_n) \to F(x_0)$. Dowód, znany Pańtwu z przypadku euklidesowego dla $X = Y = \mathbb{R}$, przenosi się niemal bez zmian- zamiast modułów różnic trzeba użyć odległości w sensie odpowiednich metryk (i tyle). Łatwo wywnioskować stąd (dla X dowolnej, $Y = \mathbb{R}$ -euklidesowej), że suma, iloczyn, czy też iloraz funkcji ciągłych są ciągłe (poza miejscami zerowania się funkcji z mianownika).

UWAGA! Warunek ciągłości restrykcji $F|_D$ oznacza ciągłość w podprzestrzeni D i na ogół nie implikuje on ciągłości F traktowanej jako odwzorowanie ze zbioru X w punktach zbioru D. Na przykład, gdy F jest funkcją charakterystyczną zbioru $D = [1, +\infty)$, to $F|D$ jest stała, ale dla $X = Y = \mathbb{R}$ funkcja F ma skok w punkcie 1. Jest w miarę oczywiste, że restrykcja do podprzestrzeni funkcji ciągłej jest ciągła na tej podprzestrzeni. Podobnie jest dla jednostajnej ciągłości (która implikuje ciągłość).

Definicja 4 *Podzbiór W_0 przestrzeni metrycznej (X, d) jest* ***otoczeniem punktu*** *$x_0 \in X$, gdy do W_0 należą wszystkie punkty "dostatecznie bliskie" punktowi x_0, tzn. gdy*

$$\exists_{\delta>0} \forall_{x\in X} \quad d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; x \in W_0.$$

Zbiór otwarty*, to podzbiór W przestrzeni X, który jest otoczeniem każdego swojego punktu. Mówimy, że* ***zbiór*** *$A \subset X$ jest* ***domknięty****, gdy jego dopełnienie w X, czyli zbiór $X \setminus A$ jest otwarty.* ***Domknięciem zbioru*** *$E \subset X$ nazywamy najmniejszy domknięty nadzbiór zbioru E.* ***Zbiór gęsty*** *w przestrzeni X, to taki podzbiór, którego domknięciem jest cała przestrzeń X.*

UWAGI: Na ogół większość zbiorów nie jest ani otwarta, ani domknięta. W przypadku metryki euklidesowej i przedziałów otwartość w sensie zwykłym (porządkowym) jest równoważna otwartości metrycznej. Ale trzeba uważać na końce przedziałów równe $\pm\infty$: półproste -np. $[2, +\infty)$ są domknięte. Oś rozszerzoną o punkty w nieskończoności możemy też zmetryzować, przyjmując na przykład,

$$d_0(s, t) = |\texttt{arc tg}(s) - \texttt{arc tg}(t)|$$

dla s, t skończonych i granice tych wyrażeń w pozostałych przypadkach, np. $d_0(s, +\infty) = \lim_{x\to+\infty} d_0(s, x)$, $d_*(-\infty, +\infty) = \pi$. W tej metryce na $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ zbiór $[2, +\infty)$ już nie będzie domknięty. Tradycyjna definicja warunku $x_n \to +\infty$ jest równoważna warunkowi $\lim d_0(x_n, +\infty) = 0$.

Jedynie dla dwu zbiorów w przestrzeni (X, d) otwartość (i równocześnie domkniętość) są oczywiste: dla zbioru pustego i dla całej przestrzeni. Czy jeszcze jakieś zbiory zawsze są otwarte, niezależnie od specyfiki metryki? Jak sama nazwa wskazuje, takie powinny być kule otwarte, $K(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Lemat 1 *W przestrzeni metrycznej każda kula jest zbiorem otwartym.*

.

Dowód:Faktycznie, niech y będzie dowolnym elementem kuli $K := K(x, r)$. Wystarczy znaleźć $\delta > 0$ takie, by $K(y, \delta) \subset K(x, r)$. Wartość δ można odgadnąć z rysunku. Możliwie największą jest $\delta = r - d(x, y)$. Mamy $\delta > 0$, gdyż $d(x, y) < r$. Teraz dla $z \in K(y, \delta)$ mamy z nierówności trójkąta $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + (r - d(x, y)) = r$, więc faktycznie $z \in K(x, r)$.

Odległość punktu z **od zbioru** (niepustego) $E \subset X$ oznaczmy symbolem $\operatorname{dist}(z, E)$ i zdefiniujmy jako kres dolny:

$$\operatorname{dist}(z, E) = \inf\{d(z, x) : x \in E\}.$$

Zauważmy, że $\operatorname{dist}(x, \{y\}) = d(x, y)$ i gdy E jest zbiorem skończonym, to $x \notin E \Leftrightarrow \operatorname{dist}(x, E) > 0$. Dla zbiorów nieskończonych już tak być nie musi (np. odległość granicy ciągu od zbioru jego wyrazów wynosi zero).

Lemat 2 *Wykażemy, że domknięcie zbioru E jest następujący zbiór:*

$$\overline{E} = \{x_0 \in X : \exists_{x_n\in E} - \textit{ciąg zbieżny taki, że } x_0 = \lim x_n\}. \tag{4}$$

Szkic dowodu: Aby sprawdzić, że $E \subset \overline{E}$ -wystarczy mając dowolnie zadany punkt $e_0 \in E$ rozważyć ciąg stały, biorąc $x_n = e_0$. Sprawdźmy teraz domkniętość zbioru $\overline{E}$, czyli otwartość jego dopełnienia. Jeśli $y_0 \notin \overline{E}$, to należy znaleźć liczbę $\delta > 0$, dla której wszystkie punkty y leżące bliżej, niż δ są poza zbiorem $\overline{E}$.

W tym celu wygodnie jest najpierw zauważyć, że dla $y \in X$ zachodzi równoważność:

$$y \notin \overline{E} \Leftrightarrow \exists_{\delta>0}\; K(y, \delta) \cap E = \emptyset. \tag{5}$$

Faktycznie, dla ciągu punktów $y_n \in E$ zbieżnego do y przy dowolnie ustalonym $\delta > 0$ mamy $d(y_n, y) < \delta$ dla prawie wszystkich n, a ponieważ takie y_n leżą w $E \cap K(y, \delta)$, żadna z tych kul nie będzie zawierać się w $X \setminus E$. Na odwrót, gdy nie zachodzi warunek po prawej stronie badanej równoważności (4), to dla $\delta = \frac{1}{n}$ znajdziemy przynajmniej jeden element (oznaczmy go jako y_n) w zbiorze $K(y, \frac{1}{n}) \cap E$. Oczywiście, $d(y, y_n) < \frac{1}{n} \to 0$, więc $y = \lim y_n$, czyli $y \in \overline{E}$.

Dla zakończenia dowodu domkniętości $\overline{E}$ wystarczy sprawdzić, że gdy $K(y, \delta) \subset X \setminus E$, to również $K(y, \delta) \subset X \setminus \overline{E}$. W przeciwnym przypadku mielibyśmy przynajmniej jeden punkt $z \in K(y, \delta)$ należący do zbioru $\overline{E}$, więc dla pewnego ciągu punktów $y_n \in E$ byłoby $z = \lim y_n$. Dla n dostatecznie dużych byłoby $d(z, y_n) < \delta - d(y, z) = r$, przy czym $K(z, r) \subset K(y, \delta) \subset X \setminus E$, co jest sprzeczne z warunkami: $y_n \in E$ oraz $y_n \in K(z, r)$.

Aby wykazać, że $\bar{E}$ jest najmniejszym z domkniętych nadzbiorów trzeba sprwdzić, że gdy F jest domkniętym nadzbiorem E, zaś $\forall_n\; x_n \in E, \lim d(x_n, x_0) = 0$, to musi być $x_0 \in F$. W przeciwnym przypadku do zbioru otwartego

$X \setminus F$ należał by zarówno punkt x_0, jak i pewna kula $K(x_0, r), r > 0$. Z kolei, do tej kuli należeć powiny prawie wszystkie x_n, więc dla dostatecznie dużych n będzie $x_n \in X \setminus F \subset X \setminus E$, wbrew założeniu. □

Zbiór występujący w równości (4) jest nazywany domknięciem ciągowym zbioru E. W przestrzeniach topologicznych stanowiących uogólnienie przestrzeni metrycznych, moze zdarzyć się, że domknięcie jest istotnie większe, niż domknięcie ciągowe.

W jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej R opis wszystkich zbiorów otwartych jest dość prosty:

Twierdzenie 3 *Zbiór $G \subset \mathbb{R}$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy G jest sumą skończonej lub przeliczalna rodzina przedziałów otwartych J_n, które są parami rozłączne.*

Dowód: Z definicji zbioru otwartego wynika, że zawsze jest on sumą mnogościową pewnej rodziny kul otwartych. Suma mnogościowa przedziałów otwartych zawierających wspólny punkt i zawartych w G jest nadal przedziałem otwartym zawartym w G, więc każdy punkt $x \in G$ zawiera się w maksymalnym przedziale otwartym (oznaczmy go G_x) zawartym w zbiorze G. Co więcej, dla dowolnej pary punktów $x, y \in G$ jest albo $G_x = G_y$, albo $G_x \cap G_y = \emptyset$. (Bo gdy $G_x \cap G_y \neq \emptyset$, to $G_x \cup G_y$ jest przedziałem otwartym zawierającym każdy z tych punktów i korzystamy z własności elementów maksymalnych względem relacji zawierania.) Ponieważ $x \in G_x$, więc równość $G_x = G_y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in G_y$ i jeżeli $E \subset G$ jest zbiorem mającym dokładnie po jednym punkcie wspólnym z każdym ze zbiorów z rodziny $G_x : x \in G$, to

$$G = \bigcup_{x \in E} G_x, \quad \#E \leqslant \aleph_0.$$

Przeliczalność (lub skończoność) zbioru E wynika stąd, że dzięki gęstości (i przeliczalności) zbioru liczb wymiernych, każda rodzina parami rozłącznych przedziałów jest co najwyżej przeliczalna. Dowodziliśmy tego na I semestrze, rozważając zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej. □.

Nieciekawym (z punktu widzenia topologii) przykładem przestrzeni metrycznej na dowolnym niepustym zbiorze X jest tzw. przestrzeń dyskretna, gdzie metryka przyjmuje jedynie skończoną ilość wartości (np. 0,1). Wówczas każdy punkt $x \in X$ jest też kulą: $\{x\} = K(x, r)$, gdzie $0 < r \leqslant \rho$, gdzie ρ jest najmniejszą z niezerowych wartości przyjmowanych przez d na zbiorze $X \times X$. Co za tym idzie, każdy zbiór jest tu otwarty (i zarazem -domknięty), każdy ciąg zbieżny do x jest od pewnego miejsca stały, równy x. Każde odwzorowanie o dziedzinie X jest ciągłe. Domknięcie podzbioru jest równe temu podzbiorowi. Z kolei, jedyne funkcje ciągłe na przedziale (z metryką euklidesową) $J = [a, b]$ o wartościach w przestrzeni dyskretnej są stałe. Ostatni fakt wymaga dowodu. Wykażemy najperw "twierdzenie o spójności", następnie "charakteryzację ciągłości", i wówczas wspomniana teza stanie się ich oczywistą konsekwencją.

Twierdzenie 4 SPÓJNOŚĆ ODCINKA *Nie istnieją zbiory otwarte $U, W \subset \mathbb{R}$ takie, że*

$$a \in U, b \in W, \ U \cap W \cap [a, b] = \emptyset \ \textbf{\textit{oraz}} \ U \cup W \cap [a, b] = [a, b].$$

Dowód W dowodzie nie wprost załóżmy, że takie zbiory istnieją i niech

$$s := \sup\{t \in [a, b] : [a, t] \subset U\}.$$

Zbiór, którego kres rozważamy jest niepusty, należy do niego przynajmniej punkt a. Z otwartości U, nawet należy doń punkt $a + \epsilon$ dla dostatecznie małego $\epsilon > 0$. Gdyby $s \in U$, to dla pewnego $\epsilon > 0$ będzie $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset U$. Z definicji kresu, dla pewnego $t \in [a, b], t > s - \epsilon$ będzie $[a, t] \subset U$. Ale wówczas przedziały te mają punkty wspólne, więc $[a, t) \cup (s - \epsilon, s + \epsilon) = [a, s + \epsilon) \subset U$, zmniejszając (np. o połowę) epsilon orzymamy cały przedział domknięty postaci $[a, s + \epsilon']$ zawarty w U, co przeczy definicji supremum (jako majoranty). Pozostaje więc druga ewentualność: $s \in W$. Ale z otwartości W, również $(s - r, s + r) \subset W$ dla pewnego $r > 0$. Z założonej rozłączności, $(s - r, s + r)$ nie ma punktów wspólnych ze zbiorem $U \cap [a, b]$, choć z drugiej strony, z warunku minimalności kresu wśród majorant, powinno być $[a, t] \subset U$ dla pewnego $t > s - r$, co ponownie daje sprzeczność.

To jest bardzo ważna własność osi liczbowej, zwana **spójnością**. Stanowi ona klucz do własności Darboux funkcji ciągłych na przedziałach -lub na przestrzeniach metrycznych, których nie da się zapisać jako sumy mnogościowej dwu parami rozłącznych i niepustych zbiorów otwartych)

W przestrzeniach metrycznych są wygodne warunki równoważne ciągłości (w każdym z punktów przestrzeni), nieodwołujące się bezpośrednio do granic, bądź warunków kwantyfikatorowych z epsilonami i deltami. Przedstawię je w następnym odcinku. Jeden z nich brzmi: "*Przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty* (a domkniętego -domknięty)"