1 Wektory i topologia

(2.III 2021.)

Analiza funkcjonalna zajmuje się badaniem przestrzeni wektorowych z topologią zgodną z jej strukturą liniową. Szczególnie intensywnie badane są operatory liniowe, jak również inne odwzorowania na tych przestrzeniach. Ograniczymy się do przestrzeni wektorowych $X, Y, \ldots$ nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (z topologią naturalną). Mamy więc działania: dodawania wektorów i monożenia tych wektorów przez skalary. Zgodność topologii ze strukturą algebraiczną oznacza ciągłość tych działań.

1.1 Trochę o topologii

Zacznijmy od przypomnienia, że przez **topologię na przestrzeni** X rozumiemy rodzinę $\mathcal{V}$ (zwaną rodziną zbiorów otwartych), która zawiera $\emptyset, X$ oraz jest zamknięta na sumy mnogościowe dowolnej ilości zbiorów i na skończone przecięcia. Zbiór W nazywamy **otoczeniem punktu** $x_0 \in X$, gdy $\exists_{U\in\mathcal{V}} x \in\ U \subset W$ i piszemy wówczas $x \in \mathtt{int}(W)$. Tak więc zbiór $\mathtt{int}(W)$, zwany **wnętrzem** zbioru W jest największym otwartym podzbiorem zbioru W.

Topologia $\mathcal{V}_1$ na X jest słabsza od topologii $\mathcal{V}_2$ na X (zaś $\mathcal{V}_2$ jest silniejsza), gdy $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.

Wygodnie jest posługiwać się **bazą otoczeń** otwartych punktu x. Jest to taka rodzina $B_x \subset \mathcal{V}$, że gdy $U \in \mathcal{V}$ oraz $x \in U$, to istnieje zbiór $V \in B_x$ taki, że $x \in V \subset U$. Przykładem bazy otoczeń punktu x w przestrzeni metrycznej (X, d) jest rodzina wszystkich **kul** $K(x, r) := \{y \in X :\ d(x, y) < r\}$ o środku w punkcie x i promieniach $r > 0$, ale otrzymamy też bazę, gdy ograniczymy się do ciągu kul $K(x, \frac{1}{n})$ o promieniach $r = \frac{1}{n}$. Przestrzenie metryczne są więc przykładem przestrzeni spełniających **pierwszy aksjomat przeliczalności**, co oznacza istnienie przeliczalnych baz otoczeń dla każdego z punktów. Największą (ale niepraktyczną) bazą otoczeń x w ptzestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{V})$ jest

$$\mathcal{V}_x := \{U \in \mathcal{V} : x \in U\}.$$

Rodzina $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ jest **bazą topologii**, gdy każdy zbiór otwarty $U \in \mathcal{V}$ jest sumą mnogościową jakiegoś podzbioru rodziny $\mathcal{B}$. Wówczas $B_x := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ jest bazą otoczeń punktu x.

Bazy otoczeń są jednym ze sposobów wprowadzania topologii, jakie zaksjomatyzował F.Hausdorff. Są wygodne przy opisie ciągłości: Rozważmy odwzorowanie $F : X \to Y$ pomiędzy przestrzeniami topologicznymi i niech $y_0 = F(x_0)$, zaś B_{y_0} niech będzie jakąś bazą otoczeń punktu y_0 w przestrzeni Y. Mówimy, że odwzorowanie F jest ciągłe w punkcie $x_0 \in X$, gdy dla każdego $V \in B_{y_0}$ istnieje otoczenie W punktu x_0, którego obraz przez F zawiera się w V. Czyli

$$\forall_{V\in B_{y_0}} \exists_{W\in\mathcal{V}_x}\ \ F(W) \subset V. \tag{1.1}$$

Odwzorowanie jest ciągłe, gdy spełnia warunek ciągłości w każdym punkcie przestrzeni. (To zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest otwarty.)

Na przykład, w przestrzeniach metrycznych mamy bazy złożone z kul i otoczenie bazowe $K(y_0, \epsilon) \subset Y$ zadajemy podając jedynie jego promień. Jeśli przez d_1, d_2 oznaczymy odpowiednio metryki w X,Y, to inkluzję $F(K(x_0, \delta)) \subset K(y_0, \epsilon)$, gdzie $y_0 = F(x_0)$, zapiszemy w znanej nam postaci implikacji:

$$d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(F(x), F(x_0)) < \epsilon.$$

Bazę otoczeń punktu $(x_0, y_0) \in X \times Y$ w **topologii produktowej** tworzą iloczyny kartezjańskie $U \times W$, gdzie U przebiega pewną bazę otoczeń punktu x_0 w przestrzeni X, zaś W przebiega rodzinę B_{y_0} otoczeń y_0. Jak łatwo sprawdzić, jest to najsłabsza spośród topologii na $X \times Y$, przy której są ciągłe projekcje na każdą z osi, czyli odwzorowania: $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$.

Gdy $X = Y$, zaś F jest działaniem dodawania wektorów, $F(x, y) = x + y$, to dla zbiorów $U, V \subset X$ obraz zbioru $U \times V$ przez odwzorowanie F oznaczymy $U + V$. Gdy $M : \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \to \alpha x \in X$ jest działaniem mnożenia wektorów przez skalary $\alpha \in \mathbb{K}$, to obraz iloczynu kartezjańskiego $A \times U$ pary zbiorów $A \subset \mathbb{K}, U \subset X$ przez to odwzorowanie M zapiszemy w postaci $A \cdot U$. (Kropki nie będę używał na oznaczenie iloczynu kartezjańskiego!) Gdy $A = \{a\}$, to zamiast $\{a\} \cdot U$ piszemy aU, lub $a \cdot U$. Ponadto niech $\mathbb{D}$ oznacza albo odcinek $(-1, 1)$ gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, albo koło jednostkowe $K(0, 1)$ gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Wprowadziliśmy więc oznaczenia:

$$U+V = \{x+y : x \in U, y \in V\},\ A \cdot U := \{\alpha x : \alpha \in A, x \in U\},\ \mathbb{D} := \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| < 1\}. \tag{2.1}$$

Domknięcie zbioru $\mathbb{D}$, to zbiór $\overline{\mathbb{D}} := \{\lambda \in \mathbb{K} : \ \|\lambda\| \leqslant 1\}$

Definicja. Niech $U, E \subset X$. Zbiór U jest **zbalansowany**, gdy $\overline{\mathbb{D}} \cdot U \subset U$.
U jest **wypukły**, gdy $\forall_{s,t \in [0,1]} (s + t = 1, x, y \in U) \Rightarrow sx + ty \in U$.
Zbiór jest **absolutnie wypukły**, gdy jest on wypukły oraz zbalansowany.
Zbiór U **pochłania zbiór** E, gdy istnieje skalar $t \in \mathbb{R}, t > 0$ taki, że $s \geqslant t \Rightarrow E \subset sU$.
Zbiór E nazywamy **zbiorem ograniczonym**, gdy pochłania go każde otoczenie zera.

Podzbiór K w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{V})$ nazywamy zbiorem zwartym, gdy z każdego pokrycia $(U_j)_{j \in J}$ zbioru K rodziną zbiorów otwartych mozna wybrać pokrycie skończone:

$$U_j \in \mathcal{V},\ K \subset \bigcup_{j \in J} U_j \Rightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}} \exists_{j_1, \ldots, j_k \in J}\ K \subset U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \ldots \cup U_{j_k}.$$

W przestrzeni Hausdorffa każdy zbiór zwarty musi być domknięty, a obraz zbioru zwartego przez odwzorowanie ciągłe jest zwarty.

1.2 PWT

Definicja. Przestrzeń wektorowa topologiczna ("PWT"), to przestrzeń wektorowa X z topologią, w której działania:

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X, \quad \texttt{oraz} \quad \mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$$

są ciągłe (względem topologii produktowych).

W niektórych źródłach postuluje się dodatkowo spełnianie aksjomatu oddzielania Hausdorffa T_2, ja tego nie zakładam.

Zauważmy, że topologia dyskretna nie spełnia warunku ciągłości mnożenia: Ciąg $\frac{1}{n}$ zmierza do zera, czego nie można powiedzieć o ciągu $\frac{1}{n}x$ gdy $x \in X \setminus \{0\}$, bo w topologii dyskretnej zbieżne są jedynie ciągi stałe od pewnego miejsca.

Przykładem skończenie wymiarowej PWT Hausdorffa jest $\mathbb{R}^n$ z **topologią metryki euklidesowej**. Za chwilę zobaczymy- że jest to jedyna topologia PWT Hausdorffa na $\mathbb{R}^n$. Przypomnijmy, że dla $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definujemy normę euklidesową $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ i metrykę $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$. Analogicznie jest dla $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, tylko pierwiastek jest brany z sumy $\sum |z_j|^2$ kwadratów modułów współrzędnych. Topologia tej metryki pokrywa ię z topologią produktową i opisuje "zbieżność po współrzędnych", co sprawdzaliśmy na kursie analizy. Zdefiniujmy odwzorowania: τ_z przesunięcia równoległego o wektor $z \in X$ wzorem $\tau_z(x) := x + z$ oraz mnożenia przez ustalony skalar $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ -wzorem $\Pi_\alpha(x) := \alpha x$. W każdej PWT są to bijekcje ciągłe, o ciągłych odwrotnościach-czyli homeomorfizmy. Faktycznie- ustalenie jednej zmiennej w odwzorowaniu ciągłym na iloczynie kartezjańskim daje odwzorowanie ciągłe. Co do odwzorowań odwrotnych, to są one tego samego typu: $(\tau_z)^{-1} = \tau_{-z}$, $(\Pi_\alpha)^{-1} = \Pi_\beta$ dla $\beta = \frac{1}{\alpha}$. W szczególności, wystarczy znać bazę $\mathcal{B}_0$ otoczeń zera w PWT, bo bazą otoczeń punktu z będzie rodzina $\{\tau_z(U) : U \in \mathcal{B}_0\}$ obrazów zbiorów z bazy otoczeń zera przez to przesunięcie.

Jak wiemy, wg. definicji, odwzorowanie $T : X \to Y$ jest **liniowe**, gdy $\forall_{x,z \in X} T(x + z) = T(x) + T(z)$ oraz $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}, x \in X} T(\alpha x) = \alpha T(x)$. Przy użyciu

τ_z, Π_α (ale działających w różnych przestrzeniach) liniowość możemy (dla tak ustawionych kwantyfikatorów) zapisać w postaci:

$$T \circ \tau_z = \tau_{T(z)} \circ T, \quad T \circ \Pi_\alpha = \Pi_\alpha \circ T$$

Z ciągłości T w zerze wynika ciągłość w $x = 0$ złożenia $\tau_{T(z)} \circ T$, co dzięki homeomorficzności przesunięć da ciągłość T w punkcie $\tau_z(0)$ dla każdego $z \in X$, czyli wszędzie! Podobnie, z ciągłości w przynajmniej jednym punkcie wynika ciągłość w całej przestrzeni. Do tej kwestii wrocimy w kontekscie przestrzeni unormowanych. W ogólnej sytuacji dowolnych PWT mamy następujący (prosty, ale bardzo przydatny)

Lemat 1.1 W przestrzeni wektorowej topologicznej X zawsze istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów zbalansowanych.

Dowód wynika z ciągłości w punkcie $(0,0) \in \mathbb{K} \times X$ działania M mnożenia wektorów przez skalary. I z faktu, że zbiory postaci $r \cdot \mathbb{D}, r > 0$ (np. w $\mathbb{C}$ są to koła ośrodku w zerze i promienu r) stanowią bazę otoczeń zera w $\mathbb{K}$. Ustalmy dowolne otoczenie zera V w X. Ponieważ $M(0,0) = 0$ (dwa ostatnie zera, to wektory), z warunku ciągłości (1.1) dla M w miejsce F istnieje bazowe otoczenie punktu $(0,0)$ postaci $r \cdot \mathbb{D} \times U$, którego obraz przez M, czyli zbiór $W := r \cdot \mathbb{D} \cdot U$ zawiera się w V. Łatwo sprawdzić, że ten zbiór W jest zbalansowanym otoczeneim zera. (Jest otoczeniem, bo zawiera $\frac{r}{2}U$, zbalansowanym, bo $\overline{\mathbb{D}} \cdot \mathbb{D} = \mathbb{D}$.) $\square$

Lemat 2.1 Każde otocenie zera jest U zbiorem pochłaniającym, tzn. pochłania każdy punkt x przestrzeni typu PWT. Wszystkie zbiory skończone są ograniczone.

Tym razem dowód oprzemy na ciągłości w punkcie $0 \in \mathbb{K}$ mnożenia skalarów przez ustalony wektor x. Ponieważ $0x = 0$, istnieje $r > 0$ takie, że dla $|\lambda| < r$ (czyli dla $\lambda \in r \cdot \mathbb{D}$) mamy $\lambda x \in U$. Dla $\rho \in (0, r)$ mamy w szczególności $\rho x \in U$, lub $x \in \frac{1}{\rho}U$. Warunek pochłaniania $x \in sU$ zachodzi więc dla $s > \frac{1}{r}$. Dla skończonego układu punktów $x_j, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ dobieramy odpowiednie $r_k > 0$ i dla $s > \max(r_1^{-1}, \ldots, r_k^{-1})$ mamy analogicznie $x \in sU$. $\square$

Uwaga. Warunek pochłaniania upraszcza się znacznie, gdy U jest zbiorem wypukłym, co w większości przypadków będzie można zakładać. Wtedy gdy tylko $x \in tU$, to już i dla wszystkich $s > t$ mamy $x \in sU$. W takim przypadku łatwo można wykazać, że dowolne wypukłe otoczenie zera pochłania każdy zbiór zwarty. Są jednak przestrzenie nieposiadające nietrywialnych wypukłych otoczeń zera (np. $L^p(\mu)$ gdy $0 < p < 1$ dla pewnych miar μ). Nie będziemy na razie prowadzić tak ogólnych rozważań i skupimy się na przestrzeniach unormowanych, ale w ramach treningu przpeprowadźmy dowód dość ważnego faktu. Najpierw jednak definicja:

Gdy X, Y są przestrzeniami PWT, to odwzorowanie liniowe $\Phi : X \to Y$ nazywamy izomorfizmem, gdy jest ono bijekcją i zarówno Φ, jak i bijekcja odwrotna Φ^{-1} są ciągłe.

Twierdzenie. 3.1 (1) Każda skończenie-wymiarowa przestrzeń wektorowa topologiczna Hausdorffa X wymiaru n jest izomorficzna z przestrzenią euklidesową $\mathbb{K}^n$.
(2) Każde odwzorowanie liniowe $T : X \to Y$ określone na takiej przestrzeni jest ciągłe.

Dowód. Założenie o wymiarze X oznacza istnienie bazy algebraicznej $e_1, \ldots, e_n$, czyli każdy wektor $x \in X$ można i to na jedyny sposób zapisać w postaci

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \tag{$*$}$$

dla pewnego układu $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ Prawą stronę równości (*) oznaczmy symbolem $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, otrzymaliśmy w ten sposób bijekcję liniową $\Phi : \mathbb{K}^n \to X$, która jest ciągła. Faktycznie, jest to suma skończenie wielu odwzorowań ciągłych- mnożeń skalarów (= j-tych współrzędnych) przez ustalone wektory e_j i ciągłość wynika z definicji PWT. Wystarczy wykazać jeszcze ciągłość

$\Phi^{-1} : X \to \mathbb{K}^n$ i jak już wiemy, wystarczy ją sprawdzić w punkcie $x = 0$. Bazę otoczeń zera w $\mathbb{K}^n$ stanowią kule $\mathbb{B}_r := \{W \in \mathbb{K}^n : \|w\|_2 < r\}$ i wystarczy nawet tylko dla $r = 1$ znaleźć takie otoczenie zera U, by $\Phi^{-1}(U) \subset \mathbb{B}_1$. Brzegiem topologicznym kuli $\mathbb{B}_1$ jest tu sfera jednostkowa $\mathbb{S} := \{w \in \mathbb{K}^n : \|w\|_2 = 1\}$ i jak wiemy z wykładu analizy, jest to zbiór zwarty. Więc jego obraz przez Φ jest domknięty (i nie zawiera zera). W tym miejscu wykorzystaliśmy hausdorffowość X. Dopełnienie zbioru domkniętego, czyli zbiór $X \setminus \Phi(\mathbb{S})$ jest więc otoczeniem zera i dzięki lematowi 1.1, zawiera pewne otoczenie zbalansowanenzera w X, nazwijmy je U. Uruchamiając wyobraźnie 3D możemy powiedzieć, że to otoczenie "złowiliśmy w sieć jaką jest zbiór $\Phi(\mathbb{S})$". Faktycznie, wykażemy, że obraz tego U przez Φ^{-1} zawiera się w zbiorze B. Gdyby tak nie było, to istniał by wektor $w \in U$, dla którego liczba $t := \|\Phi^{-1}(w)\|_2$ będzie większa lub równa 1. Wtedy $\frac{1}{t} \in \overline{\mathbb{D}}$ i z własności zbalansowania, również $\frac{1}{t}w \in U$. Ale dla $y = \Phi^{-1}(\frac{1}{t}w)$ mamy $\|y\|_2 = \frac{1}{t}\|\Phi^{-1}(w)\|_2 = 1$, więc $y \in \mathbb{S}$, zaś $\frac{1}{t}w = \Phi(y) \in \Phi(S)$, co stanowi sprzeczność z faktem, że U miał być zbiorem rozłącznym z $\Phi(\mathbb{S})$.

Druga teza już dość łatwo wynika z pierwszej: Przypuśćmy, że $T : X \to Y$ jest liniowe. Podstawmy (przez złożenie) do niego nasz izomorfizm $\Phi : \mathbb{K}^n \to X$. Orzymujemy odwzorowanie liniowe $L = T \circ \Phi : \mathbb{K}^n \to Y$. Każde takie odwzorowanie jest ciągłe. Faktycznie, gdy $\varepsilon_j, j \leqslant n$ jest bazą kanoniczną 0-1kową w $\mathbb{K}^n$, to niech $y_j = L(\varepsilon_j)$. Ponieważ dla wektora $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ mamy $L(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n a_j y_j$, odwzorowanie L jest ciągłe. Wykorzystując ten fakt odzyskujemy ciągłość $T = L \circ (\Phi^{-1})$. $\square$

Przykład. 4.1 O tym, że w przestrzeni, która nie jest Hausdorffa -nie musi zachodzić teza -przekonamy się rozważając w $\mathbb{R}^2$ najsłabszą topologię, przy której rzut na pierwszą oś: $(x, y) \mapsto x$ jest ciągły. Zbiory otwarte są tu postaci $W \times \mathbb{R}$, gdzie W jest otwarty w $\mathbb{R}$. Obraz żadnego z takich niepustych zbiorów przez odwzorowanie (funkcjinał liniowy) $T : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}$ nie jest zawarty w otoczeniu zera postaci predziału $(-1, 1)$, bo takim obrazem jest cały zbiór $\mathbb{R}$.

Nawiasem mówiąc, taką topologię, jak w powyższym przykładzie, wprowadzimy przez tzw. seminormę (oznaczmy ją symbolem p: Mianowicie, niech $p(x, y) := |x|$ Wtedy

1. dla dowolnych wektorów u, w, zachodzi **nierówność trójkąta:** $p(u + w) \leqslant p(u) + p(w)$ oraz
2. **warunek jednorodności** (z modułem): dla dowolnych skalarow λ i wektorów w jest $p(\lambda w) = |\lambda| p(w)$

oraz $p \geqslant 0$, brak jedynie implikacji $p(w) = 0 \Rightarrow w = 0$, zwanej postulatem tożsamości.

Definicja. Odwzorowanie $p : X \to [0, +\infty)$ określone na przestrzeni wektorowej X, spełniające nierówność trójkąta (powyższy warumnek 1.) oraz warunek jednorodności (2) nazywamy **seminormą** na X. Wówczas odwzorowanie $d(x, y) := p(x - y)$ nazywamy **semimetryką**. Jeśli dodatkowo seminorma p spełnia warunek tożsamości, nazywamy ją normą. Ostatni warunek można też zapisać w postaci równoważności $x \neq 0 \Leftrightarrow p(x) > 0$. Normę zazwyczaj oznaczamy symbolem $\|x\|$, zamiast $p(x)$, a związane z nią odwzorowanie $d : X \times X \to [0, +\infty)$ nazywamy metryką tej normy.

Gdy p jest seminormą, ale nie normą, to zbiór $\ker(p) := \{x \in X : p(x) = 0\}$ jest podprzestrzenią wektorową, a na przestrzeni wektorowej ilorazowej $X/\ker(p)$ wzór $\|[x]\| := p(x)$, gdzie x jest reprezentantem klasy równoważności: $[x] := \{z \in X : p(x - z) = 0\}$ jest już normą. Każda taka klasa równoważności jest podprzestrzenią afiniczną postaci $\tau_x(\ker(p)) = x + \ker(p)$ równoległą do $\ker(p)$.

Nietrywialny przykład otrzymamy definiując dla miary Lebesgue'a μ na podzbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ przestrzeń $L^1(\mu)$ klas równoważności funkcji mierzalnych o skończonej całce z modułu. Relacją równoważności jest tu równość prawie wszędzie $[\mu]$, równoważna warunkowi $\int_\Omega |f(x) - g(x)| d\mu(x) = 0$. Zwyczajowo elementy przestrzeni $L^1(\mu)$ oznaczamy w taki sam sposób: f, jak funkcje będące reprezentantami klas równoważności, pisząc $f \in L^1(\mu)$, zamiast $[f] \in L^1(\mu)$. Normą jest tu $\|f\|_1 := \int_\Omega |f(t)| d\mu(t)$ (choć na przestrzeni funkcji całkowalnych to jest tylko seminorma).