2 Ograniczoność a ciągłość

(9.III 2021.) Przypomnijmy, że odwzorowanie $p : X \to [0, +\infty)$ na przestrzeni wektorowej X, spełniające nierówność trójkąta oraz warunek jednorodności (z modułem) nazywamy **seminormą** na X. Czasami mamy topologię wprowadzoną na X nie przez jedną, lecz przez ciąg -lub nawet jakąś dużą rodzinę seminorm $\{p_j : j \in J\}$. Jest to topologia, w której bazę otoczń zera tworzą przecięcia skończonej ilości kul $K_j(0, r_j) = \{x \in X : p_j(x) < r_j\}$.
Przykład W przestrzeni $\mathbb{R}^d, d < \infty$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ niech $p_j(x) = |x_j|$, gdzie $x_1, x_2, \ldots x_d$ są współrzędnymi punktu $x \in \mathbb{R}^d$. Są to seminormy, zaś $\|x\|_\infty := \max\{|x_j| : j = 1, \ldots, d\}$ jest normą, której topologia pokrywa się z topologią normy euklidesowej $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$. Ponieważ część wspólna kul $K_j(0, r)$ o jednakowych promieniach r względem seminorm $p_1, \ldots p_d$, to kula względem normy $\| \cdot \|_\infty$, ta rodzina seminorm wyznacza też tę samą topologię euklidesową.

Lemat. Zauważmy, że takie topologie są zgodne ze strukturą liniową, czyli działania są ciągłe. Wynika to dla dodawania-z nierówności tójkąta, np. $K(x_1, r_1) + K(x_2, r_2) \subset K(x_1 + x_2, r_1 + r_2)$ i podobnie jest dla skończonych przecięć: np. gdy zadamy otoczenie $K_j(x+y, R) \cap K_l(x+y, R)$ punktu $x+y$, o promieniu $R > 0$, to zawiera się w nim obraz przez dodawanie otoczenia $\left(K_j(x, \frac{R}{2}) \cap K_l(x, \frac{R}{2})\right) \times \left(K_j(y, \frac{R}{2}) \cap K_l(y, \frac{R}{2})\right)$ punktu $(x, y) \in X \times X$. Analogicznie jest dla otoczeń zadanych przez przecięcia większej ilości kul. Można tu zresztą unikać potrzeby przecinania kul, jeśli (co nie zmieni topologii) do rodziny seminorm dołączyć maksima skończonych ilości takich seminorm, bo przecięcia typu $\left(K_j(x, r) \cap K_l(x, r)\right)$, to kule o środku x i promieniu r względem seminormy $p(x) = \max(p_j(x), p_l(x))$. Podobnie sprawdzamy ciągłość mnożenia, wykorzystując fakt, ze

$$p(\alpha x - \beta y) \leqslant p(\alpha(x - y)) + p((\alpha - \beta)y) = |\alpha p(x - y) + |\beta - \alpha|p(y). \quad \square$$

Zauważmy, że zbieżność ciągów uogólnionych złożonych z wektorów $f_\alpha \in X$ do wektora f w topologii rodziny $\{p_j : j \in J\}$ seminorm zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego (ustalonego) $j \in J$ ciąg uogólniony $p_j(f_\alpha - f)$ zmierza do zera. To pewna wskazówka, jak zdefiniować np. ciąg seminorm opisujący zbieżność niemal jednostajną -tak ważną dla ciągów funkcji analitycznych w danym obszarze $\Omega \subset \mathbb{C}$ (lub w $\mathbb{R}^d$). Zbieżność niemal jednostajna w Ω, to zbieżność jednostajna na każdym zwartym podzbiorze[1] zbioru Ω. Więc jeśli dla wszystkich takich K zdefiniujemy seminormy $p_K(f) := \sup\{|f(z)| : z \in K\}$, to będzie to rodzina seminorm określająca topologię zbieżności niemal jednostajnej.

Tylko, że zbyt duża. Wolimy mieć tylko ciąg. Jeśli zdefiniować

$$K_n = \{z \in \Omega : \mathrm{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \leqslant \frac{1}{n}, |z| \leqslant n\},$$

to dostajemy rosnący ciąg zbiorów o sumie równej Ω i taki, że zawsze $K_n \subset \mathtt{int}(K_{n+1})$, więc ich wnętrza pokrywają każdy zwarty podzbiór $K \subset \Omega$. Z definicji zwartości, taki zbiór K zawiera się w skończonej sumie takich K_n, a nawet w jakimś jednym takim zbiorze K_m, ze względu na ich wzajemne inkluzje. Topologia zbieżności niemal jednostajnej na Ω jest więc zadana przez ciąg seminorm p_{K_n}. A może da się ją określić przez jedną normę? -NIE! Gdyby tak było to istniało by w bazie otoczeń zera jakieś otoczenie ograniczone. Ponieważ gdy $K \subset K_m$, to $p_K \leqslant p_{K_m}$ oraz kule są zawarte w analogicznym kierunku, bazę otoczeń zera stanowią więc nie tylko przecięcia kul $K_{n_1}(0, r) \cap K_{n_2}(0, r) \cap \ldots \cap K_{n_j}(0, r)$, ale i same kule. Z kolei ograniczoność $K_n(0, r)$ oznacza, że jest ona pochłonięta przez dowolną inną kulę $K_m(0, r)$ z tej bazy. Z tym właśnie jest problem, gdy $m > n$, co dość łatwo sobie zobrazować, zwłaszccza gdy $X = C(\Omega)$ lub gdy $X = C^k(\Omega)$ (choć dowód w przypadku $X = \mathcal{H}(\Omega)$ przestrzeni funkcji analitycznych[2] nie jest taki natychmiastowy).

Zauważmy przy okazji, że z Twierdzenia Montela dla funkcji analitycznych wynika, że gdy ciąg funkcji $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ jest wspólnie jednostajnie ograniczony na każdym zwartym podzbiorze $K \subset \Omega$, to zawiera on podciąg zbieżny niemal jednostajnie. Co więcej, każdy ciąg lokalnie jednostajnie ograniczony i zbieżny punktowo jest również

[1] Fakt, że K jest zwartym podzbiorem w Ω oznaczany bywa symbolem $K \subset\subset \Omega$.

[2] Funkcje analityczne nazywane są też holomorficznymi, stąd litera H. Używa się też symboli $\mathcal{O}(\Omega)$ lub $C^\omega(\Omega)$ zamiast $\mathcal{H}(\Omega)$.

niemal jednostajnie zbieżny wraz z pochodnymi każdego rzędu. Te własności odróżniają funkcje analityczne od funkcji klasy C^k dla $k \leqslant \infty$.

Można wykazać (lecz dowód odpuścimy) następujące

Twierdzenie Kołmogorowa. Jeśli w przestrzeni wekt. topologicznej T_2 istnieje wypukłe i ograniczone otoczenie zera, to istnieje norma wprowadzająca tę topologię.

Zbadajmy obecnie warunki równoważne ciągłości odwzorowania liniowego $T : X \to Y$ między dwiema przestrzeniami unormowanymi. W niektórych miejscach zaznaczymy, jak je zmodyfikować, gdy topologia X pochodzi od rodziny $\mathcal{P}$ seminorm. Normę na przestrzeni X w dalszych wykładach oznaczymy symbolem $\|x\|$, obecnie oznaczmy ją jako $p(x)$, zaś normę wektorów $y \in Y$ -jako $\|y\|$ (rozróżnianie norm często wynika z kontekstu- jeśli wiadomo, do której przestrzeni który wektor należy).

Definicja. Odwzorowanie liniowe $T : X \to Y$ nazwiemy **operatorem liniowym ograniczonym**, gdy funkcja $X \ni x \mapsto \|T(x)\|$ jest ograniczona na kuli jednostkowej, czyli gdy

$$\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : \ x \in X : p(x) < 1\} < \infty. \tag{1.2}$$

Często zamiast tego warunku postuluje się warunek inny, lecz jak się okaże równoważny: Istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że

$$\forall_{x\in X} \|T(x)\| \leqslant Mp(x). \tag{2.2}$$

Liczbę $\|T\|$ zdefiniowaną w (1.2) nazywamy normą operatora T. W przypadku operatora $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ zadanego macierzą, tę normę nazywamy też **normą spektralną** danej macierzy, gdy normy w obydwu przestrzeniach są euklidesowe. Zbiór wszystkich operatorów liniowych ograniczonych z X do Y oznaczamy symbolem $\mathcal{B}(X, Y)$, a gdy $X = Y$ -symbolem $\mathcal{B}(X)$. Gdy $Y = \mathbb{K}$, to zamiast $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ piszemy X', lub X^* i przestrzeń tę nazywamy przestrzenią dualną do przestrzeni X.

Zamiast $\mathcal{B}(X, Y)$ używa się też symbolu $\mathcal{L}(X, Y)$, będziemy też mieli do czynienia z operatorami liniowymi, których dziedzina, $D(T)$ będzie gęstą podprzestrzenią przestrzeni X i aby ten fakt zaznaczyć, będę wówczas używał zapisu: $T : D(T) \subset X \to Y$, chociaż niektórzy piszą "operator $T : X \to Y$, o dziedzinie $D(T) \subset X$". Operatory o wartościach skalarnych (gdy $Y = \mathbb{K}$) nazywamy funkcjonałami.

Zwyczajowo w przypadku operatorów liniowych nawiasy opuszczamy, o ile nie prowadzi to do nieścisłości- więc zamiast $T(x)$ będziemy pisali Tx. Ma to szczególne uzasadnienie gdy X oraz Y są przestrzeniami funkcyjnymi, bo lepiej wygląda zapis $(Tf)(\omega)$, niż $(T(f))(\omega)$, czy nawet $T(f)(\omega)$. Oczywiście, w zapisie $Tx + y$ nie będzie jasne, czy to ma być $T(x + y)$, czy też $(Tx) + y$ -wtedy trzeba użyć nawiasów.

Jak się okazuje, ograniczoność jest dla operatorów liniowych równoważna ciągłości. Mamy bowiem dość proste w dowodzie, ale bardzo ważne

Twierdzenie. Dla operatora liniowego działającego między przestrzeniami unormowanymi $(X, p(\cdot))$, $(Y, \|\cdot\|)$ następujące warunki są równoważne:

1. T jest ciągły;
2. T jest ciągły w pewnym punkcie x_0;
3. T jest ograniczony w pewnym otoczeniu U jakiegoś punktu x_0, czyli mamy $\sup_{x\in U} \|Tx\| = K < +\infty$;
4. $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \ p(x) \leqslant 1\} < +\infty$
5. $$\exists_{M\geqslant 0}\forall_{x\in X} \|Tx\| \leqslant Mp(x). \tag{3.2}$$

Dowód. Równoważność 1. i 2. zachodzi, jak już wiemy, dla "PWT" -czyli wtedy, gdy działania w przestrzeniach X, Y są ciągłe. My jednak udowodnimy cykl implikacji. Oczywiści2, 1. $\Rightarrow$ 2.. Z definicji otoczeń w Y i warunku ciągłości (1.1) z poprzedniego wykładu, również 2. $\Rightarrow$ 3.

Dowodzimy teraz implikacji z 3. do 4. Zbiór U z warunku 3. zawiera pewną kulę $K(x_0, r)$. Teraz, gdy $p(z) \leqslant 1$ oraz $0 < \rho < r$, to $x_0 + \rho z \in K(x_0, r)$, wiec $\|T(x_0 + \rho z)\| \leqslant K$. Z oczywistych powodów, również $\|Tx_0\| \leqslant K$. Stąd

$$\rho\|Tz\| = \|T(\rho z)\| = \|T(x_0 + \rho z) - Tx_0\| \leqslant 2K.$$

W konsekwencji, $\|Tz\| \leqslant \frac{2K}{\rho}$. Przechodząc do granicy przy $\rho \to r^-$ i do supermum względem $z \in K(0, 1)$ otrzymujemy więc z ograniczenia $\|Tx\| \leqslant K$ na kuli $K(x_0, r)$ nierówność $\|T\| \leqslant \frac{2K}{r}$. Do tej implikacji odwołamy się wkrótce.

Następną implikację sprawdźmy najpierw w przypadku, gdy p jest normą na przestrzeni X. Jako stałą M można będzie przyjąć liczbę $\|T\|$. Gdy $x = 0$, (lub nawet gdy tylko $\|Tx\| = 0$), nierówność w 5. jest oczywista. W przeciwnym przypadku jeśli $c := p(x) > 0$ (co zachodzi dla norm,), to dla wektora $z = \frac{1}{c}x$ mamy $p(z) = 1$, stąd $\|Tz\| \leqslant \|T\| < \infty$, na mocy założonego warunku 4. Ponieważ $x = cz = p(x)z$, z jednorodności T i normy, mamy $\|Tx\| = \|cTz\| = c\|Tz\| \leqslant c\|T\|$, co daje nierówności (3.2) ze stałą $M = \|T\|$ w tym przypadku. Gdy zaś $p(x) = 0$, to wystarczy sprawdzić, że wtedy $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p(nx) = 0 \leqslant 1$, więc z założenia 4. mamy wtedy ciąg $\|T(nx)\| = n\|Tx\|$ ograniczony, co jest możliwe jedynie gdy $\|Tx\| = 0$

Warunek 5. dzięki liniowości T implikuje warunek Lipschitza ze stałą M. Faktycznie, $\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leqslant Mp(x - y)$, a to już gwarantuje nawet jednostajną ciągłość operatora T.

W przypadku, gdy topologia na X zadana jest nie przez jedną seminormę, a przez rodzinę seminorm $\{p_j : j \in J\}$, otoczenie U w warunku 3. może zawierać przecięcie skończonej ilości (np. n) kul, ale to będzie kula względem seminormy

$$p(x) = \max(p_{j_1}(x), p_{j_2}(x), \ldots, p_{j_n}(x))$$

i wówczas tę samą p trzeba wpisać w warunkach 4., 5., czyli poprzedzić je kwantyfikatorem $\exists_{n\in\mathbb{N}, j_1,\ldots,j_n\in J}$. Na przykład, warunek (3.2) -który najczęściej jest używany do badania ciągłości przyjmie dla rodzin seminorm postać:

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\exists_{j_1,\ldots,j_n\in J}\exists_M\forall_x\ \|Tx\| \leqslant M \cdot \max(p_{j_1}(x), p_{j_2}(x), \ldots, p_{j_n}(x)). \quad \square$$

Dla operatorów liniowych ograniczonych $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ zdefiiniujmy ich sumę oraz iloczyn przez skalar $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$(S + T) : X \ni x \mapsto Sx + Tx \in Y, \qquad , (\alpha T) : X \ni x \mapsto \alpha Tx \in Y.$$

W przypadku, gdy $X = Y$, mamy operator identyczności $I \in \mathcal{B}(X)$, gdzue $Ix = x$ dla wszystkich $x \in X$ oraz definiujemy iloczyn ST pary operatorów jako ich złożenie:

$$(ST) : X \ni x \mapsto S(Tx) \in X.$$

Zauważmy, że zachodzą jeszcze następujące dość proste własności (tym razem zakładamy, że p jest normą na X):

Lemat. Zbiór $\mathcal{B}(X, Y)$ jest przestrzenią wektorową, unormowaną przez $\|T\|$ zdefiniowaną w punkcie 4. ostatniego twierdzenia. Mamy też równość

$$\|T\| = \min\{M : \forall_x \|Tx\| \leqslant Mp(x).$$

Gdy ponadto $X = Y$, to przestrzeń $\mathcal{B}(X)$ jest również algebrą z jedynką I, w której norma spełnia warunki:

$$\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\| \quad \texttt{oraz} \quad \|I\| = 1.$$

Fakt, że jest to przestrzeń wektorowa wynika z ciągłości sumy odwzorowań ciągłych i z elementarnej algebry liniowej wynika ich liniowość. Analogicznie dla iloczynu przez stałą $\alpha \in \mathbb{K}$. Oczywiście, gdy $\|Tx\| \leqslant Mp(x)$, to przechodząc do kresu po x, dla których $p(x) \leqslant 1$ otrzymamy $\|T\| \leqslant M$. Ale w dowodzie 4. $\Rightarrow$ 5. z poprzedniego twierdzenia wykazaliśmy , że oszacowanie (3.2) zachodzi też dla $M = \|T\|$, jest to więc najmniejsza z możliwych stałych M.

Ponieważ dodając stronami warunki (3.2) dla obydwu operatorów (ze stałymi M zamienionymi na ich normy operatorowe) i korzystając po lewej stronie z nierówności trójkąta mamy

$$\forall_x \|(S + T)x\| \leqslant \|Sx\| + \|Tx\| \leqslant \|S\|p(x) + \|T\|p(x),$$

, wnioskujemy, że $\|S + T\| \leqslant \|S\| + \|T\|$. Podobnie -z właściwości kresów zbiorów w $\mathbb{R}_+$ sprawdzamy, ze $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$. Oczywiście, gdy $\|T\| = 0$, to zerowanie się tego operatora wynika z (3.2) dla $M = \|T\|$.

Dla złożenia operatorów -np. w ogólniejszej sytuacji $S \in \mathcal{B}(Y, Z), T \in \mathcal{B}(X, Y)$ mamy

$$\|(ST)x\|_Z = \|S(Tx)\|_Z \leqslant \|S\|\|Tx\|_Y \leqslant \|S\|\|T\|p(x), \ \texttt{stąd}\ \|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|.$$

Teza dla operatora I jest oczywista (pod warunkiem, że normy w dziedzinie i w zbiorze wartości są takie same. $\square$

A co oznacza ciągłość operatora identyczności, ale względem dwu różnych norm, powiedzmy $\|\cdot\|, p$? Oczywiście, oznacza ograniczoność, czyli $I : (X, p) \ni x \mapsto x \in (X, \|\cdot\|)$ jes ciągłe $\Leftrightarrow \exists_M \forall_x \|x\| \leqslant Mp(x)$. Powiemy w takeij sytuacji, że takie normy są porównywalne. Przeciwobraz zbioru otwartego U względem $\|\|$ (czyli U) ma być otwarty względem normy p, topologia normy $\|\cdot\|$ będzie więc słabsza (lub równa) topologii wyznaczonej przez p. Mówimy , że dwie normy na tej samej przestrzeni są równoważne, gdy ich topologie są równe, czyli gdy istnieją dwie stałe dodatnie $m, M > 0$ takie, że

$$\forall_x mp(x) \leqslant \|x\| \leqslant Mp(x).$$

Definicja. Ciąg wektorów $x_n \in X$ w przestrzeni unormowanej jest **ciągiem Cauchy'ego,** gdy dostatecznie dalekie jego wyrazy są dowolnie bliskie:

$$(C) \qquad \forall_{\epsilon>0}\, \exists_k \forall_{j,n\geqslant k}\ \|x_n - x_j\| < \epsilon.$$

X nazywamy przestrzenią zupełną, albo **przestrzenią Banacha**, gdy każdy ciąg Caucjy'ego jest w niej zbieżny.

Oczywiście, ciągi zbieżne spełniają warunek Cauchy'ego, ale w wielu przestrzeniach istnieją ciągi Cauchy'ego niemające w nich granicy. Wkrótce wykażemy, że każdą przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ można uzupełnić-czyli znaleźć taką przestrzeń zupełną $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{}}$ oraz odwzorowanie liniowe $j : X \to \tilde{X}$, że $j(X)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\tilde{X}$ oraz dla $x \in X$ mamy $\|x\| = \|j(x)\|_{\tilde{}}$. Innymi słowy, X da się zanurzyć izometrycznie jako gęsta podprzestrzeń w pewnej przestrzeni Banacha. Można wykazać, że z dokładnością do izomorfizmu izometrycznego taka przetrzeń $\tilde{X}$ jest wyznaczona jednoznacznie. Na przykład, uzupełnienia "nie wymagają" przestrzenie zupełne -tam $\tilde{X} = X, j = I$ -np. przestrzeń $\mathbb{K}^n$. Z kolei -jak wkrótce sprawdzimy-, żadna przestrzeń o algebraicznym wymiarze przeliczlnym $\aleph_0$ nie jest zupełna. Na przykład, uzupełnieniem przestrzeni P złożonej z restrykcji do odcinka $[0, 1]$ wielomianów względem normy supremowej będzie $C[0, 1]$, a względem normy całkowej $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$ -przestrzeń $L^1[0, 1]$. takie samo będzie uzupełnienie przestrzeni $C[0, 1]$ z normą $\|\cdot\|_1$ oraz przestrzeni $R[0, 1]$ funkcji całkowalnych w sensie Riemanna z tą samą normą. Wkrótce wykażemy dość ciekawy fakt: gdy dwie normy czyniące z tej samej przestrzeni X przestrzeń zupełną są porównywalne, to są one równoważne. Z porównywalności 2 norm na danej przestrzenimożna też wywnioskować odpowiednią inkluzję dla jej uzupełnień względem każdej z tych norm.

Twierdzenie. Gdy przestrzeń unormowana Y jest zupełna, to $\mathcal{B}(X, Y)$ też jest zupełna. Na odwrót, gdy istnieje[3] niezerowy funkcjonał liniowy ciągły $\phi : X \to \mathbb{K}$, to z zupełności $\mathcal{B}(X, Y)$ wynika zupełność Y.

Dowód przedstawiłem na wykładzie. Najpierw dowodzi się zbieżności ciągu wektorów $T_n x$ przy dowolnie ustalonym $x \in X$, gdy ciąg operatorów spełnia warunek Cauchy'ego, a dopiero później wykazuje się zbieżność jednostajną na kuli 1-kowej, co oznacza zbieżność w normie operatorowej. Przy dowodzie drugiej tezy wykorzystujemy dla danego ciągu Cauch'ego $(y_n) \subset Y$ ciąg operatorów $T_n(x) := \phi(x)y_n \in Y$ o normie $\|\phi\|\|y_n\|$.

DODATEK

W notatkach nie mogłem znaleźć dowodu domkniętości widma (i tw. o szeregu Neumanna). Więc go dopisuję poniżej:

Twierdzenie. Gdy $A \in \mathcal{B}(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, to z nieówności $\|A - I\| < 1$ wynika odwracalność: gdy $B := I + \sum_{n=1}^{\infty}(I - A)^n$, to $BA = AB = I$. Zbiór $GL(X)$ operatorów odwracalnych z $\mathcal{B}(X)$ jest otwarty. Widmo $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \notin GL(X)\}$ operatora $T \in \mathcal{B}(X)$ jest domknięte, zawarte w $\{\lambda : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$.

Dowód: Niech $q := \|(I - A)\| < 1$. Operator B jest poprawnie zdefiniowany (zbieżność szeregu wynika z nierówności $\|(I - A)\|^n \leqslant q^n$, ze zbieżności $\sum_0^\infty q^n$ oraz z zupełności $\mathcal{B}(X)$[4]. Następnie zauważamy, że operator liniowy $R_C : \mathcal{B}(X) \ni T \mapsto TC \in \mathcal{B}(X)$ prawostronnego mnożenia przez C jest ciągły (bo $\|R_C(T)\| \leqslant \|C\|\|T\|$, gdzie $C := (I - A)$), więc można licząc $R_C(B)$ zamienić kolejność wykonywania operacji R_C i sumowania szeregu - czyli "wejść pod szereg":

$$R_C(B) = (I - A)B = (I - A)[I + \sum_{n=1}^{\infty}(I - A)^n] = \sum_{n=1}^{\infty}(I - A)^n = B - I.$$

[3] Na niezerowych przestrzeniach unormowanych zawsze takie funkcjonały istnieją, co wykażemy w następnym wykładzie

[4] Tu korzystamy z warunku Cauchy'ego dla ciągu sum częściowych szeregu $\sum(I - A)^n$

Porównanie stron daje równość $AB = I$. Analogicznie, stosując operator L_C lewostronnego mnożenia przez $C = (I - A)$ sprawdzimy, że $BA = I$.

Aby sprawdzić otwartość, ustalmy $T \in GL(X)$ i niech $\|S - T\| < \delta$, gdzie wartość δ za chwilę określimy. Z odwracalności $T^{-1}S$ wyniknie odwracalność S. Ale $\|I - T^{-1}S\| = \|T^{-1}(T - S)\| \leqslant \|T^{-1}\|\delta$, co będzie < 1 gdy $\delta < (\|T^{-1}\|)^{-1}$. Zbiór $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ jest przeciw-obrazem zbioru otwartego $GL(X)$ przez odwzorowanie ciągłe (izometryczne!) $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto T - \lambda I$, więc $\sigma(T)$, czyli jego dopełnienie -jest domknięte.

Gdy $|\lambda| > \|T\|$, to odwracalność $(T - \lambda I)$ -albo, co równoważne- odwracalnoć $A := I - \frac{1}{\lambda}T$ wyniknie z nierówności $\|A - I\| < 1$. Więc wtedy $\lambda \notin \sigma(T)$. $\square$

Uwaga: Można (wykorzystując tw. Liouville'a) wykazać, że widmo jest zawsze niepuste.