

## 4 Oddzielanie zbiorów a przełóżanie funkcjonalów -c.d.

### 4.1 Uwagi uzupełniające

Przedłużanie operatorów liniowych z podprzestrzeni występuje też w bardziej elementarnej sytuacji: gdy dana podprzestrzeń liniowa jest zbiorem gęstym w przestrzeni unormowanej  $X$ . Wtedy bez użycia pewnika wyboru można łatwo wykazać następujące twierdzenie Banacha:

**Twierdzenie 1.** Operator liniowy ciągły  $T \in \mathcal{B}(M, Y)$  na gęstej podprzestrzeni  $M$  przestrzeni  $X$ , o wartościach w przestrzeni zupełnej  $Y$  ma dokładnie jedno przedłużenie do operatora liniowego ciągłego  $\bar{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$  na całej przestrzeni.

**Dowód.** Gęstość dziedziny  $T$  oznacza, że dla każdego  $x \in X$  istnieje ciąg wektorów  $x_n \in M$  zbieżny do  $x$ . O ile  $\bar{T}$  ma być ciągłym przedłużeniem  $T$ , musi być  $\bar{T}x = \lim Tx_n$ . Liniowość będzie wtedy łatwym wnioskiem z ciągłości działań wektorowych i z liniowości  $T$  na podprzestrzeni  $M$ , a po przejściu do granicy z nierównościami uzyskamy  $\|\bar{T}x\| \leq M\|x\|$ , czyli ciągłość  $\bar{T}$ . Wystarczy więc wykazać istnienie granicy  $\lim Tx_n$  w takiej sytuacji i jej niezależność od wyboru ciągu  $x_n \in M$  zmiernającego do  $x$ . Ta niezależność wynika z tezy o istnieniu granicy, bo mając dwa ciągi można je przetasować<sup>1</sup>. Zbieżność wynika z zupełności  $Y$  i z warunku Cauchy'ego, gdyż  $\|Tx_n - Tx_k\| \leq M\|x_n - x_k\| \rightarrow 0$  przy  $n, k \rightarrow \infty$ . Gdy  $x \in M$ , to możemy jako aproksymujące  $x_n$  wybrać ciąg stały równy  $x$ , więc  $\bar{T}$  jest przedłużeniem  $T$ . (Symbol  $\bar{T}$  jest nieprzypadkowy -wykres  $\bar{T}$  jest domknięciem wykresu  $T$  w topologii produktu  $X \times Y$ ).

Wystarczy więc zbadać, czy możemy przedłużać operatory określone na podprzestrzeniach domkniętych  $M$ , co zaznaczymy pisząc  $M = \bar{M}$ . Gdy istnieje operator projekcji z  $X$  na  $M$ , czyli taki operator liniowy, ciągły  $P : X \rightarrow X$ , że  $P \circ P = P, P(X) = M$ , możemy określić  $\tilde{T}(x)$  wzorem

$$\tilde{T}x = (T \circ P)(x), \quad x \in X.$$

Nietrudno sprawdzić, że  $Pv = v$  dla wszystkich  $v \in M$ , co daje liniowe, ciągle rozszerzenie  $\tilde{T}$  operatora  $T$ .

Na odwrót: gdy istnieje możliwość przedłużania wszystkich operatorów  $T \in \mathcal{B}(M, Y)$  do jakichś operatorów  $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ , to otrzymamy projekcję  $P$  jako przedłużenie operatora  $I_M$  identyczności na  $M$  do pewnego operatora  $P \in \mathcal{B}(X, M)$ , który spełnia warunki projekcji na  $M$ . Mówimy, że **podprzestrzeń domknięta  $M$  jest uzupełnialna w  $X$** , gdy istnieje podprzestrzeń domknięta  $N \subset X$  taka, że  $X$  jest sumą prostą  $M \oplus N$ . Jak można wykazać, uzupełnialność  $M$  w  $X$  jest równoważna istnieniu projekcji ciągłej  $P \in \mathcal{B}(X, M)$  (wtedy  $N = \ker(P), M = P(X)$  -na odwrót, z jednoznaczności rozkładu  $x = y + z, y \in M, z \in N$  wynika liniowość  $P$  określonego wzorem  $Px := y$ ). Ciągłość  $P$  wynika z twierdzenia Banacha o izomorfizmie, które będzie dopiero za parę tygodni.

Lindenstrauss i Tzafriri udowodnili dość zaskakujące twierdzenie, że jeśli każda domknięta podprzestrzeń  $M$  w przestrzeni Banacha  $X$  jest uzupełnialna, to  $X$  jest izomorficzna (choć na ogół nie izometrycznie) z pewną przestrzenią Hilberta  $H$ . (W przestrzeniach Hilberta  $H$  dopełnieniem  $M$  do sumy prostej będzie  $N = \{x \in H : \forall y \in M x \perp y\}$ , zaś  $P$  będzie rzutem prostopadłym.

Banach stosował twierdzenie H-B do udowodnienia, że **istnieje niezmiennicza względem przesunięć skończenie addytywna "miara"** (funkcja zbioru) określona dla wszystkich podzbiorów w  $\mathbb{R}$ , pokrywająca się dla zbiorów mierzalnych ze zwykłą miarą (Jordana, lub Lebesgue'a). Dalej w tym kierunku, wykazał wspólnie z Tarskim, że niezmienniczość względem izometrycznych przekształceń uniemożliwia istnienie nawet skończenie addytywnej "miary" na sferze w  $\mathbb{R}^3$

<sup>1</sup>Albo bezpośrednio: Gdyby wybrać inny ciąg  $z_n$  zbieżny do tego samego  $x$ , to  $\|z_n - x_n\| \rightarrow 0$ , więc z nierówności  $\|Tz_n - Tx_n\| \leq M\|z_n - x_n\|$  wynika, że  $\lim Tz_n = \lim Tx_n$  i nasza definicja  $\bar{T}x$  jest poprawna (nie zależy od wyboru ciągu z  $M$  aproksymującego  $x$ ).

określonej dla wszystkich jej podzbiorów (*paradoksalny rozkład sfery*). Z kolei von Neumann zauważył, że pośrednią przyczyną takiej patologii jest nieprzemienność grupy izometrii sfery. Wyróżnił w związku z tym pojęcie grup dopuszczających średnie (ang. "amenable groups"). Jak bowiem wykazał, "Abelian groups are amenable".

Innym zastosowaniem są tak zwane "granice Banacha" w odróżnieniu od zwykłych -pisane z dużej litery: LIM. Banach wykazał, że istnieje funkcjonal liniowy  $LIM : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  na przestrzeni  $\ell^\infty$  wszystkich ciągów ograniczonych, oszacowany przez  $\limsup$  oraz "niezmienniczy względem przesunięć" w tym sensie, że  $LIM(x_{n+1}) = LIM(x_n)$  a ponadto pokrywający się z granicą:  $\lim x_n$  dla ciągów zbieżnych.

(Ten wstępny fragment (z wyjątkiem Tw.1) nie jest materiałem obowiązkowym.)

## 4.2 Oddzielanie zbiorów wypukłych

**Definicja 1.** Mówimy, że funkcjonal liniowy rzeczywisty ciągły  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  oddziela zbiory  $A, B \subset X$ , jeżeli obrazy  $\phi(A), \phi(B)$  zawierają się odpowiednio w półprostych typu  $(-\infty, \alpha), [\alpha, +\infty)$  dla pewnej liczby  $\alpha \in \mathbb{R}$  (kolejność zbiorów może być tu odwrócona). W przypadku przestrzeni zespolonej oddzielanie przez funkcjonal  $\mathbb{C}$ -liniowy  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  oznacza, że jego część rzeczywista,  $\phi = \Re f$  oddziela te zbiory w powyższym sensie. Można też mówić o oddzielaniu ścisłym, gdy  $\phi(A) \subset (-\infty, \alpha], \phi(B) \subset [\beta, +\infty)$  dla pewnych  $\alpha < \beta$ .

Zawsze będziemy zakładali wypukłość i rozłączność zbiorów oddzielanych. Obrazy przez odwzorowania liniowe takich zbiorów wypukłych są wypukłe - są to więc przedziały lub półproste w  $\mathbb{R}$ ). Możliwość oddzielania wypukłych zbiorów przez  $\phi$  jest więc równoważna rozłączności ich obrazów przez  $\phi$ . Jeśli oddzielający funkcjonal jest ciągły (a do tego wystarcza np., by jeden z oddzielanych zbiorów miał niepuste wnętrze), to  $E_\alpha := \{x \in X : \phi(x) = \alpha\}$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową rzeczywistą o kowymiarze 1 w  $X$ . Skrótowo nazwijmy takie zbiory zbiorami typu " $E_\alpha$ " (spotyka się też nazwę "hiperplaszczyny"). Dopelnienie takich zbiorów ( $X \setminus E_\alpha$ ) ma dokładnie dwie składowe spójne, więc można powiedzieć, że hiperplaszczyny rozcinają przestrzeń  $X$  - a w naszej sytuacji, oddzielają zbiory. Aby udowodnić istnienie takiego oddzielania, będziemy potrzebowali pewnego (nieliniowego) funkcjonału  $p_A$ .

**Definicja 2.** Zbiór  $A \subset X$  nazywamy **zbiorem pochłaniającym**, gdy

$$\forall x \in X \exists a > 0 \forall b > a \ x \in bW.$$

Dla zbiorów wypukłych  $A$  jest pochłaniający, gdy  $\forall x \in X \exists c > 0 \ x \in cA$ . Geometrycznie, chodzi o to, by odcinek otwarty łączący punkt  $x$  z zerem zawierał w zbiorze  $A$  jakiś niezerowej długości odcinek o końcu 0 (tu odcinek  $\{\frac{1}{b} \cdot x : a < b\}$ ). Biorąc  $x = 0$ , ponieważ  $b \neq 0$  -widzimy, że musi być zawsze  $0 \in A$ . W przypadku zbioru wypukłego wystarczy, by taki odcinek o końcach  $x, 0$  zawierał przynajmniej jeden punkt ze zbioru  $A$ .

**Definicja 3.** Funkcjonałem Minkowskiego (lub "funkcją kalibrującą" (po angielsku: *gauge function*)) dla zbioru pochłaniającego  $A$  nazywamy funkcję

$$p_A(x) := \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Wartość  $p_A(x)$  odpowiada na pytanie: "ile razy należy powiększyć zbiór  $A$  tak, by wchłonąć punkt  $x$ ". Na przykład, niech  $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$  oraz  $\bar{B} = \{x \in X : p(x) \leq 1\}$  będą kulami jednostkowymi: otwartą (odp. domkniętą) dla pewnej seminormy (np. normy)  $p$ . Wtedy łatwo sprawdzić, że  $tB$  jest kulą o promieniu  $t$  i stąd już nietrudno wywnioskować, że  $p_B = p_{\bar{B}} = p$ . Ponadto dla wypukłych  $A$  mamy  $p_A(x) = 0 \Leftrightarrow \{tx : t > 0\} \subset A$ . Tak więc mając daną kulę możemy odtworzyć definiując ją normę (odp. seminormę). Nie każdy zbiór wypukły i pochłaniający może być kulą o środku w punkcie 0. Faktycznie, dla seminorm  $p$  i dla liczby  $\lambda$  o module  $|\lambda| \leq 1$  mamy  $p(x) < 1 \Rightarrow p(\lambda x) < 1$ . (Dla

$\leq$  -analogicznie). Kule muszą być absolutnie wypukłe, a w przypadku norm nie mogą zawierać niezerowych podprzestrzeni liniowych w  $X$ .

Ponieważ dla  $s > 0$  mamy  $sx \in sA \Leftrightarrow x \in A$ , zaś dla  $E \subset \mathbb{R}_+$  mamy  $\inf\{st : t \in E\} = s \inf E$ , wnioskujemy stąd dodatnią jednorodność  $p_A$ : mamy więc  $\forall_{s>0} p_A(sx) = sp_A(x)$ . Zauważmy jeszcze, (= proste ćwiczenie) że:

zbiór  $A \subset X$  jest wypukły (odp. absolutnie wypukły) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{s,t>0} sA+tA = (s+t)A \quad \text{odpowiednio} \quad \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \alpha A + \beta A = (|\alpha| + |\beta|)A. \quad (1)$$

**Twierdzenie.** (H.MINKOWSKI) Gdy zbiór  $A$  jest wypukły i pochłaniający, to  $p_A$  jest funkcjonalem subaddytywnym i dodatnio jednorodnym. Zbiór  $A$  jest "z dokładnością do brzegu kulą jednostkową względem  $p_A$ " czyli

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}. \quad (2)$$

Gdy ponadto  $A$  jest absolutnie wypukły,  $p_A$  jest seminormą, której jądrem jest największa podprzestrzeń liniowa przestrzeni  $X$  zawarta w  $A$ . Pierwsza z inkluzji (2) jest równością, gdy  $A$  jest otwarty w topologii jakiejś PWT, druga jest równością, gdy jest on domknięty.

**Dowód. (szkic)**

Jeśli  $x \in tA, y \in sA$ , to  $x + y \in tA + sA = (t + s)A$ , więc

$$\{t > 0 : x \in tA\} + \{s > 0 : y \in sA\} \subset \{c > 0 : x + y \in cA\}.$$

Infimum sumy Minkowskiego 2 zbiorów liczbowych to suma ich infimów, zaś infimum nadzbioru jest  $\leq$  od infimum podzbioru (relacje  $\leq$  mają kierunek przeciwny do inkluzji dla kresów dolnych), stąd wynika, że

$$p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y).$$

Jednorodność dodatnią już sprawdziliśmy. Jest to więc "funkcjonał wypukły".

Dla dowodu pełnej jednorodności w przypadku abs. wypukłym wystarczy wziąć dowolne  $\lambda \in \mathbb{K}$  takie, że  $|\lambda| = 1$  (bo już mamy dodatnią jednorodność) i wykazać, że wtedy  $p_A(\lambda x) = p_A(x)$ . Do tego przyda się nam równoważność prawdziwa dla ustalonego  $t > 0$ :  $t\lambda x \in A \Leftrightarrow t|\lambda|x \in A$  oraz prawdziwa dla zbiorów  $E \subset \mathbb{R}_+$  i dla liczb  $c = |\lambda|$  równość kresów:  $\inf(cE) = c \inf(E)$ . Ale że to szkic -tego fragmentu nie kończę. Gdy  $p_A(x) < 1$ , to 1 nie jest minorantą zbioru tych  $t > 0$ , dla których  $x \in tA$ , czyli istnieje  $s < 1, s > 0$  oraz  $z \in A$  takie, że  $x = sz$ . Ale ponieważ  $0 \in A$ , również kombinacja wypukła:  $(1 - s)0 + sz = x$  należy do  $A$ , co dowodzi pierwszej inkluzji w (2). Gdy  $x \in A$ , to  $t = 1$  należy do zbioru, którego kresem dolnym jest  $p_A$ , stąd  $p_A(x) \leq 1$ . Gdy  $p_A(y) < 1$ , to już wiemy, że  $y \in A$ . Gdy teraz  $p_A(x) = 1$ , za  $y$  przyjmijmy wyrazy ciągu  $y_n = (1 - \frac{1}{n})x$ , z jednorodności wyniknie, że  $p_A(y_n) < 1$ , więc  $y_n \in A$ . Ponieważ  $\lim y_n = x$ , w przypadku zbioru domkniętego otrzymamy  $x \in A$ . W przypadku  $A$  otwartego dla  $z \in A$  istnieje  $c > 1$  dla którego nadal  $cz \in A$ , z ciągłości mnożenia ustalonego wektora  $z$  przez skalary. Stąd  $cp(z) = p(cz) \leq 1$ , na mocy drugiej z inkluzji (2), więc  $p(z) < 1$ .  $\square$

**Definicja 4.** Mówimy, że *przestrzeń wektorowa topologiczna  $X$  jest lokalnie wypukła*, gdy istnieje w niej baza otoczeń zera złożona ze zbiorów wypukłych.

Topologie opisane przez normy, lub przez rodziny seminorm są, oczywiście, lokalnie wypukłe. Teza odwrotna też jest prawdziwa! Stosunkowo łatwo sprawdzić, że w przestrzeni lokalnie wypukłej istnieje zawsze baza otoczeń absolutnie wypukłych zera. (Gdy zbiór  $A$  jest wypukły, to zbiór  $\{\lambda x : x \in A, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\}$  jest już absolutnie wypukły. Wystarczy teraz wybierać wypukłe otoczenia zera, które są podzbiórami jakiejś bazy otoczeń zbalansowanych zera.) Mamy wtedy dla każdego otwartego, absolutnie wypukłego otoczenia zera  $U$  seminormę  $p_U$ , której kule są otwarte w topologii  $X$  (są postaci  $rU$ ), rodzina tych kul (indeksowana przez zbiory  $U$ ) określi więc taką samą topologię. Można więc zapytać, kiedy topologię da się określić nie przez rodzinę seminorm, ale przez 1 normę? Odpowiedź znalazł Kołmogorow. Wykazał, że to

zachodzi w lokalnie wypukłej przestrzeni Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jakieś ograniczone otoczenie zera. Oczywiście, potrzebna jest tu jeszcze jedna definicja:

**Definicja .** Zbiór  $E$  w PWT  $X$  jest ograniczony, gdy "jest pochłaniany przez dowolne otoczenie zera":  $\forall U$  jeśli  $U$  jest otoczeniem zera, to  $\exists t > 0$   $E \subset tU$ . (W definicji zbioru pochłaniającego  $A$  każdy punkt miał być pochłonięty, tu trzeba "połączyć" cały zbiór  $E$ ). Ten fragment (poniżej definicji 4.) miał charakter informacyjny.

Teraz już możemy sformułować twierdzenie o oddzielaniu zbiorów.

**Twierdzenie.** Zbiory wypukłe, rozłączne  $A, B$  w przestrzeni wektorowej topologicznej  $X$  można rozdzielić pewnym funkcjonałem liniowym ciągłym  $\phi$ , jeśli zachodzi przynajmniej jeden z następujących warunków.

- (i) Zbiór  $A$  jest otwarty, zaś  $B$  -jednoelementowy ( $B = \{x_0\}$ );
- (ii) Jeden ze zbiorów  $A, B$  jest otwarty;
- (iii) Przestrzeń jest lokalnie wypukła, zbiór  $A$  jest domknięty,  $B$  jest jednoelementowy.
- (iv) W przestrzeni unormowanej gdy  $\delta := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0$

Zauważmy, że w sytuacji (i) lub (iii) oddzielamy punkt od zbioru wypukłego. W przypadku zespolonym traktujemy przestrzeń wektorową nad  $\mathbb{C}$  jako również przestrzeń rzeczywistą. Mając funkcjonał  $\mathbb{R}$ -liniowy  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  oddzielający te zbiory tworzymy funkcjonał  $\mathbb{C}$ - liniowy wzorem  $f(x) := \phi(x) - i\phi(ix)$  ( $f =$  tzw. kompleksyfikacja  $\phi$ ) i jego własność oddzielania wynika z Definicji 1. WYSTARCZY WIĘC ROZPATRYWAĆ PRZYPADEK RZECZYWISTY.

**Dowód.** Przesunięcia równoległe są homeomorfizmami i funkcjonał oddzielający zbiory  $A, B$  oddziela też zbiory  $A - a_0$  oraz  $\{x_0 - a_0\}$ , z których pierwszy jest otwarty (przy założeniach (i)) i zawiera 0, jeśli  $a_0 \in A$ . Bez straty ogólności można więc przyjąć, że  $A$  jest otwartym otoczeniem zera. Wtedy zbiór  $A$  jest pochłaniający i jego funkcjonał Minkowskiego  $p_A$  jest  $< 1$  na zbiorze  $A$  oraz  $\geq 1$  dla  $x_0 \notin A$ . Na jedno-wymiarowej podprzestrzeni  $\mathbb{R} \cdot x_0$  zdefiniujemy  $\phi(tx_0) := tp_A(x_0)$  dla  $t \in \mathbb{R}$ . Ponieważ  $p_A \geq 0$ , dla  $t \leq 0$  nierówność  $\phi \leq p_A$  zachodzi na tej półprostej  $\{tx_0 : t \leq 0\}$ . Dla  $t = 1$  też jest już oczywista, a dla pozostałych  $t > 0$  wynika z dodatniej jednorodności  $p_A$ . Przedłużenie liniowe z zachowaniem nierówności  $\phi \leq p_A$  na całą przestrzeń  $X$  oznaczymy dalej tą samą literą  $\phi$ . Będzie to funkcjonał oddzielający punkt  $x_0$  od zbioru  $A$ .

Przy założeniach punktu (ii) niech  $A - B := \{a - b : b \in B, a \in A\}$ . Rozłączność zbiorów oznacza tu, że  $0 \notin A - B$ . Ponadto zbiór  $A - B$  jest otwarty, jako suma  $\bigcup_{b \in B} A - b$  przesunięć zbioru otwartego. Udowodniony już fragment (i) twierdzenia dostarcza nam funkcjonału (np.  $\psi$ ) oddzielającego punkt 0 (zero) od zbioru otwartego  $A - B$  (jego wypukłość jest niemal oczywista- trzeba rozpisać kombinację wypukłą punktów  $a_1 - b_1$  oraz  $a_2 - b_2$  jako różnicę dwu kombinacji wypukłych z odpowiednich zbiorów). Ale skoro  $\psi(a - b) \neq 0$ , dla dowolnych  $a \in A, b \in B$ , to rozłączne są zbiory  $\psi(A), \psi(B)$  (które są przedziałami, jako wypukłe podzbiory w  $\mathbb{R}$ ). To dowodzi, że  $\psi$  jest szukanym funkcjonałem oddzielającym.

Ad (iii). Punkt nienależący do zbioru domkniętego ma otoczenie rozłączne z tym zbiorem. W przestrzeni lokalnie wypukłej można (biorąc zbiór mniejszy w razie potrzeby) założyć, że jest to otwarte, wypukłe otoczenie punktu  $x_0$  -rozłączne z  $A$ . Teraz oddzielamy od zbioru  $A$  całe to otoczenie, wykorzystując punkt (ii). W każdym przypadku mamy więc obraz przez funkcjonał oddzielający pewnego niepustego zbioru otwartego -różny od całego  $\mathbb{R}$ , co gwarantuje, jak już wiemy, ciągłość funkcjonału. (Zachowa się ona też, rzecz jasna, po kompleksyfikacji).

(iv) otrzymamy oddzielając 2 zbiory otwarte:  $\epsilon$  -otoczki tych zbiorów (np.  $A(\epsilon) := \{x \in X : \inf\|x - a\| : a \in A < \epsilon\}$  - proszę sprawdzić, że przy naszych założeniach  $A(\epsilon), B(\epsilon)$  są to zbiory wypukłe, otwarte i rozłączne, gdy  $\epsilon < \frac{\delta}{2}$ . Ponadto funkcja:  $(0, \frac{\delta}{2}) \ni \epsilon \mapsto \inf \phi(A(\epsilon))$  jest silnie rosnąca ( $\Rightarrow$  ściśle oddzielanie).  $\square$

### 4.3 Przykład zastosowania w teorii aproksymacji

Na wstępie zauważmy, że obraz zbioru otwartego  $U$  przez dowolny niezerowy funkcjonal liniowy jest otwarty. Jest tak dzięki jednorodności: gdy  $a \in U$ , to istnieje  $W$ - otoczenie punktu 1 w  $\mathbb{K}$  takie, że  $W \cdot a := \{za : z \in W\} \subset U$ . Gdy  $\phi(a) \neq 0$ , to  $\phi(W \cdot a) = W \cdot \phi(a)$  jest otwartym otoczeniem  $\phi(a)$  zawartym w  $\phi(U)$ . Gdy  $\phi(a) = 0$ , wybieramy jakiś  $z \in X \setminus \ker(\phi)$  i stosujemy rozumowanie dla zbioru przesuniętego  $U + z$ , wykazując, że  $\phi(a + z)$  leży wewnątrz jego obrazu. Przesunięcie  $a$  oraz  $U$  o  $-z$  (a obrazów o  $-\phi(z)$  jest homeomorfizmem i daje  $\phi(a) \in \text{int}(\phi(U))$ ). Wynika stąd, że funkcjonal oddzielający (w tezie (iii)) punkt  $x$  od zbioru domkniętego  $F$  oddziela w sposób ścisły (bo pewne otoczenie punktu  $x$  będzie miało obraz rozłączny z  $\phi(F)$ ).

Najmniejszy wypukły [odpowiednio -absolutnie wypukły] zbiór domknięty zawierający dany zbiór  $E$  nazywamy domkniętą obwiednią [absolutnie] wypukłą zbioru  $E$  i oznaczamy  $\overline{\text{conv}}(E)$  [odp.  $\text{abs conv}(E)$ ]. Nietrudno jest wykazać (szczegóły pomijam), że wektor  $x$  należy do takiej obwiedni wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą ciągu kombinacji wypukłych [odp. absol. wyp.] punktów zbioru  $E$ . Np. kombinacje abs. wypukłe punktów  $y_1, \dots, y_k$ , to sumy postaci  $\sum_{j=1}^k \alpha_j y_j$ , gdzie  $\alpha_j \in \mathbb{K}$ ,  $\sum_j |\alpha_j| \leq 1$ . Ponadto zbiory  $\overline{\text{conv}}(E)$  są wypukłe, zaś  $\text{abs conv}(E)$  są absolutnie wypukłe. Analogicznie jest dla domkniętej obwiedni liniowej,  $\overline{\text{span}}(E)$  zdefiniowanej jako zbiór wektorów będących granicami (zbieżnych) ciągów kombinacji liniowych punktów z  $E$ . Ponadto obrazy przez funkcjonały liniowe zachowują "typ wypukłości". Podzbiór w  $\mathbb{R}$  jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem absolutnie wypukłe podzbiory właściwe w  $\mathbb{C}$  - to koła o środku w 0 (domknięte lub otwarte), Jedyną właściwą podprzetrznią w  $\mathbb{K}$  jest  $\{0\}$ . Wynika stąd (i z tezy (iii) ostatniego twierdzenia następujący wniosek:

**Twierdzenie.** Jeśli  $\emptyset \neq E \subset X$  dla przestrzeni lokalnie wypukłej  $X$  oraz  $x \in X$ , to

- (i)  $x \in \overline{\text{span}}(E) \Leftrightarrow (\phi \in X^*, \forall a \in E \phi(a) = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0)$
- (ii)  $x \in \overline{\text{conv}}(E) \Leftrightarrow (\phi \in X^*, \forall a \in E \Re \phi(a) \leq c \Rightarrow \Re \phi(x) \leq c)$
- (iii)  $x \in \overline{\text{abs conv}}(E) \Leftrightarrow (\phi \in X^*, \forall a \in E |\phi(a)| \leq c \Rightarrow |\phi(x)| \leq c)$

Dowód kluczowych implikacji  $\Leftarrow$  każdym z przypadków przebiega metodą nie wprost analogicznie: gdyby punkt  $x$  nie należał do zbioru (wypukłego, znajdującego się po lewej stronie równoważności), to dla pewnego  $\phi \in X^*$  mielibyśmy  $\phi(x)$  nienależące (wraz z pewnym swoim otoczeniem) do obrazu tego zbioru przez  $\phi$  (w przyp. (ii) zastąpimy  $\phi$  przez  $\Re \phi$ ). W przypadku (i) tym obrazem jest  $\{0\}$ , w drugim -przedział, a to, po której jego stronie jest  $\phi(x)$  można skorygować zastępując  $\phi$  przez  $-\phi$ . W ten sposób dochodzimy do sprzeczności z warunkiem po prawej stronie. Analogicznie jest w przypadku (iii), gdyż nienależenie  $\phi(x)$  (wraz z otoczeniem) do koła o środku 0 i o promieniu  $c$  w  $\mathbb{C}$  (lub w  $\mathbb{R}$ ) implikuje, że  $|\phi(x)| > c$ .

Implikacje przeciwne wynikają z ciągłości funkcjonałów i z ich liniowości, stanowią dość trywialne ćwiczenie.  $\square$

Zauważmy, że ostatni warunek w (iii) można zapisać w postaci:

$$|\phi(x)| \leq \sup_{a \in E} |\phi(a)|.$$

W przypadku przestrzeni unormowanych  $\|\phi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\phi(x)|$ , a stąd wynika bardzo ważny wniosek:

**Wniosek.** Jeśli  $\emptyset \neq E \subset X$  dla przestrzeni unormowanej  $X$ , to kula jednostkowa zawiera się w domkniętej obwiedni absolutnie wypukłej:  $\overline{\text{abs conv}}(E)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall \phi \in X^* \|\phi\| \leq \sup_{a \in E} |\phi(a)|$ . Ogólniej:

$$\{x \in X : \|x\| \leq r\} \subset \overline{\text{abs conv}}(E) \Leftrightarrow \forall \phi \in X^* \|\phi\| \leq \frac{1}{r} \sup_{a \in E} |\phi(a)|.$$