

## Zagadnienia z teorii z III semestru analizy (WMS) 21.01.2016

1. Różniczkowanie całki Riemanna wzgl. parametru (dla stałych i zmiennych granic całkowania).
2. Jednostajna zbieżność całki niewłaściwej -kryterium porównawcze (Weierstrassa), ciągła zależność takiej całki od parametru.
3. Tw. o różniczkowaniu całek niewłaściwych wzgl. parametru.
4. Wyprowadzenie wzoru na całkę krzywoliniową I typu (nieskierowaną) dla krzywej gładkiej, jej oszacowanie przy użyciu długości krzywej.
5. Definicja całki podwójnej i potrójnej po prostokącie (odp. po prostopadłościanie) i po obszarze normalnym, tw. o iterowaniu całki podwójnej Riemanna po prostokącie.
6. Całka krzywoliniowa skierowana (df, wzór), wzór Greena. zastosowanie: wzór pole obszaru.
7. Istnienie potencjału pola wektorowego na obszarze płaskim normalnym (warunki równow.).
8. Pole  $|S|$  powierzchni  $S$  w  $\mathbb{R}^3$  (def, wyprowadzenie wzoru w przypadku

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$$

i wzór bez dow. w przypadku parametrycznym).

9. Powierzchnie gładkie zorientowane  $\sigma$ , def. i wzór (+ uzasadnienie) na strumień pola przez  $\sigma$ .
  10. Dywergencja pola. Tw. Gaussa-Ostrogradskiego.
  11. Tw. Stokesa (idea dowodu).
  12. Definicja  $\sigma$ -algebry, tw. o generowaniu  $\sigma$ -algebry przez rodzinę zbiorów. Zbiory borelowskie.
  13. Definicja miary, elementarne własności ( $\mu(\emptyset) = \dots$ , skończona addyt., monotoniczność,  $\sigma$ -podaddytywność, ciągłość, wzór na  $\mu(B \setminus A)$  dla  $A \subset B$ ,  $\mu(A) < +\infty$ ,.)
  14. Nieistnienie nietrywialnej miary w  $2^{\mathbb{R}}$  niezmienniczej wzgl. przesunięć (przykład G.Vitaliego).
  15. Funkcje mierzalne, ich przybliżenie funkcjami prostymi, mierzalność granicy ( $\lim f_n$ ) i sumy funkcji mierzalnych.
  16. Definicja całki z funkcji mierzalnej, funkcje całkwalne i sumowalne. Monotoniczność całki. Zgodność z relacją *równości prawie wszędzie*.
  17. Twierdzenie o całce granicy ciągu monotonicznego. Addytywność całki.
  18. Lemat Fatou, tw. Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności.
  19. Dowód, że wzór  $m((a, b]) = b - a$  określa miarę na rodzinie  $\{(a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ . Uogólnienie dla:  $\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a)$ ,  $F$  prawostr. ciągłej niemalejącej.
  20. Generowanie miary zewnętrznej  $\mu^*$  przez miarę  $\mu$  (- sprawdzenie monotoniczności i przeliczalnej podaddytywności  $\mu^*$ ).
  21. Zbiory mierzalne dla  $\mu^*$  (warunek Carathéodory'ego), dow. mierzalności sumy dwu zbiorów mierzalnych i mierzalności zbioru  $E$ , gdy  $\mu^*(E) = 0$ .
  22. Definicja miary Lebesgue'a, jej zupełność. Tw. o rozszerzeniu miary z algebry na  $\sigma$ -algebrę.
  23. Miara Lebesgue'a  $m_2$  w  $\mathbb{R}^2$ . Twierdzenia: Tonellego i Fubinię dla  $m_2$  (bez dow., ale z uzasadnieniem konieczności założenia o całkwalności).
- (=koniec listy)