3 Przedłużanie funkcjonałów

Zacznijmy od kryterium ciągłości funkcjonałów liniowych φ na przestrzeniach wektorowych topologicznych X. Przypomnijmy: $\ker(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$.

Twierdzenie 0. Następujące warunki są równoważne:

1. Funkcjonał φ jest ciągły,
2. $\ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią domkniętą w X,
3. Istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $\varphi(U) \neq \mathbb{K}$.

Dowód. (1. $\Rightarrow$ 2.), bo $\ker(\varphi)$ jako przeciwobraz zbioru domkniętego $\{0\} \subset \mathbb{K}$ przez odwzorowanie ciągłe jest domknięty. (2. $\Rightarrow$ 3.), bo dla $U := X \setminus \ker(\varphi)$ jest $0 \notin \varphi(U)$ i o ile $\varphi \neq 0$, to $U \neq \emptyset$. Natomiast gdy $\forall_x \varphi(x) = 0$, wystarczy wziąć $U = X$. Aby wykazać, że (3. $\Rightarrow$ 1.) wystarczy znaleźć takie otoczenie W zera, którego obraz zawiera się w kole (odp. odcinku -gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) postaci $\epsilon \cdot \mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < \epsilon\}$, bo to jest baza otoczeń zera w $\mathbb{K}$. Zamiast $\forall \epsilon > 0$ wystarczy to sprawdzić dla tylko jednej wartości ϵ -bo zmniejszenie uzyskamy mnożąc W przez odpowiednio małą liczbę $r > 0$. Wybierając punkt $x_0 \in U$ i stosując przesunięcie o wektor $-x_0$ otrzymamy otoczenie zera $U - x_0$, którego obraz nie pokrywa całego $\mathbb{K}$. Bazę otoczeń zera stanowią zbiory zbalansowane, więc istnieje zbalansowane otoczenie zera W zawarte w $U - x_0$. Obraz $\varphi(W)$ przez odwzorowanie liniowe zbioru zbalansowanego jest zbalansowany, co wynika wprost z definicji i z jednorodności φ. Ale zbalansowane zbiory w $\mathbb{C}$ (odp. w $\mathbb{R}$) łatwo można opisać jako sumę mnogościową pewnej rodziny kół o środku w zerze (odp. odcinków $(-R, R) \subset \mathbb{R}$). Jeśli taki zbiór nie jest całym ciałem $\mathbb{K}$, to musi być ograniczony i wówczas zawiera się w pewnym zbiorze $R \cdot \mathbb{D}$, co implikuje ciągłość φ. $\Box$.

Jak zwykle, X będzie przestrzenią wektorową (w pierwszym twierdzeniu -nad ciałem $\mathbb{R}$, dalej nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Tym razem -nie zakładamy istnienia w X żadanej topologii.

Ze względu na geometryczne zastosowania, zamiast seminormy w X będziemy używać ogólnieniejszego pojęcia:

Definicja. Funkcjonałem wypukłym (lub sub-liniowym) nazywamy odwzorowanie $p : X \to \mathbb{R}$, które jest subaddytywne, czyli

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$$

oraz dodatnio jednorodne, tzn. takie, że

$$p(tx) = tp(x) \quad \texttt{dla wszystkich} \quad t > 0, x \in X.$$

Definicja. Funkcjonał $F : X \to \mathbb{K}$ jest przedłużeniem funkcjonału $f : M \to \mathbb{K}$ (odpowiednio: operator $T : X \to Y$ jest przedłużeniem operatora $S : M \to Y$), gdy M jest podprzestrzenią w X oraz zawężeniem F (odp. T) do tej podprzestrzeni M jest f (odp. S).

Następujące twierdzenie, chociaż z pozoru proste, ma zaskakująco dużą listę zastosowań:

Twierdzenie 1. (H.Hahn, S.Banach) *Jeżeli $f : M \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem $\mathbb{R}$ -liniowym na podprzestreni przestrzeni X, zaś $p : X \to \mathbb{R}$ jest takim funkcjonałem wypukłym na X, że $\forall_{x \in M} f(x) \leqslant p(x)$, to istnieje funkcjonał liniowy $F : X \to \mathbb{R}$ przedłużający f i taki, że $F(x) \leqslant p(x)$ dla wszystkich $x \in X$.*

Sformułujmy od razu "wersję zespoloną" (w której $\mathbb{K}$ może być jednym z dwu rozważanych ciał skalarów).

Twierdzenie 2. *Jeżeli $p : X \to \mathbb{R}$ jest semi-normą, to każdy funkcjonał liniowy f określony na podprzestrzeni $M \subset X$ spełniający warunek $|f(x)| \leqslant p(x)$ dla wszystkich $x \in M$ ma predłużenie liniowe $F : X \to \mathbb{K}$ takie, że $|F| \leqslant p$ na X.*

Dowód. Twierdzenie 1. dowodzone jest "technika małych kroków" -poprzez dołączanie do M nowych wektorów. **Pierwszy etap** polega na przedłużeniu f na obwiednię liniową X_1 zbioru $M \cup \{z\}$ dla ustalonego wektora $z \in X \setminus M$. Możemy wtedy przyjąć, że $X_1 = X$ -czyli że kowymiar M wynosi 1. Dowolny wektor $y \in X$ jest postaci $y = x + tz$, gdzie $t \in \mathbb{R}, x \in M$. Interesuje nas sytuacja, gdy $y \in X \setminus M$, czyli gdy $t \neq 0$. Chcąc wykorzystać dodatnią jednorodność p powinniśmy uwzględniać znak t. Wszystkie dwa przypadki uchwycimy zapisując y w postaci $y = x \pm tz, t > 0$. Jeśli F ma być liniowym przedłużeniem f, to musi być

$$F(x \pm tz) = f(x) \pm tF(z) \tag{1}$$

więc każde takie przedłużenie będzie jednoznacznie określone przez podanie wartości $\alpha := F(z)$.

Teraz wystarczy (dla zakończenia pierwszego etapu dowodu) wykazać, że zawsze znajdziemy taką wartość α, by $F \leqslant p$, czyli by $\forall t > 0, x \in M$ było $F(x \pm tz) \leqslant p(x \pm tz)$. Jest to koniunkcja dwu warunków (jeden -za znakami $+$, drugi z $-$). Mnożąc stronami przez $\frac{1}{t}$ otrzymamy z dodatniej jednorodności p i z (1) warunek równoważny nierówności $F \leqslant p$ postaci:

$$f(\frac{1}{t}x) \pm \alpha \leqslant p(\frac{1}{t}x \pm z), \quad x \in M, t > 0.$$

Ponieważ $\{\frac{1}{t}x : x \in M\} = M$, możemy w ten sposób wyeliminować t, czyli

$$F \leqslant p \Leftrightarrow (\forall_{x \in M} f(x) \pm \alpha \leqslant p(x \pm z)).$$

Prawa strona tej równoważności jest koniunkcją warunków

$$\forall_{x \in M} (f(x) - \alpha \leqslant p(x - z)) \wedge (f(x) + \alpha \leqslant p(x + z)).$$

Nasz warunek będzie spełniony, gdy istnieje takie α, że dla każdego $x \in M$ jest $f(x) - p(x - z) \leqslant \alpha \leqslant p(x + z) - f(x)$. To z kolei jest równoważne nierówności $\sup\{f(x) - p(x - z) : x \in M\} \leqslant \inf\{p(x + z) - f(x) : x \in M\}$ oraz warunkowi

$$\forall_{x_1, x_2 \in M} \ f(x_1) - p(x_1 - z) \leqslant p(x_2 + z) - f(x_2), \tag{2}$$

bo tu można przejść do odpowiednich kresów. Na przykład, traktując prawą stronę jako majorantę, przechodzimy z lewą stroną do supremum po $x \in M$, potem z tym supremum, jako minorantą dla prawej strony -postępujemy podobnie, biorąc infimum stron prawych. Przenosząc wyrazy ze znakiem "-" na drugą stronę widzimy, że (2) to jest warunek $f(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 - z) + p(x_2 + z)$. Wynika on z założonych nierówności: $f(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_2)$ oraz $p(x_1 + x_2) = p(x_1 - z + x_2 + z) \leqslant p(x_2 + z) + f(x_1 - z)$.

Drugi etap dowodu w przypadku gdy $\dim(X) < \infty$ (lub skończonego kowymiaru M w X) - może polegać na stosowaniu indukcji ze względu na ten kowymiar. W ogólnym przypadku, jeśli nie chcemy używać indukcji pozaskończonej (jak to robiono ponad 90 lat temu), użyjmy Lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech $\mathfrak{M}$ oznacza ogół par

$$\{(F, D) : M \subset D \subset X, F : D \to \mathbb{R} = \texttt{ liniowe przedłużenie f}, F \leqslant p|_D, \}.$$

Relacja $(F, D) \leqslant (F_1, D_1)$ określona przez warunki: $D \subset D_1, \ F_1|_D = F$ (czyli inkluzja wykresów odwzorowań) -jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna. Co więcej, każdy łańcuch (=liniowo uporządkowany podzbiór $\{(F_j, D_j) : j \in J\}$ zbioru $\mathfrak{M}$) ma majorantę -jest nią (F_*, D_*), gdzie $D_* = \bigcup_{j \in J} D_j$, zaś F_* jest sklejeniem odwzorowań F_j, $F_* : D_* \ni y \to F_\iota(y)$ -jeśli $y \in D_\iota$ dla pewnego $\iota \in J$. Niezależność tego określenia od wyboru takiego ι wynika z porównywalności każdej pary elementów w łańcuchu. Z Lematu Kuratowskiego-Zorna wynika więc istnienie elementu maksymalnego. Jego dziedziną jest $D_{max} = X$, bo w przeciwnym razie do podprzestrzeni D_{max} można dołączyć przynajmniej jeden nowy element stosując rozumowanie z I etapu prowadzące do uzyskania przedłużenia f na istotnie większą podprzestrzeń, co jest sprzeczne z maksymalnością elementu $(F_{\max}, D_{\max})$ w zbiorze częściowo uporządkowanym M. $\square$

Aby udowodnić "wersję zespoloną" wystarczy zastosować (do części rzeczywistej $h(x) := \Re f(x)$) Twierdzenie H-B oraz następujący fakt: (dla uproszczenia niech dla $g, p : X \to \mathbb{R}$ zapis $g \leqslant p$ oznacza, że $\forall_{x \in X} g(x) \leqslant p(x)$.)

Lemat. *Jeżeli $h : X \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem "rzeczywistym" (tzn. $\mathbb{R}$ -liniowym) oraz p jest semi-normą na przestrzeni X, to*

$$|h| \leqslant p \Leftrightarrow h \leqslant p.$$

Ponadto gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, to dla każdego funkcjonału rzeczywistego $h : X \to \mathbb{R}$ wzór $f(x) := h(x) - ih(ix)$ określa funkcjonał $\mathbb{C}$-liniowy, którego częścią rzeczywistą $\Re f$ jest h. Ponadto wówczas z warunku $\Re f \leqslant p$ wynika, że $|f| \leqslant p$.

Dowód: Rozpisując warunek $|h| \leqslant p$ w postaci równoważnej (koniunkcji 2 warunków ze znakami $+, -$): $(\pm h) \leqslant p$ widzimy, że wystarczy z $h \leqslant p$ wywnioskować, że $-h(x) \leqslant p(x)$. Ale $-h(x) = h(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$.

Warunek $\mathbb{R}$-liniowości dla $f(x) = h(x) - ih(ix)$ jest oczywisty. Rozdzielność mnożenia przez skalary względem dodawania skalarów teraz implikuje, że do sprawdzenia $\mathbb{C}$ -liniowości f wystarczy, by $f(i\beta x) = i\beta f(x)$ dla wszystkich $\beta \in \mathbb{R}$ - a nawet tylko dla $\beta = 1$. Przeliczenie tego jest trywialne. W przypadku zespolonym zamiast wzoru $|h(x)| = \mathit{signum}(h(x)) \cdot h(x)$ użyjemy (zależnej od x, rzeczywistej) liczby ϕ, dla której $|f(x)| = e^{i\phi} f(x)$. Ostatnia wartość, to dokładnie $f(e^{i\phi}x) = \Re f(e^{i\phi}x)$ i jest ona nie większa od $p(x)$. $\square$

Twierdzenie 3. *W przestrzeni unormowanej X każdy funkcjonał liniowy ciągły na podprzestrzeni $M \subset X$ można rozszerzyć na całą przestrzeń z zachowaniem normy.*

Faktycznie, ciągłość funkcjonału $f : M \to \mathbb{K}$ oznacza tu istnienie stałej C takiej, że $\forall_{x \in M} |f(x)| \leqslant C\|x\|$, a najmniejszą taką stałą jest $C = \|f\|$. Dla $p(x) = \|f\|\|x\|$ wystarczy zastosować ostatnie twierdzenie. Zauważmy jeszcze, że skoro istnieją przestrzenie wektorowe topologiczne (jak przestrzeń (Frécheta) $L^{\frac{1}{2}}[0,1]$), na których jedynym funkcjonałem liniowym ciągłym jest 0, (a na ich podprzestrzeniach skończenie wymiarowych jest mnóstwo niezerowych funkcjonałów ciągłych), to twierdzenia tego nie można uogólnić na dowolne "PWT".$\square$

Twierdzenie 4.(O wydobywaniu normy) *W przestrzeni unormowanej dla każdego wektora $x \in X$ istnieje taki funkcjonał liniowy ψ o normie 1, dla którego $\|x\| = \psi(x)$. W szczególności mamy "dualny wzór na normę":*

$$\|x\| = \sup\{|\phi(x)| : \phi \in X', \|\phi\| = 1\}.$$

Dla dowodu- na podprzestrzeni 1-wymiarowej $\mathbb{K} \cdot x$ definiujemy funkcjonał $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$ (o normie 1). Wówczas możemy określić ψ jako jego przedłużenie z zachowaniem normy na całą przestrzeń X. Wartość kresu górnego jest w dualnym wzorze na normę osiągnięta dla $\phi = \psi$. Oczywiście, wartości $|\phi(x)| \leqslant \|\phi\|\|x\|$ nie przekraczają tu $\|x\|$. $\square$

Uwaga: Taki "funkcjonał normujący" można czasami znaleźć *explicite* bez konieczności używania pewnika wyboru. Na przykład w $L^p(\mu), p > 1$ jeśli przypomnimy sobie, kiedy w nierówności Younga zachodzi równość, to znajdziemy taką funkcję $g \in L^q(\mu)$ o normie 1, dla której $|\int fgd\mu| = \|f\|_p$. Na przykład, gdy $f \geqslant 0$, to $g = \frac{1}{\|w\|_q} w$ dla $w = f^{p-1}$. Nawiasem mówiąc, stosowanie dualnego wzoru na normę jest "jedyną słuszną" metodą szacowania norm dla pewnych operatorów całkowych -gdyż w całkach iterowanych pozbywamy się problemu wykładników typu p - pod całką funkcje są w pierwszej potędze.

Jako jedno z ciekawszych zastosowań podajmy dowód następującego Twierdzenia Riesza o Reprezentacji (=o postaci funkcjonału):

Twierdzenie 4.(F. Riesz) *Jeśli $\Phi : C_{\mathbb{R}}[a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym, to istnieje funkcja o wahaniu skończonym $g \in BV[a,b]$, dla której $\forall_f\ \Phi(f) = \int_a^b f(t)dg(t)$ (całka Riemanna-Stieltjesa).*

Uwaga: Można dodatkowo postulować prawostronną ciągłość g a wówczas $g = g_1 - g_2$ dla pary funkcji niemalejących prawostronnie ciągłych, a każda z takich funkcji jest dystrybuantą pewnej miary borelowskiej (np. $\mu_1((-\infty, x]) = g_1(x)$). Mamy wtedy dla $\mu = \mu_1 - \mu_2$ częściej używaną reprezentację dowolnego funkcjonału $\mathbb{R}$- liniowego ciągłego $\Phi : C_{\mathbb{R}}(K) \to \mathbb{R}$ (tw. Riesza-Markowa-Kakutaniego mówi, że zachodzi ona dla każdej przestrzeni topologicznej zwartej K)): $\Phi(f) = \int_K f\, d\mu$, gdzie ostatnia całka, to $\int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2$. Takie twierdzenie, zachodzi też dla funkcjonałów $\mathbb{C}$-liniowych, których reprezentacje odbywają się przez zespolone miary borelowskie regularne na K.

Dowód: Funkcjonał Φ przedłużamy z zachowaniem normy na przestrzeń wszystkich funkcji ograniczonych na $[a, b]$ z normą $\|f\|_{[a,b]}$. W zasadzie interesować nas będą jedynie funkcje charakterystyczne odcinków zawartych w $[a, b]$. Niech $g(x) := \Phi(\chi_{[a,x]})$. Aby wykazać, że wahanie całkowite g jest ograniczone, rozwazmy podział $[a, b]$ punktami $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$. Niech $\Delta_k g := g(t_k) - g(t_{k-1})$ będą przyrostami g na k-tych odcinkach podziału, $k = 1, 2, \ldots, n$. Niech α_k będą takimi liczbami o module 1, że $\alpha_k \Delta_k g = |\Delta_k g|$. Wtedy funkcja

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{(t_{k-1}, t_k]} \tag{3}$$

jest ograniczona, o normie supremowej równej 1. Stąd $|\Phi(u)| \leqslant \|\Phi\|$. Ale $\Phi(\chi_{(t_{k-1},t_k]}) = \Phi(\chi_{[a,t_k]} - \chi_{[a,t_{k-1}]}) = g(t_k) - g(t_{k-1}) = \Delta_k g$ dla $k \geqslant 2$. W konsekwencji, $\Phi(u) = \sum_{k=1}^{n} |\delta_k| \leqslant \|\Phi\|$, co daje ograniczoność wahania: $V_a^b g \leqslant \|\Phi\|$.

Jeżeli teraz mamy ustaloną funkcję $f \in C_[a, b]$, niech tym razem we wzorze (3) liczby α_k będą równe $f(t_k)$. Wtedy

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{k} f(t_k)\Phi(\chi_{(t_{k-1},t_k]}) = \sum_{n=1}^{k} f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})).$$

Ostatnie sumy zmierzają do całki Riemanna-Stieltjesa $\int_a^b f\, dg$, gdy średnice podziałów dążą do zera. Natomiast norma supremowa różnicy $f - u$, to maksimum z norm różnic po przedziałach $[t_k, t_{k-1}]$ miedzy $f(x)$ a liczbami $\alpha_k = f(t_k)$. Z warunku jednostajnej ciągłości wiemy, że te (jednostajne) oszacowania różnic zmierzają do zera gdy średnica podziału jest dostatecznie mała. Czyli wartości $\Phi(u)$ zmierzają do $\Phi(f)$. Rozumowanie bez zmian stosuje się do funkcjonałów zespolonych na $C[a, b]$ w miejsce $C_{\mathbb{R}}([a, b])$.$\square$

Zauważmy jeszcze, że dzięki ciągłości f całka $\int f\, dg$ nie ulegnie zmianie po prawostronnie ciągłej modyfikacji funkcji g. Jak wiemy, skoro g jest różnicą pary funkcji monotonicznych, to w każdym punkcie ma ona granice 1-stronne. Ta modyfikacja, to "zapełnienie pustych kropek w punktach skoków g po prawej stronie", czyli zmiana wartości g w punktach skoków, kompensowana przez ciągłość f.

Dobrym źródłem wiedzy o całce Stieltjesa może być książka S. Łojasiewicza "Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych". Coś zresztą starałem się umieścić w moim kursie analizy (II semestr)

W tym twierdzeniu korzystałem z dowodu umieszczonego w skrypcie T. Pytlika.

`http://www.math.uni.wroc.pl/~jdziuban/skryptPytlik.pdf`

-zawierającego m. inn. dość szczegółowe omówienie całki Stieltjesa. Zauważyłem (dopiero w marcu 2020!) jedną usterkę w tamtym skrypcie, która nawet komplikowała postać wzoru (3) -jest nią (przy moich oznaczeniach) stwierdzenie, jakoby $g(a) = 0$, czy w oznaczeniach tamtego skryptu "$f(t_0) = 0$", gdzie przez f Autor oznacza to, co ja przez g. To nie działa dla funkcjonału $\Phi(h) = h(a), h \in C([a, b])$ reprezentowanego przez "deltę Diraca"- miarę z 1 atomem w punkcie a. Odjęcie stałej $g(a)$ nie zmieni wartości całki Stieltjesa, a usunie ten problem. Mamy bowiem $g(a) = \Phi(\chi_{\{a\}})$, po odjęciu dostajemy dokładnie taką, jak napisałem, funkcję u (w skrypcie oznaczaną x_P, gdzie P jest oznaczeniem danego podziału odcinka $[a, b]$). Dalsze, w tym geometryczne zastosowania twierdzenia H-B podam w następnym wykładzie.