11 Operatory zwarte i ich widma

Najprostszą klasą operatorów są operatory liniowe na przestrzeniach skończenie wymiarowych, po wyborze bazy utożsamiane z macierzami. Są one ciągłe (względem każdej normy), w przypadku endomorfizmów możemy mówić o ich widmie, które pokrywa się z widmem punktowym. W pewnym sensie najbliższym ich odpowiednikiem w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych są operatory skończonego rzędu. Dla operatora liniowego $T : X \to Y$ na przestrzeni unormowanej X przez $\mathcal{R}(T)$ będe oznaczał jego obraz, czyli podprzestrzeń liniową w Y postaci $\mathcal{R}(T) := \{Tx : x \in X\}$ oraz przez $\mathcal{N}((T)$ (czasami też przez $\ker(T)$ oznaczmy jadro tego operatora. Wymiar obrazu operatora T nazywamy jego rzędem i oznaczamy $rk(T) := \dim \mathcal{R}(T)$. (Konia z rzędem temu, kto wie, skąd wzięła się taka nazwa!) Operatory skończonego rzędu, to takie operatory liniowe, korych rząd jest skończony. Suma i iloczyn operatorów skończonego rzędu mają również rząd skończony. Gdy $y_0 \in Y$ jest ustalonym wektorem niezerowym, zaś $\phi : X \to \mathbb{K}$ -dowolnym funkcjonałem liniowym -też niezerowym, to operator liniowy $X \ni x \to \phi(x)y_0$ ma rząd 1, bo jego obrazem są wszystkie skalarne wielokrotności wektora y_0. Ale uwaga: ϕ wcale nie musi być ciągły, więc i ciągłości operatorów skończonego rzędu na ogół nie mamy (poza przypadkiem gdy $\dim(X) < \infty$). Operatory liniowe ciągłe skończonego rzędu T można szczególnie przejrzyście opisać w przypadku gdy $X = Y = H$ jest przestrzenią Hilberta. Wówczas, dzięki twierdzeniu o postaci funkcjonału, istnieją wektory $z_1, \ldots z_k$ oraz $y_1, \ldots y_k$, gdzie $k = rk(T)$ takie, że

$$Tx = \sum_{j=1}^{k} \langle x, z_j \rangle y_j. \tag{1}$$

Często używa się zapisu $y \otimes z$ na oznaczenie operatora rzędu 1, gdzie

$$(y \otimes z)(x) := \langle x, z \rangle y.$$

Wbrew przyjętym w algebrze liniowej konwencjom, odwzorowanie: $H \times H \ni (y, z) \to y \otimes z \in \mathcal{B}(H)$ nie jest dwuliniowe, bo zależność od z jest antyliniowa: gdy $\alpha \in \mathbb{C}$, to $x \otimes (\alpha z) = \bar{\alpha} x \otimes z$. Niektórzy autorzy piszą więc $x \otimes z^*$ lub $x \otimes \bar{z}$, by podkreślić ten fakt. Jako wektory y_j możemy przyjąć bazę ortonormalną w podprzestrzeni $\mathcal{R}(T)$ przestrzeni H, co nietrudno wykazać. Wówczas stosując twierdzenie o postaci funkcjonału przedstawiamy funkcjonały $x \mapsto \langle Tx, y_j \rangle$ jako skalarne mnożenia x przez pewien wektor z_j otrzymujemy następujący fakt.

Wniosek. Każdy operator $T \in \mathcal{B}(H)$ rzędu $k < \infty$ jest postaci (1) dla pewnych wektorów $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots z_k$ z przestrzeni H. Jest on więc postaci $\sum_{j=1}^{k} y_j \otimes z_j$.

Przestrzeń H ma rozkład ortogonalny na sumę prostą podprzestrzemi skończenie wymiarowej $M = \mathtt{span}\{z_1, \ldots, z_k\}$ oraz "reszty" $M^{\perp}$. Na tej drugiej podprzestrzeni T ma wartość zero, można więc zapisać w postaci sumy prostej $T|_M \oplus 0$, bo $M^{\perp} \subset \mathcal{N}(T)$. Gdy ciąg $(x_n) \subset H$ jest ograniczony, to również ciąg $v_n := P_M x_n$ jest podzbiorem (zwartej) domkniętej kuli w podprzestrzeni skończenie wymiarowej M. Zawiera więc podciąg zbieżny, powiedzmy (v_{n_j}). Ponieważ $x_n - v_n \perp M$, mamy ze wzoru (1) równości $Tv_n = Tx_n$. Wnioskujemy, że obraz x_n przez operator ciągły skończonego rzędu zawiera podciąg zbieżny (jest nim $T(x_{n_j})$. Nie tylko operatory skończonego rzędu mają tę własność.

Definicja. Operator liniowy $T : X \to Y$ między przestrzeniami unormowanymi X, Y jest zwarty, jeżeli obrazy zbiorów ograniczonych mają domknięcia zwarte (czyli są relatywnie zwarte). Ze wzgledu na jednorodność, wystarczy to założyć dla obrazu kuli jednostkowej w X.

Komentarze:

1. Zbiory relatywnie zwarte są ograniczone, więc obraz przez operator zwarty zbioru ograniczonego jest ograniczony, stąd mamy ciągłość wszystkich operatorów zwartych. (Są więc operatory skończonego rzędu które nie są zwarte -bo nie są ograniczone, czyli ciągłe).

2. Ponieważ odnosimy się do topologii normy, zwartość równoważna jest tu ciągowej zwartości, czyli T jest zwarty, gdy obraz ciągu ograniczonego zawiera podciąg zbieżny (w sensie normy).

3. Jeśli już ustalimy ciąg ograniczony w przestrzeni X, to możemy się ograniczyć do podprzestrzeni domkniętej generowanej przez jego wyrazy-czyli ośrodkowej.

4. Załóżmy, że przestrzeń X jest refleksywna i ośrodkowa. Wtedy jej kule domknięte są zwarte w słabej topologii. Są też ośrodkowe w słabej topologii, bo (mniejsze w topologii normy) domknięcia otoczek wypukłych zbiorów przeliczalnych wypełniają już te kule. Zbiory zwarte ośrodkowe są metryzowalne, więc kule domknięte w przestrzeniach ośrodkowych są metryzowalne i ciągowo słabo zwarte. Z każdego ciągu ograniczonego w przestrzeni refleksywnej (nawet bez założenia ośrodkowości) można więc wybrać podciąg słabo zbieżny. Kluczowa jest tu jedynie refleksywność, która zachodzi np. w przestrzeniach $L^p(\mu)$ gdy $1 < p < \infty$ i w przestrzeniach Hilberta.

Lemat. W przetrzeni refleksywnej X opreator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy obraz każdego ciągu słabo zbieżnego jest zbieżny w normie.

Dowód implikacji w jedną stronę wynika z zasady jednostajnej ograniczoności. Faktycznie, gdy ciąg (x_n) jest słabo zbieżny, np. do x_0, to jest on ograniczony. Dotyczy to również ciągu (Tx_n). Jeżeli T jest zwarty, to ciąg (Tx_n) zawiera podciąg zbieżny w normie do pewnego y_0. Jeśli wykażemy, ze wówczas $y_0 = Tx_0$, to będzie znaczyło, że każdy podciąg ciągu (Tx_n) zawiera dalszy podciąg zbieżny w normie do Tx_0. Ale stąd już wyniknie[1] zbieżność całego ciągu : $\|Tx_n - Tx_0\| \to 0$ Aby wykazać, że $y_0 = Tx_0$ wystarczy sprawdzić słabą zbieżność Tx_n do Tx_0. W tym celu ustalmy funkcjonał $\psi \in Y'$. Wówczas $\psi \circ T$ jest funkcjonalem liniowym ciągłym na X. Słaba zbieżność x_n do x_0 implikuje zbieżność $\psi(T(x_n)) \to \psi(T(x_0))$. Mamy teraz możliwość skorzystania z jednoznaczności granic dla ciągów słabo zbieżnych. Wynika ona stąd, że funkcjonały $\psi \in Y'$ rozdzielają punkty przestrzeni Y, słaba topologia jest typu T_2. Podciąg ciągu (Tx_n), który był zbieżny w normie do y_0 musiał też słabo zmierzać do y_0, więc równość $y_0 = Tx_0$ faktycznie wynika z jednozaczności słabych granic.

Na odwrót, gdy mamy ciąg ograniczony (x_n) w przestrzeni X, to dzięki jej refleksywności (i z wniosku z twierdzenia Banacha-Alaoglu) możemy w tym ciągu znaleźć podciąg słabo zbieżny. Korzystamy przy tym z powyższego komentarza nr 3. Skoro obraz tego podciągu przez T będzie zbieżny w normie, daje to zwartość T. $\square$.

Stosunkowo łatwo możemy wykazać, że niezerowa część widma aproksymatywnego dla operatoów zwartych jest zawarta w widmie punktowym. Dla zwartych operatorów normalnych mamy więc (możliwe, że z wyjątkiem zera) -całe widmo złożone wyłącznie z wartości własnych, jak wyniknie z ostatniego twierdzenia na poprzednim wykładzie. Można nawet udowodnić więcej -czyli analogiczną tezę bez założenia o normalności, wykorzystując jedynie zwartość T działającego na dowolnej przestrzeni Banacha. Dość długi, ale ciekawy dowód zawarty w książce w. Rudina "Analiza Funkcjonalna" pominiemy. Ale przypadek szczególny operatorów zwartych, dla których widmo jest równe widmu aproksymatywnemu -dokładnie przestudiujemy. Wykażemy mianowicie następujący

Lemat. Jeśli dla operatora zwartego $T \in \mathcal{B}(X)$ mamy $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \setminus \{0\}$, to $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Innymi słowy, gdy istnieje ciąg wektorów x_n takich, że $\|x_n\| = 1$ oraz $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$, to istnieje wektor $x_0 \in X \setminus \{0\}$ taki, że $Tx_0 - \lambda x_0 = 0$, czyli λ jest wartością własną operatora T.

[1] W przeciwnym przypadku poza pewną kulą $K(Tx_0, \epsilon)$ znajdzie się nieskończenie wiele wyrazów ciągu Tx_n. Ale z tego podciągu nie da się już wybrać podciągu zbieżnego do Tx_0.

Faktycznie, skoro ciąg (x_n) jest ograniczony, zaś T jest zwarty, to przechodząc w razie potrzeby do podciągu możemy przyjąć bez straty ogólności, że ciąg (Tx_n) jest zbieżny, powiedzmy do y_0. Ponieważ różnice między tym ciągiem a ciągiem λx_n zmierzają w normie do zera, również ciąg (λx_n) jest zbieżny do y_0. Teraz w istotny sposób wykorzystując niezerowość λ wnioskujemy o zbieżnosci (w topologii normy) ciągu x_n do $x_0 := \frac{1}{\lambda} y_0 \neq 0$. Z ciągłości T wynika teraz, że $Tx_0 = \lim Tx_n = y_0 = \lambda x_0$. $\square$

Ponieważ dla operatorów normalnych $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$ i jak za chwilę wykażemy, w przestrzeniach nieskończenie wymiarówych dla operatorów zwartych T mamy zawsze $0 \in \sigma(T)$, przy takich założeniach będzie $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

Dlaczego więc operatory zwarte nie są odwracalne w przestrzeni X o wymiarze nieskończonym? Zasadniczą przyczyną jest niezwartość każdej domkniętej kuli w X o promienu $R > 0$. Ta wynika z lematu Riesza, (= teza (1) poniżej).

Twierdzenie. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną nieskończenie wymiarową. Wtedy mamy następujące tezy:
(1) Gdy M jest jej podprzestrzenią domkniętą różną od X, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje wektor $x_* \in X$ o normie 1 taki, że $\operatorname{dist}(x_*, M) \geqslant 1 - \epsilon$.
(2) Istnieje ciąg wektorów $x_n \in X$ o normie 1 o tej własności, że gdy $k \neq m$, to $\|x_k - x_m\| > \frac{1}{2}$ (jest to więc ciąg niemający podciągów zbieżnych).
(3) Ani operator I identyczności na X, ani żaden operator odwracalny nie są zwarte.
(4) Natomiast iloczyn ST dwu operatorów ograniczonych, z których przynajmniej jeden jest zwarty -również jest zwarty.
(5) Zbiór $\mathcal{K}(X)$ zwartych operatorów liniowych z $\mathcal{B}(X)$ jest domkniętym ideałem w tej algebrze Banacha.

Dla dowodu (1) przypomnijmy, że dla $x \in X$ normę ilorazową klasy równoważności $[x] = x + M$ w przestrzeni X/M definiujemy właśnie jako

$$\operatorname{dist}(x, M) := \inf\{\|x - z\| : z \in M\}.$$

Dość proste sprawdzenie warunku jednorodności (jedynego, jaki tu wykorzystamy) pozostawmy jako proste ćwiczenie oparte na obserwacji, że gdy $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, to $z \in M \Leftrightarrow \lambda z \in M$. Jeśli tylko $\bar{M} \neq X$, to istnieje wektor $x \in X$ taki, że $\|[x]\| = 1$ (tu korzystamy z jednorodności). Z definicji kresu dolnego wynika, że istnieje wówczas ciąg wektorów $z_n \in M$ taki, że $0 \neq c_n := \|x - z_n\| \to 1$. Dla wszystkich n wektor $y_n := \frac{1}{c_n}(x - z_n) \in X$ ma normę 1, zaś normy $\|[y_n]\|$ są równe $\frac{1}{c_n}\|[x]\| = \frac{1}{c_n} \to 1$, więc dla n dostatecznie dużego są $> 1 - \epsilon$ i wystarczy przyjać $x_* = y_n$ dla tak duzego n.

Ciąg (x_n) spełniający teze (2) konstruujemy rekurencyjnie, zaczynając od dowolnego x_1 ze sfery jednostkowej. Mając już wektory $x_1, \dots x_n$ stosujemy tezę (1) dla $M = \mathtt{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ -skończenie wymiarowej, a więc domkniętej podprzestrzeni właściwej w X, znajdując dla $\epsilon = \frac{1}{2}$ odpowiedni wektor $x_* = x_{n+1}$, otrzymując ciąg odseparowany ze stałą $\frac{1}{2}$, jak w tezie (2). Żeden jego podciąg nie będzie zbieżny w normie, bo nie spełni warunku Cauchy'ego.

Operator identyczności przekształca ten ciąg w ten sam ciąg -niemający podciągów zbieżnych, więc nie ma tu zwartości operatora I.

Jeśli wykażemy najpierw tezę (4), to nie może istnieć T^{-1} w algebrze $\mathcal{B}(H)$, o ile T jest zwarty, w przeciwnym razie mielibyśmy dzięki (4) zwartość operatora $I = T^{-1}T$. Niech teraz T będzie zwarty, S -jedynie ograniczony i wybierzmy ciąg ograniczony wektorów x_n. Ciąg $y_n := Sx_n$ będzie wówczas też ograniczony, a jego obraz przez zwarty T, czyli ciąg $Ty_n = (TS)(x_n)$ będzie zawierał podciąg zbieżny. Dla złożenia ST najpierw wybieramy podciąg zbieżny Tx_{n_k}, potem z ciągłości S otrzymujemy zbieżność ciągu $(ST)x_{n_k}$. Suma oepratorów zwartych T_1, T_2 jest zwarta, bo najpierw zapewniamy zbieżność podciągu $T_1 x_{n_k}$, a później - już z tego podciągu wybieramy dalszy podciąg zapewniający zbieżność na nim drugiego z operatorów. I na koniec korzystamy ze zbieżności do sumy granic- sumy dwu (pod)ciągów ciągów zbieżnych. Na koniec- jeden z trudniejszych fragmentów- czyli dowód domkniętości ideału $\mathcal{K}(H)$ względem topologii normy operatorowej. Przypuśćmy, że mamy ciąg operatorów zwartych T_n, który jest zbieżny w normie przestrzeni $\mathcal{B}(H)$ do operatora T. Wykazemy, że również T jest zwarty. Można rozumować na parę sposobów -np. stosując kryterium Hausdorffa zwartości podzbiorów domkniętych przestrzeni zupełnych (jest nim całkowita ograniczoność). Chyba bardziej bezpośrednią jest metoda przekątniowa wyboru podciągów. Przypuśćmy, że mamy zadany ciąg wektorów $x_n \in X$ o normie $\|x_n\| \leqslant 1$ i chcemy wybrać tak podciąg, by wartości na nim operatora T tworzyły ciąg zbieżny. Najpierw wybieramy podciąg (oznaczymy go nietypowo!) (x_{1k}) ciągu (x_n)), na którym wartości operatora T_1 są zbieżne. Z tego ciągu (x_{1k}) wybieramy dalszy podciąg (x_{2m}) tak, by zbieżny był ciąg $(T_2(x_{2n}))$ był również zbieżny. Przechodząc z $p-$ tego podciągu do tego o pierwszym indeksie $p+1$, zapewniamy sobie, że ciąg (x_{nn}) otrzymany przez wybór przekątniowy z tego "ciągu ciągów" ma następującą własność: od pewnego miejsca jest podciągiem kazdego z występujących tu ciągów - w szczególności jest on podciągiem ciagu (x_n) i to takim, że każdy z operatorów T_j ma na nim wartości $T_j x_{nn}$ zbieżne, a więc spełniające warunek Cauchy'ego. Dowód zakończymy sprawdzając, że również ciąg Tx_{nn} spełnia warunek Cauchy'ego. Ustalmy więc $\epsilon > 0$ i dobierzmy j tak duże, by $\|T_j - T\| < \frac{\epsilon}{3}$. Dla k, n dostatecznie dużych mamy wetdy (z warunku Cauchy'ego dla ciągu $T_j x_{nn}$ i z nierówności trójkąta:

$$\|Tx_{kk}-Tx_{nn}\| \leqslant \|T-T_j\|\|x_{kk}\|+\|T_jx_{kk}-T_jx_{nn}\|+\|T_j-T\|\|x_{nn}\| \leqslant \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Alternatywny dowód polega na tym, by dla K_1 oznaczającego kulę jednostkową w X sprawdzić relatywną zwartość obrazu $T(K_1)$ przy użyciu kryterium Hausdorffa, czyli sprawdzając całkowitą ograniczoność. Wystarczy dla zadanego $\epsilon > 0$ znaleźć taki skończony podzbiór E przestrzeni Y, by dla każdego $y \in T(K_1)$ było $\mathtt{dist}(y, E) < \epsilon$. Dobieramy znów j tak, by $\|T_j - T\| < \frac{\epsilon}{2}$. Ze zwartości $T_j(K_1)$ znajdziemy skończony zbiór $E \subset Y$ dla kórego gdy $x \in K_1$, to $\mathtt{dist}(T_j x, E) < \frac{\epsilon}{2}$. Z nierówności tórjkąta wynika teraz, że dla $x \in K_1$ mamy

$$\mathtt{dist}(Tx, E) \leqslant \mathtt{dist}(T_j x, E) + \|T_j x - Tx\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \ \square$$

Operatory zwarte mają dość specyficzną strukturę widma: z wyjątkiem punktu 0, składa się ono z wartości własnych, jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, którego jedynym punktem skupienia może być punkt 0. Dla uproszczenia wykażemy to w interesującej nas głównie sytuacji operatorów zwartych normalnych w przestrzeni Hilberta. Podstawą będzie następująca obserwacja:

Lemat. Wektory własne operatora normalnego odpowiadające różnym wartościom własnym są wzajemnie prostopadłe.

Faktycznie, niech $N \in \mathcal{B}(H)$ będzie operatorem normalnym, zaś $\lambda, \mu \in \sigma_p(N)$ -jego wartościami włąsnymi, przy czym $\lambda \neq \mu$. Weźmy dwa wektory $x, y \in H$ takie, że $Nx = \lambda x, Ny = \mu y$. Wtedy liczymy:

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Nx, y\rangle = \langle x, N^* y\rangle.$$

Operator $N - \mu I$ jest przemienny ze swym sprzężeniem, równym $N^* - \bar{\mu} I$, więc spełnia metryczny warunek normalności: $\|Ny - \mu y\| = \|N^* y - \bar{\mu} y\|$, czyli wówczas mamy też $N^* y = \bar{\mu} y$. Stąd -kontynuując ciąg równości, mamy

$$\langle x, N^* y\rangle = \langle x, \bar{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Odejmując skrajne wyrazy w tym ciagu równosci otrzymamy

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0,$$

skąd już wynika prostopadłość: $x \perp y$. $\square$