# 15 Uzupełnienia do poprzednich wykładów

Pewne treści, które przekazałem ustnie podczas wykładów, nie znalazły się niestety w moich spisanych notatkach. Te treści są na tyle ważne, że warto je w tym miejscu zebrać.

## 15.1 Przestrzenie ilorazowe

**Definicja.** Jeżeli $M$ jest pewną podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni $(X, p)$ z seminormą $p$, to w przestrzeni ilorazowej $X/M$ definiujemy normę ilorazową $\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) = \inf\{p(x-m) : m \in M\}$.

Zauważmy, że $X/M$ jest zbiorem klas równoważności $[x]$ względem relacji $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M$, z działaniami określającymi strukturę przestrzeni wektorowej:

$$[x] + [y] := [x+y], \quad \alpha[x] := [\alpha x], \; x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Niezależność tych definicji od wyboru reprezentanów klas równoważności jest dość elementarnym faktem z algebry. Ponadto $[x] = x + M = \{x + m : m \in M\}$, a zerem tej przestrzeni ilorazowej jest $[0] = 0 + M = M$. Z tej definicji wynika liniowość suriekcji kanonicznej $\pi : X \ni x \mapsto [x] \in X/M$. Ponadto odwzorowanie $\pi$ jest ciągłe i w nietrywialnym przypadku gdy $M \neq X$ najmniejszą stałą $C \geqslant 0$, dla której $\|\pi(x)\| \leqslant p(x)$ jest $C = 1$. Samo sprawdzenie, że w ten sposób zdefiniowaliśmy normę jest dość elementarne. Na przykład, gdy $\|x\| = a, \|y\| = b, j = 1, 2$, to z definicji infimum, istnieją ciągi $x_n, y_n \in M$ takie, że $p(x - x_n) \to a, p(y - y_n) \to b$, więc $p(x - x_n + y - y_n) \leqslant p(x - x_n) + p(y - y_n) \to a + b$. Stąd $\|[x] + [y]\| \leqslant a + b$. Ponadto $\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \exists_{x_n \in M} p(x - x_n) \to 0$. Ale ostatni warunek oznacza, że $x \in \bar{M}$, a więc otrzymujemy normę wtedy i tylko wtedy, gdy $M$ jest domknięta (co zresztą założyliśmy). Jednorodność można dość łatwo sprawdzić gdy $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$: gdy $p(x - x_n) \to \|[x]\|$, $x_n \in M$, to $p(\alpha x - \alpha x_n) = |\alpha| p(x_n - x) \to |\alpha| \|[x]\|$, więc $\|[\alpha x]\| \leqslant |\alpha| \|[x]\|$, gdyż $\alpha x_n \in M$. Mnożąc $\alpha x$ przez $\frac{1}{\alpha} x$ otrzymamy w analogiczny sposób przeciwną nierówność.

W szczególnie prostej sytuacji gdy $M = \ker p = \{x \in X : p(x) = 0\}$, to dla $x, y \in X$ jeśli $[x] = [y]$, to $p(x) = p(y)$ (z nierówności trójkąta), wtedy $\|[x]\| = p(x)$. Taką sytuację mamy w przypadku przestrzeni $L^q(\mu)$. Gdy $\mu$ nie jest miarą "dyskretną": $\exists E \subset \Omega$ taki że $\mu(E) = 0, E \neq \emptyset$, to istnieją $f \in L^q(\mu)$ takie, że $(\|f\|_q)^q := \int_\Omega |f(t)|^q \, d\mu(t) = 0$, ale $f \neq 0$. Tutaj (trochę niezręcznie) mamy $p(f) := \|f\|_q$ -jest to seminorma, ale nie musi być ona normą. Tu $M = \ker p$ jest zbiorem funkcji mierzalnych równych zero prawie wszędzie $[\mu]$, czyli poza zbiorem miary zero. Gdy

$$X_q := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \texttt{ jest mierzalna oraz } \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty\},$$

to z nierówności Minkowskiego dla całek (por. kurs analizy), zachodzi nierówność trójkąta dla seminormy $\|\cdot\|_q$, gdy $1 \leqslant q < +\infty$, więc $X_q$ jest przestrzenią wektorową. Przestrzeń ilorazową $X_q / \ker \|\cdot\|_q$ nazywamy przestrzenią Lebesgue'a $L^q(\mu)$ (lub $L^q(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, gdzie $\mathcal{B}$ jest sigma algebrą podzbiorów mierzalnych zbioru $\Omega$, na której jest określona miara $\mu$. W praktyce stosuje się znacznie prostszą notację -zamiast $[f] \in L^q(\mu)$ pisząc $f \in L^q(\mu)$. Jednak gdy $\mu(\{t\}) = 0$, nie można jednoznacznie określić wartości $f(t)$ -ponieważ elementmi $L^q(\mu)$ są nie funkcje, ale ich klasy równoważnośći modulo równość prawie wszędzie. Sens mają jedynie wyrażenia postaci $\mu(\{t \in \Omega : f(t) \in E\})$, gdzie $E \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem borelowskim (np. przedziałem), bo takie wartości są jednakowe dla wszystkich finkcji równych prawie wszędzie funkcji $f$.

## 15.2 Kryterium szeregowe zupełnosci.

Ustalmy ciąg liczb dodatnich $c_n$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.

**Następujące warunki są równoważne dla przestrzeni unormowanej** $(X, \|\cdot\|)$

1. **Przestrzeń ta jest zupełna**
2. **Każdy szereg** $\sum x_n$ **taki, że** $\sum \|x_n\| < \infty$ **jest zbieżny**
3. **Gdy** $\forall_n \|x_n\| \leqslant c_n$**, to szereg** $\sum x_n$ **jest zbieżny**
4. **Gdy dla ciągu** $z_n \in X$ **jest** $\forall_n \|z_n - z_{n+1}\| \leqslant c_n$**, to** $\exists \lim z_n \in X$**.**

Dowody implikacji $1 \to 2 \to 3 \to 4$ są dość elementarne. Aby z (4) wywnioskować (1) ustalmy ciąg Cauchy'ego $(x_n)$ i skorzystajmy z lematu, że ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny- sam musi być zbieżny. (dowód-jak analogicznego faktu dla ciągów liczbowych w kursie podstawowym analizy) A pociąg $(z_n)$, dzięki warunkowi Cauchy'ego -możemy tu wybrać tak, by spełniał warunek z punktu (4). Szczegóły proszę sprawdzić. □

Z tego kryterium łatwo wyniknie, że gdy $(X, p)$ -przestrzeń z seminormą $p$ jest zupełna (tzn. gdy z warunku $p(x_n - x_k) \to 0$ przy $n, k \to \infty$ wynika istnienie $x \in X$ takiego, że $p(x - x_n) \to 0$), to przestrzeń ilorazowa jest też zupełna. Zauważmy, że w dowodach poprzedniego kryterium korzystamy jedynie z nierówności trójkąta, więc można to kryterium[1] stosować też do seminorm. Gdy mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$ (bezwzględna zbieżność), dobierzmy $y_n \in [x_n]$ tak, by $|p(y_n) - \|[x_n]\|| < 2^{-n}$. Z nierówności tójkąta wyniknie, że szereg o wyrazach $p(y_n)$ będzie zbieżny w $X$. Ale w przestrzeni $X/M$ zbieżny będzie $\sum_{n=1}^{\infty}[y_n] = \pi(\sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, dzięki ciągłości odwzorowania liniowego (kanonicznego) $\pi : X \to X/M$. Ponieważ $[x_n] = [y_n]$, zbieżny (do tej samej sumy) będzie nasz $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$. □.

Uwaga: dość łatwo można wykazać, że suriekcja kanoniczna $\pi : X \to X/M$ jest nie tylko odwzorowaniem liniowym ciągłym, ale jest też odwzorowaniem otwartym. Obraz kuli otwartej o promieniu $r$ jest kulą o takim samym promieniu, wystarczy zauważyć, co wynika z nierówności ostrej $\|[x_0] - [y]\| < r$, gdy norma, to pewne infimum. Stąd już łatwo wynika, że zbiór $U \subset X/M$ jest wtedy i tylko wtedy otwarty, gdy przeciwobraz: $\pi^{-1}(U)$ jest otwarty w $X$. To oznacza, że topologia normy ilorazowej pokrywa się z topologią ilorazową (= najsilniejsza topologia na $X/M$, przy której suriekcja kanoniczna $\pi$ jest ciągła. (Uwaga: w przypadku przestrzeni ilorazowych gdzie relacja równoważności nie jest zgodna ze strukturą liniową - $\pi$ już nie musi być odwzorowaniem otwartym!) Można też wykazać, że gdy $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ jest liniowe, ciągłe między przestrzeniami unormowanymi $X, Y$, zaś $M = \ker(T)$, to powstałe przez kanoniczną faktoryzację odwzorowanie $\tilde{T} : X/M \ni [x] \mapsto T(x)$ jest poprawnie określone, ciągłe oraz $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ Wynika stąd dość ciekawy wzór na odległość od jądra funkcjonału liniowego $\phi \in X'$: Mamy $\mathrm{dist}(x, \ker(\phi)) = \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|}$.

## 15.3 Twierdzenie Riesza o zupełności przestrzeni $L^p(\mu)$

**Twierdzenie.** Dla wykładnika $p \in [1, \infty)$ przestrzeń $L^p(\mu)$ jest zupełna.

Stosując poprzednią uwagę wystarczy wykazać zupełność przestrzeni $X_p$ funkcji mierzalnych, których $p$-ta potęga modułu jest całkowalna, względem seminormy $\|\cdot\|_p$. Faktycznie, $L^p(\mu)$ jest przestrzenią ilorazową powstałą przez utożsamianie funkcji równych prawie wszędzie, czyli dzielimy przez jądro seminormy, które jest podprzestrzenią domkniętą w $X_p$.

Zupełność sprawdzimy wykorzystując warunek 3. z naszego kryterium dla $c_n = 3^{-n}$. Weźmy więc ciąg takich $f_n \in X_p$, że $\|f_n\|_p \leqslant 3^{-n}$. Skorzystamy z

[1] Tu korzystamy jedynie z implikacji $1 \to 2$

nierówności

$$\mu(A_n) \leqslant \frac{\|f_n\|_p^p}{\delta_n^p} \quad \text{dla} \quad A_n := \{\omega \in \Omega : |f_n(\omega)| \geqslant \delta_n\}.$$

W tej nierówności niech $\delta_n = 2^{-n}$. Wtedy

$$\mu(A_n) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{pn}, \quad \text{więc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Z Lematu Borela-Cantellego wynika, że zbiór

$$\limsup A_n := \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}\}$$

jest miary zero Wiec w dopełnieniu tego zbioru, czyli prawie wszędzie na $\Omega$, mamy $|f_n(\omega)| \leqslant 2^{-n}$ dla $n$ dostatecznie dużych (dla $n \geqslant N(\omega)$. Daje to zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ prawie wszędzie[2]. Funkcja graniczna będzie więc mierzalna, jako granica ciągu funkcji mierzalnych.

Gdy $S_k$ jest k-tą sumą częściową naszego szeregu, zaś $S(\omega) = \lim_{m\to\infty} S_m(\omega)$, to z lematu Fatou,

$$\|S - S_k\|_p^p = \int_\Omega |\lim S_m(\omega) - S_k(\omega)|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |S_m(\omega) - S_k(\omega)|^p \, d\mu$$

Ostatnia granica dolna całek zmierza do zera przy $k \to \infty$. Faktycznie, podniesione do potęgi $\frac{1}{p}$ całki z prawej strony, dla $m > k$ można zapisać jako

$$\|S_m - S_k\|_p = \|\sum_{n=k+1}^{m} f_n\|_p \leqslant \sum_{n=k+1}^{m} \|f_n\|_p \leqslant \sum_{n=k+1}^{m} 3^{-n} \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} 3^{-n},$$

co majoryzuje granicę dolną przez ciąg zmierzający do zera. Szereg jest więc zbieżny w normie. (A klasy równoważności stanowią szereg zbieżny w przestrzeni $L^p(\mu)$. ) $\square$

W przypadku $p = \infty$ gdy $\|f_n\|_\infty \leqslant c_n$, to poza pewnym zbiorem $E_n \subset \Omega$ miary zero jest $|f_n| \leqslant c_n$, więc poza zbiorem $E := \bigcup_n E_n$ (miary zero) mamy

$$\forall_n \forall_{\omega \in \Omega \setminus E} \, |f_n(\omega)| \leqslant c_n$$

co przy $\sum c_n < \infty$ daje jednostajną zbieżność $\sum f_n$ na zbiorze pełniej miary (czyli prawie wszędzie). Dowód zupełności $L^\infty(\mu)$ jest więc znacznie łatwiejszy.

## 15.4 Addendum

Możliwe, że nie zapisałem też dowodu, że podprzestrznie $M$ skończenie wymiarowe w przestrzeniach unormowanych $X$ (lub ogólnie- w przestrzeniach PWT Hausdorffa) są domknięte.

Dla przestrzeni unormowanych łatwiej, niż w ogólnym przypadku sprawdzamy, że istnieje izomorfizm liniowy $M$ z przestrzenią euklidesową $\mathbb{K}^d$, gdzie $d = \dim(M)$. Stąd wynika już zupełność $M$ jako podprzestrzeni w $X$, a zupełne podzbiory w przestrzeniach metrycznych muszą być domknięte[3].

Ta teza już wystarcza do dowodu, że gdy przestrzeń Banacha $X$ zawiera nieskończony układ liniowo niezależny, to już wymiar algebraiczny nie może być przeliczalny. Gdyby istniała przeliczalna baza Hamela $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ w przestrzeni $X$, niech $M_n := \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Wtedy, jako skończenie wymiarowe podprzestrzenie, $M_n$ będą domknięte. A jako podprzestrzenie właściwe- mają puste wnętrza (bo gdyby istniał $U$ otwarty niepusty zawarty w $M_n$, niech

[2] Ten fragment dowodzi też innego twierdzenia Riesza, które mówi o zbieżności prawie wszędzie dla pewnego podciągu w każdym ciągu zbieżnym w normie $\|\cdot\|_p$

[3] Faktycznie: punkt $x_0$ z domknięcia: $\bar{M}$ zbioru $M$ jest granicą ciągu punktów $x_n \in M$. Gdyby $x_0$ nie należał do $M$, ciąg (Cauchy'ego) $x_n$ nie miałby granicy w obrębie $M$, (bo taka by byłą też granicą w $X$, ale tam may jednoznaczność granic), co przeczy zupełności $M$.

$x_o \in U$. Wtedy $U - x_0$ jest otoczeniem zera w $X$, zawartym w $M_n$. Ale takie otoczenia są zbiorami pochłaniającymi: gdy $x \in X$, to $\exists_{t>0} x \in tU$. Ale $t \cdot U \subset M_n$, co daje sprzeczność: $M_n = X$. Gdyby nasz ciąg był bazą Hamela, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = X$, co jest niemożliwe, dzięki tw. Baire'a, gdyż zbiory $M_n$ są nigdzie-gęste.

Dow. domkniętości $M$ gdy przestrzeń $X$ jest PWT Husdorffa : nie wprost: gdyby $\exists_x$ -taki punkt, że $x \in \bar{M} \setminus M$, niech $Y = \operatorname{span}(M \cup \{x\})$. Wtedy, jako skończenie wymiarowa przestrzeń Hausdorffa, $Y$ jest izomorficzna liniowo-topologicznie z przestrzenią euklidesową, obraz $M$ przez tez izomorfizm jest podprzestrzenią niedomkniętą w $\mathbb{K}^{d+1}$, gdzie $d = \dim M$. To już jest niemożliwe. Można tu użyć poprzedniego fragmentu, bądź skorzystać z automatycznej ciągłości funkcjonału liniowego na Y oddzielającego $M$ od $x$ (zerującego się na $M$ i równego 1 w punkcie $x$).

Oczywiście, w wielu przestrzeniach Banacha istnieją przeliczalne bazy Schaudera $(e_n)$, ale nie są to bazy w sensie algebry liniowej -tam każdy wektor $x$ ma jednoznacznie wyznaczony ciąg współczynników skalarnych $\alpha_n(x)$ taki, że

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n. \qquad (Baz)$$

Skończone kombinacje liniowe wektorów takiego układu $(e_n)$ nie rozpinają całej przestrzeni, tylko pewną gęstą podprzestrzeń wektorową. W przypadku przestrzeni ciągowych $\ell^p$ za $e_n$ można brać ciągi zero-jedynkowe, ich span, to przestrzeń ciągów zerujących się od pewnego miejsca. W każdej przestrzeni ośrodkowej Hilberta istnieją przeliczalne bazy ortonormalne, dzięki procesowi ortonormalizacji Grama-Schmidta. Takie bazy są również bazami Schaudera. Zbieżność szeregów (Baz) (które są wówczas szeregami Fouriera) jest bezwarunkowa, ale nie jest, na ogół bezwzględna, bo np. tak jest gdy $x \in \ell^2$ jest ciągiem o wyrazach $\frac{1}{n}$. Istnienie ośrodkowej przestrzeni Banacha nieposiadającej żadnej bazy Schaudera wykazał dopiero w latach 70-tych szwedzki matematyk, Per Enflo[4].

[4]problem istnienia bazy Schaudera, postawiony w 1936 roku przez Stanisława Mazura, był zawarty w Księdze Szkockiej. Z tego tytułu w roku 1972 P.Enflo przyjechał do Warszawy, gdzie odebrał od Mazura nagrodę - żywą gęś. Per Enflo jest ponadto pianistą i od dzieciństwa grywa koncerty. Jakieś 2 i pół roku temu był z koncertem w Krakowie. Interesuje się również matematyzacją kwestii związanych z ewolucją. W 1998 roku postawił m.in. hipotezę kojarzenia się genetycznego przedstawicieli Homo Sapiens, z Neandertalczykami, która potem została potwierdzona. W latach 80-tych miałem przyjemność oprowadzać Pera Enflo po Krakowie