# 13 Twierdzenie spektralne

Przystąpmy do dowodu twierdzenia spektralnego -najpierw dla zwartych operatorów samosprzężonych $S$. Dla $\lambda \in \mathbb{C}$ niech $N_\lambda := \mathcal{N}(S - \lambda I)$. Jest to podprzestrzeń własna gdy $\lambda \in \sigma_p(S)$ oraz $\{0\}$ w pozostałych przypadkach. Zawsze jest to podprzestrzeń redukująca (nawet w przypadku operatorów normalnych). Wiemy już, że dla różnych wartości

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \quad \texttt{mamy relację prostopadłości} \quad N_\lambda \perp N_\mu \tag{1}$$

i dla $\lambda \neq 0$ podprzestrzeń (domknięta) $N_\lambda$ ma wymiar skończony, niezerowy tylko dla przeliczalnie (lub skończenie) wielu wartości $\lambda$. W każdej z takich podprzestrzeni $N_\lambda$ dla $\lambda \in \sigma_p(S) \setminus \{0\}$ możemy utworzyć bazę ortonormalną, ich połączenie -dzięki (1) -jest układem ortonormalnym. Za zbiór indeksów dla tego układu możemy brać $\mathbb{N}$ (lub zbiór skończony, gdy skończone jest widmo $S$) i w ten sposób mamy ciąg $(e_n)$ wektorów własnych o wartościach własnych $\lambda_n$. Te wartości $\lambda_n$ powtarzają się tyle razy, ile wynosi ich krotność, czyli $\dim(N_{\lambda_n})$. Niech $X$ oznacza podprzestrzeń domkniętą rozpiętą na tych wszystkich wektorach $e_n$. Oczywiście, jest to dokładnie podprzestrzeń domknięta rozpięta na $\bigcup_\lambda N_\lambda$, przy czym w tej sumie wystarczy uwzględnić niezerowe składniki -czyli $\lambda \in \sigma(S) \setminus \{0\}$. Jest to podprzestrzeń niezmiennicza dla $S$ (redukująca- nawet w przypadku gdy $S$ jest zwarty, normalny.) Aby sprawdzić tę niezmienniczość zauważmy, że dowolny element $x \in X$ jest granicą pewnego ciągu $(x_k)$, gdzie $x_k$ jest skończoną kombinacją liniową wektorów własnych $S$. Dzięki liniowości $S$ wartość $S(x_k)$ jest też skończoną kombinacją liniową wektorów własnych (z tymi samymi wartościami własnymi), więc $S(x_k) \in X$. Dzięki domkniętości podprzestrzeni $X$, również $Sx = \lim Sx_k \in X$.

Wykażemy, że dopełnienie ortogonalne $H \ominus X = X^\perp$ jest równe $N_0 = \mathcal{N}(S)$- i to bedzie kluczowy punkt dowodu twierdzenia. Faktycznie, $S|_{X^\perp}$ jako operator z $\mathcal{B}(X^\perp)$ jest zwarty i samosprzężony (odp. normalny, gdy S jest tylko normlny i zwarty). Jego widmo składa się z zera i ewentualnie może zawierać też liczby $\lambda \neq 0$, które muszą być wartościami własnymi również dla operatora $S$. Ale wówczas powinien istnieć niezerowy wektor własny $x_\lambda \in X^\perp$ dla $S|_{X^\perp}$, który też będzie wektorem własnym dla $S$. Z definicji $X$ wynika, że wtedy $x_\lambda \in X$. Wynika stąd sprzeczność, bo teraz mamy $0 \neq x_\lambda \in X \cap X^\perp = \{0\}$. Wykazaliśmy więc, że widmo tej restrykcji $S|_{X^\perp}$ operatora $S$ składa się tylko z punktu zero, promień spektralny tej restrykcji, to zero. Na poprzednim wykładzie wykazaliśmy dla operatorów samosprzężonych, że promień spektralny jest równy normie. Stąd $S$ zeruje się na podprzestrzeni $X^\perp$. Nasz układ ortonormalny $(e_n)$ jest więc bazą dla dopełnienia ortogonalnego jądra $S$. Jeśli teraz wektor $x$ rozłożymy na sumę prostą $x = x_0 + x_*$, gdzie $x_0 \perp X, x_* \in X$, a następnie rozwiniemy $x_*$ względem bazy $(e_n)$, to $x_* = \sum_n \langle x_*, e_n \rangle e_n$ oraz

$$Sx = Sx_0 + Sx_* = 0 + \sum_n \lambda_n \langle x_*, e_n \rangle e_n. \tag{2}$$

Co więcej, ponieważ $\forall_n \; x - x_* \perp e_n$, więc $\langle x_*, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$ i nasze rozwinięcie operatora $S$ w tej bazie możemy zapisać w postaci

$$Sx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \tag{3}$$

co kończy dowód twierdzenia spektralnego w przypadku samosprzężonym.

Gdy $N$ jest operatorem zwartym normalnym, to taki też będzie typ operatora $N|_{X^\perp}$ i jego promień spektralny również jest zerem. Tu $X$ jest zdefiniowana analogicznie, jako podprzestrzeń rozpięta na wszystkich niezerowych wektorach własnych dla $N$. Można teraz albo wykorzystać równość normy i promienia spektralnego dla operatorów normalnych, kórej jednak nie wykazaliśmy, albo rozłożyć operator na sumę "cześci rzeczywistej $S_1 := \frac{1}{2}(N + N^*)$ i urojonej: $N = S_1 + iS_2$. Normalność $N$ jest równoważna przemienności:

$S_1S_2 = S_2S_1$. Najpierw rozkładamy przestrzeń $H$ na sumę ortogonalną podprzestrzeni własnych $N_\lambda$ indeksowaną przez niezerowe wektory własne $S_1$ (dzięki już udowodnionemu twierdzeniu w przypadku samosprzęzonym). Później zauważamy,że $S_2(N_\lambda) \subset N_\lambda$. Jest to ogólny fakt z algebry liniowej, że podprzestrzenie własne operatora są niezmiennicze dla operatorów z nim przemiennych (proste cwiczenie). Dla operatora (zwartego, samosprzężonego) $S_2|_{N_{\lambda_n}}$ konstruujemy (tym razem już skończoną!) bazę wektorów własnych $E_{kn}$ z jakimiś wartościami własnymi $\mu_{kn}$ Wektory $E_{kn}$ jako elementy $N_{\lambda_n}$ są też wektorami własnymi dla $S_1$ z wartościami własnymi $\lambda_n$. Taka baza równoczesnych wektorów własnych -już po połączeniu wzajemnie prostopadłych baz $N_{\lambda_n}$ po wszystkich $\lambda_n \in \sigma(S_1)\setminus\{0\}$, (należy jeszcze dołączyć bazę podprzestrzeni $N_0 \cap \mathcal{N}(S_2 - \mu I)$ dla $\mu \in \sigma(S_2)\setminus\{0\}$) daje równosci $NE_{kn} = (S_1 + iS_2)(E_{kn}) = (\lambda_n + i\mu_{kn})(E_{kn})$. Otrzymujemy stąd rozwinięcie operatora $N$ (tym razem w postaci sumy z podwójnymi wskaźnikami $k, n$ postaci analogicznej do (2). $\square$

Gdy wymiar $X$ jest skończony, operator ma rząd skończony i jego macierz w bazie wektorów własnych (uzupełnionych o wektory własne z wartością $\lambda = 0$) ma postać diagonalną. W przypadku nieskończonym - mamy analogiczną nieskończoną macierz diagonalną. Ostatni fragment dowodu wskazuje, jak dla dowolnej przemiennej rodziny operatorów samosprzężonych można dokonać równoczesnej diagonalizacji przez wybór bazy wspólnych wektorów własnych.

Zapis bezargumentowy twierdzenia spektralnego dla $S = S^*$ zwartego: Oznaczmy przez $P_\lambda$ rzut prostopadły na podprzestrzeń własną $N_\lambda = \{x \in H : Sx = \lambda x\}$. Gdy $e_1, \ldots e_k$ stanowią bazę ortonormalną w $N_\lambda$, to dla $v \in H$ mamy $P_\lambda v = \sum_{j=1}^k \langle x, e_j\rangle e_j$. Na podprzestrzeni $N_\lambda$ mamy $Sx = \lambda x$, więc wykorzystując fakt, że dla $x_*$ jak wyżej (czyli bedącego rzutem $P_X x$ na podprzestreń $X$ wektora $x$ mamy

$$x^* = P_X x = \sum_{\lambda \in \sigma(S)\setminus\{0\}} P_\lambda x,$$

(gdzie szereg jest zbieżny w silnej topologii operatorowej) otrzymujemy wspomniany wzór bezargumentowy na rozkład operatora $S$:

**Twierdzenie.** Dla operatora zwartego samosprzężonego mamy jego rozkład w postaci sumy ortogonalnej

$$S = \sum_\lambda \lambda P_\lambda. \tag{4}$$

Szereg jest zbieżny w normie operatorowej.

## 13.1 Rachunek funkcyjny

Jeżli $\mathcal{A}$ jest pewną algebrą funkcji określonej na zbiorze $\Omega \subset \mathbb{C}$ zawierającym $\sigma(S)$, gdzie $S \in \mathcal{B}(H)$, przy czym wielomiany (a właściwie ich restrykcje do $\Omega$) należą do $\mathcal{A}$, to homomorfizm algebr z jedynką $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ nazywamy rachunkiem funkcyjnym dla operatora $S$, gdy dla wielomianu identyczności $w_1(z) = z, z \in \Omega$ mamy $\Phi(w_1) = S$. W szczególości, dla $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z]$ mówimy o wielomianowym rachunku funkcyjnym, zaś dla $\mathcal{A} = C(\sigma(S))$ - o ciągłym rachunku funkcyjnym. Jedynką w $\mathcal{A}$ jest funkcja stała $w_0(z) = 1$ i w myśl definicji homomorfizmu algebr z jedynką, musi być $\Phi(w_0) = I$ (operator identyczności na $H$), $\Phi$ przekształca iloczyn dwu funkcji na iloczyn (czyli złożenie) operatorów. Na przykład, dla wielomianu

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad \texttt{mamy} \quad \Phi(p) = a_0 I + a_1 S + a_2 S^2 + \ldots + a_n S^n.$$

Zazwyczaj zamiast $\Phi(f)$ piszemy $f(S)$. Takiego zapisu używamy np.dla wielomianów od operatora różniczkowania. Twierdzenie spektralne pozwala dzięki diagonalizacji zapisać dla $S$ -zwartego, samosprzężonego i dla funkcji ciągłej $f \in C(\sigma(S)$ wzór definiujący ciągły rachunek funkcyjny. W wersji bezargumentowej

$$f(S) = \sum_{\lambda \in \sigma(S)} f(\lambda) P_\lambda. \tag{5}$$

W szczególności, dla $v(t) = \sqrt{t}$ gdy $\sigma(S) \subset \mathbb{R}^+$, to operator $v(S)$ oznaczany jest symbolem $S^{\frac{1}{2}}$. Można wykazać, że jest to jedyny operator $T$ który jest samosprzężony i nieujemny (czyli taki, że $\forall_x \ \langle Tx, x\rangle \geqslant 0$), dla którego zachodzi równość $T^2 = S$. Dla operatorów samosprzężonych obraz numeryczny jest rzeczywisty, jego kresy należą do widma, widmo zawiera się w domknięciu obrazu numerycznego, więc dla operatora nieujemnego widmo jest podzbiorem półosi nieujemnej $\mathbb{R}_+$ . Implikację odwrotną dla operatorów samosprzężonych otrzymamy z twierdzenia spektralnego, dzięki rachunkowi funkcyjnemu.

Analogiczne tezy zachodzą dla rachunku funkcyjnego względem operatorów zwartych normalnych. W następnym podrozdziale skonstruujemy ciągły rachunek funkcyjny dla dowolnych ograniczonych operatorów samosprzężonych i będzie on podstawą dowodu ogólnego twierdzenia spektralnego. Ten podrozdział zakończmy jeszcze jedną uwagą -zastosowaniem rachunku funkcyjnego dla operatorów zwartych.

Dla dowolnego operatora zwartego $K \in \mathcal{B}(H)$ operator $K^*K$ jest samosprzężony i nieujemny, więc można zdefiniować operator samosprzężony nieujemny $|K| := (K^*K)^{\frac{1}{2}}$, zwany wartością bezwzględną operatora $K$. Ciąg wartości własnych dla $|T|$ powtarzanych z uwzględnieniem krotności i uporządkowanych w sposób nierosnący nazywamy ciągiem $s$-liczb operatora $K$, oznaczanych $s_n(K)$. Gdy ciąg ten jest sumowalny z p-tą potęgą, to mówimy, że $K$ należy do ideału Schattena- von Neumanna $\mathcal{S}_p(H)$. Więcej informacji na ten tmat będzie na wykładzie z teorii operatorów.

## 13.2 Twierdzenie o odwzorowaniu widm

**Lemat.**Jeżeli operatory $A, B \in \mathcal{B}(H)$ są przemienne, to operator $AB$ jest nieodwracalny wtedy i tylko wtedy gdy jeden z tych operatorów: $A$ lub $B$ jest nieodwracalny.

Dowód. Złożenie operatorów odwracalnych jest odwracalne, więc wystarczy wykazać odwrotną implikację: z nieodwracalności któregoś z operatorów wynika nieodwracalność $AB$. Jeśli np. $A$ nie jest injekcją, to również $BA$ nią nie będzie (zeruje się na jakimś niezerowym wektorze). Jeśli A nie jest surjekcją, to ponieważ obraz $AB$ zawiera się w obrazie operatora $A$, również $AB$ nie będzie surjektywny. To są jedyne przyczyny nieodwracalności i teraz teza wynika z przemienności: $AB = BA$. $\square$.

**Twierdzenie o odwzorowaniu widm.** Jeżeli $p$ jest wielomianem, $p \in \mathbb{C}[z]$, to dla dowolnego operatora $T \in \mathcal{B}(H)$ zachodzi równość

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)). \tag{6}$$

Dowód. Dla ustalonej liczby $\lambda \in \mathbb{C}$ niech $q(z) = p(z) - \lambda$. Wielomian $q$ dzięki zasadniczemu twierdzeniu algebry ma faktoryzację (czyli da się zapisać w postaci iloczynu):

$$q(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_k),$$

gdzie $z_j$ są pierwiastkami $q$ powtarzanymi z uwzględnieniem krotności, zaś $c$ jest pewną niezerową stałą. Zauważmy, że zbiór $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ jest dokładnie przeciwobrazem punktu $\lambda$ przez wielomian $p$.

$$P(T) - \lambda I = q(T) = c(T - z_1 I)(T - z_2 I)\dots(T - z_k I).$$

Stosując lemat do przemiennych operatorów $(T - z_j I)$ widzimy, że

$$\lambda \in \sigma(p(T)) \Leftrightarrow \exists_j z_j \in \sigma(T) \Leftrightarrow \sigma(T) \cap p^{-1}\{\lambda\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \lambda \in p(\sigma(T)).$$

Ostatnia równoważność jest prostym faktem z teorii mnogości. $\square$

### 13.3 Konstrukcja rachunku funkcyjnego

Niech $T \in \mathcal{B}(H)$ będzie dowolnym operatorem samosprzężonym ciągłym na przestrzeni Hilberta $H$ i oznaczmy przez $\Omega$ widmo tego operatora. Naszym celem będzie konstrukcja rachunku funkcyjnego $\Phi : C(\Omega) \to \mathcal{B}(H)$ względem tego operatora $T$. Jak w każdej algebrze z jedynką mamy w $\mathcal{B}(H)$ naturalnie zdefiniowany rachunek funkcyjny wielowianowy, który jest odwzorowaniem liniowym, przeprowadza funkcję $w_n(x) = x^n$ w $T^n$ dla $n \in \mathbb{Z}^+$. W przypadku operatorów samosprzężonych, czyli dla $T = T^*$ mamy dla $C = \|T\|$ widmo $\sigma(T)$ zawarte w przedziale $[-C, C]$ osi rzeczywistej i właśnie wykazaliśmy, że dla każdego wielomianu $p$ jest $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$. Jeśli wszystkie współczynniki $p$ są rzeczywiste, czyli $p \in \mathbb{R}[x]$, to operator $p(T)$ jest samosprzężony i jego norma wyraża się przez promień spektralny:

$$\|p(T)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(T))\} = \sup\{|p(x)| : x \in \sigma(T)\} = \|p\|_\Omega. \qquad (7)$$

W środkowej równości wykorzystaliśmy właśnie twierdzenie o odwzorowaniu widm. Jeśli przez $P_0(\Omega)$ oznaczymy przestrzeń wektorową (algebrę) złożoną z restrykcji $p|_\Omega$ wielomianów $p \in \mathbb{R}[x]$ do $\Omega$, z normą supremum modułu po zbiorze $\Omega$, to wielomianowy rachunek funkcyjny możemy utożsamiać z odwzorowaniem

$$P_0(\Omega) \ni p|_\Omega \to p(T) \in \mathcal{B}(H). \qquad (8)$$

Faktycznie, nawet w skrajnym przypadku, gdy $\Omega$ jest tylko jednym punktem,to z równości $p_1|_\Omega = p_2|_\Omega$ wcale nie wynika równość $p_1 = p_2$. Ale dzięki nierówności (7) stosowanej do wielomianu $p = p_1 - p_2$ wnioskujemy, że jednak $p_1(T) = p_2(T)$. Odwzorowanie (7) jest więc poprawnie określonym rachunkiem funkcyjnym na algebrze $P_0(\Omega)$ oraz jest to izometria. Jeśli sprawdzimy, że ta algebra jest podzbiorem gęstym w przestrzeni $C(\Omega, \mathbb{R})$ wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na zbiorze (zwartym) $\Omega$, to będzie istniało dokładnie jedno ciągłe, a nawet izometryczne przedłużenie do odwzorowania liniowego $C(\Omega, \mathbb{R}) \ni f \to f(T)$ Odwzorowanie to przekształca fukcję $w_1(x) = x$ w operator $T$, a funkcję stałą 1 w operator $I$. Jest ono homomorfizmem algebr. Faktycznie, gdy $f, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$ są jednostajnymi granicami ciągów funkcji $f_n, g_n \in P_0(\Omega)$ odpowiednio, to $\|fg - f_n g_n\|_\Omega \to 0$, a ponieważ mnożenie w $\mathcal{B}(H)$ jest ciągłe w normie operatorowej oraz $(f_n g_n)(T) = f_n(T) g_n(T)$, po przejściu granicznym otrzymamy równość $(fg)(T) = f(T)g(T)$. Otrzymamy więc ciągły rachunek funkcyjny na operatorze $T$. Pozostaje sprawdzić gęstość restrykcji wielomianów do zbioru $\Omega$ w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na $\Omega$. Gdy zbiór ten jest przedziałem - taką gęstość zapewnia Twierdzenie Aproksymacyjne Weierstrasa. W ogólnym przypadku $\Omega$ jest domkniętym podzbiorem pewnego przedziału $[-C, C]$ i można skorzystać z Twierdzenia Tietzego-Urysohna: mając $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ znajdujemy ciągłe przedłużenie $F \in C([-C, C], \mathbb{R})$, nawet z zachowaniem normy: $\|F\|_{[-C,C]} = \|f\|_\Omega, F|_\Omega = f$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika istnienie ciągu wielomianów $W_n \in \mathbb{R}[x]$ zbieżnego jednostajnie do $F$ na przedziale $[-C, C]$, co oczywiście implikuje zbieżność jednostajną ich restrykcji: $w_n = W_n|_\Omega$ do $f$ na zbiorze $\Omega$. Dowodzi to gęstości $P_0(\Omega)$ w przestrzeni $C(\Omega, \mathbb{R})$. Zauważmy jeszcze, że gdy $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ jest funkcją nieujemną, to dla pewnej funkcji ciągłej $h$ (a mianowicie, dla $h = \sqrt{f}$ mamy $f = h^2$, w związku z czym , dzieki samosprzężoności operatora $h(T)$ i równości $f(T) = (h(T))^2$ mamy nieujemność operatora $f(T)$. Reasumując, wykazaliśmy następujący fakt:

**Twierdzenie** Dla każdego operatora samosprzężonego $T \in \mathcal{B}(H)$ , istnieje (dokładnie jeden) ciągły rachunek funkcyjny: $C(\sigma(T), \mathbb{R}) \ni f \to f(T) \in \mathcal{B}(H)$ który jest odwzorowaniem izometrycznym, a jego wartości są operatorami samosprzężonymi. Gdy $f \geqslant 0$ na widmie $T$, to operator $f(T)$ jest nieujemny, czyli zachodzą nierówności $\forall_{v \in H} \langle f(T)v, v\rangle \geqslant 0$.