6 Przestrzenie Hilberta -teoria elementarna

W tym wykładzie $M \neq \{0\}$ będzie domkniętą (nietrywialną) podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H, zaś P_M będzie rzutem prostopadłym na M. Ten rzut możemy traktować zarówno jak operator $P : H \to H$ o obrazie zawartym w M, lub jako operator $P : H \to M$. Przyjmijmy jednak tę pierwszą wersję.

Twierdzenie(Własności rzutu)

1. P_M jest operatorem liniowym spełniającym warunek $P_M^2 = P_M$.
2. $M = \{x \in H : x = P_M x\} = P_M(H)$
3. Norma tego operatora spełnia warunek: $\|P_M\| \leqslant 1$.
4. Zachodzi warunek symetrii: $\forall_{x,y\in H} \langle P_M x, y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$
5. Gdy $P \in \mathcal{B}(H)$ oraz $P^2 = P$, to $\exists_M P = P_M$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jeden z warunków: 3) lub 4).

Dowód. Z charakteryzacji rzutu wiemy, że dla $z = \alpha P_M x + \beta P_M y$, jest $z \in M$, więc aby wykazać, że $z = P_M(\alpha x + \beta y)$ wystarczy sprawdzić, czy $z - (\alpha x + \beta y) \perp M$. Faktycznie, ten wektor jest kombinacją $\alpha(P_M x - x) + \beta(P_M y - y)$ dwóch wektorów prostopadłych do M. Z definicji wynika, że zawężenie P_M do M działa jak identyczność, powtórne rzutowanie rzutu już nie zmienia tego wektora. Również teza 2. jest oczywista. Dzięki rozkładowi ortogonalnemu oraz z twierdzenia Pitagorasa mamy $\|x\|^2 = \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2$, co implikuje nierówność z tezy 3. Z warunku prostopadłości do M wynika, że
$\langle P_M x, y - P_M y\rangle = 0$, czyli $\langle P_M x, y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle$ Na podobnej zasadzie, $\langle P_M x, P_M y\rangle = \langle x, P_M y\rangle$, co dowodzi tezy 4.

Z warunku $P^2 = P$ wynika, że dla $Q := I - P$ jest $PQ = 0$ oraz dla $M := P(H), N = Q(H)$ mamy rozkład na sumę prostą $H = M + N$. (Każdy $x \in H$ ma rozkład $x = Px + (x - Px) \in M + N$ Na ogół nie ma prostopadłości M do N, a jedynie $M \cap N = \{0\}$, bo gdy $x = v - Pv \in N$, to $Px = Pv - P^2 v = 0$, więc jeśli ponadto $x \in M$, to $Px = x$, stąd $x = 0$ dla $x \in M \cap N$.) Aby wykazać równość $P = P_M$ wystarczy np, wykazać, że $M \perp N$, a następnie skorzystać z jednoznaczności rozkładu ortogonalnego. Załóżmy więc warunek 4) i niech $x = Pv \in M, y = w - Pw \in N$. Wtedy $x \perp y$, bo $\langle Pv, w - Pw\rangle = \langle Pv, w\rangle - \langle Pv, Pw\rangle = \langle Pv, w\rangle - \langle P^2 v, w\rangle = 0$, dzięki warunkowi symetrii oraz równości $P^2 = P$.

W przypadku, gdy założymy warunek 3) dowód nieco bardziej skomplikowany można znaleźć np. w skrypcie M. Malejki i moim z 2001 r. Wykazuje się tam, że $P = P_A$, gdzie $A = N^\perp$ korzystając z zerowania się zarówno P jak i P_A na podprzestrzeni N i wykazując, że te dwa operatory są równe też na $N^\perp$. W tym celu rozkładamy dowolny wektor $z \perp N$ na sumę $z = x + y$, gdzie $x = P(z) \in M, y = z - Pz \in N$. Wtedy z relacji $z \perp N$ mamy $z \perp y$. Ponieważ $Pz = z - y$, zaś z założenia, $\|z\|^2 \geqslant \|Pz\|^2 = \|z - y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2$ (z tw. Pitagorasa). Stąd $y = 0$, zaś $Pz = z = P_A(z)$ dla $z \perp N$. Ponieważ obwiednią liniową $N \cup N^\perp$ jest H, otrzymujemy równość tyh operatorów liniowych. $\Box$.

Jak się okaże, warunek symetrii 4. oznacza że P_M jest tzw. operatorem samosprzężonym.

Można wykazać, że iloczyn dwu projekcji ortogonalnych P_1, P_2 jest wtedy i tylko wtedy projekcją ortogonalną, gdy operatory te komutują (czyli są przemienne($P_1 P_2 = P_2 P_1$) i wtedy ten iloczyn jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń $P_1(H) \cap P_2(H)$. Natomiast suma jest projekcją wtedy i tylko wtedy gdy $P_1 P_2 = 0$.

Ważny w zastosowaniach jest następująy opis "podwójnego dopełnienia" dla dowolnego niepustego zbioru $E \subset H$. Tu symbol $E^{\perp\perp}$ oznacza "dopełnienie dopełnienia", czyli zbiór $(E^\perp)^\perp$. Symbol $\overline{\mathtt{span}}(E)$ oznacza domkniętą otoczkę liniową zbioru E, czyli najmniejszą domkniętą podprzestrzeń w H zawierającą zbiór E. Co ważniejsze, $x \in \overline{\mathtt{span}}(E)$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest granicą pewnego ciągu kombinacji liniowych elementów zbioru E.

Twierdzenie. Dla zbioru niepustego $E \subset H$ mamy równość

$$\overline{\mathtt{span}}(E) = E^{\perp\perp}.$$

Dowód. Dopełnienie ortogonalne $E^\perp$ jest zawsze domknietą podprzestrzenią -jako przecięcie jąder funkcjonałów liniowych ciągłych ϕ_z, gdzie $\phi_z(x) = \langle x, z\rangle$, a z przebiega zbiór E. Domknięta jest więc również podprzestrzeń $E^{\perp\perp}$ i zawiera ona zbiór E, co dowodzi inkluzji "$\subset$". Gdyby inkluzja była ostra, to jej prawa strona (oznaczmy ją H_1) jest też przestrzenią Hilberta i z twierdzenia o rozkładzie wynika, że istnieje w niej niezerowy wektor z_1 prostopadły do $\overline{\mathtt{span}}(E)$ (podprzestrzeni właściwej w H_1). W szczególności, $z_1 \in E^\perp$. Ale ponieważ równocześnie $z_1 1 \in H_1 = E^{\perp\perp}$, więc $z_1 \perp z_1$, co daje sprzeczność: $z_1 = 0$. $\square$

W dowodzie wystąpiło oznaczenie ϕ_z dla funkcjonałów skalarnego mnożenia przez wektor $z \in H$. Okazuje się, że nie ma innych funkcjonałów liniowych i ciągłych. Zachodzi bowiem następujące **Twierdzenie o postaci funkcjonału** (zwane też twierdzeniem o reprzentacji):

Twierdzenie (F.Riesz, M. Fréchet). Jeśli ϕ jest funkcjonałem liniowym i ciągłym na przestrzeni Hilberta H, to istnieje dokładnie jeden wektor $z \in H$ taki, że $\forall_{x\in H}\ \phi(x) = \langle x, z\rangle$.

Dowód. W nietrywialnym przypadku możemy dodatkowo założyć, że $\phi \neq 0$. Wtedy istinieje wektor $z_1 \in H$, dla którego $\phi(z_1) = 1$. Oczywiście, z_1 nie należy do podprzestrzeni domkniętej $M := \ker(\phi)$. Gdyby H nie była przestrzenią zupełną -następnego kroku nie moglibyśmy wykonać: Dzięki zupełności H (istnieniu projekcji ortogonalnej na M, czy w końcu -dzięki rozkładowi ortogonalnemu) -istnieją wektory $z_0 \in M, z_2 \in M^\perp$ takie, że $z_1 = z_0 + z_2$. Stąd $1 = \phi(z_1) = \phi(z_0) + \phi(z_2) = \phi(z_2)$. Teraz dowolny wektor $x \in H$ ma rozkład $x = x_0 + \phi(x)z_2$, gdzie $x_0 = x - \phi(x)z_2$ należy do M, bo jak łatwo przeliczyć, $\phi(x_0) = 0$. Dzięki prostopadłości z_2 do M, orzymujemy

$$0 = \langle x - \phi(x)z_2, z_2\rangle = \langle x, z_2\rangle - \phi(x)\langle z_2, z_2\rangle = \langle x, z_2\rangle - \phi(x)\|z_2\|^2.$$

Otrzymujemy stąd tezę dla $z = \frac{1}{\|z_0\|^2} z_0$.

Dowód jednoznaczności jest prosty: gdyby jakiś inny wektor w, oprócz z, reprezentował również ϕ, to $\forall_x$ mielibyśmy $0 = \phi(x) - \phi(x) = \langle x, z - y\rangle$ i wstawiając $x = z - y$ dostaniemy $0 = \|z - y\|^2$ -czyli jednak musi być $z = y$. $\square$.

Gdy przestrzeń unitarna H_0 nie jest zupełna, to jest ona zanurzalna jako gęsty podzbiór w pewnej przestrzeni Hilberta H (równej drugiej dualnej do H). Istnieje teraz wektor $z_* \in H \setminus H_0$ i generowany przez niego funkcjonał $\phi_*(x) = \langle x, z_*\rangle$ na przestrzeni H_0 ma tylko jeden możliwy wektor reprezentujący w przestrzeni H -wektorem tym jest oczywiście z_* -leżący poza H_0. Więc teza twierdzenia o reprezentacji nie zachodzi nigdy dla niezupełnych przestrzeni unitarnych. Z dowodu twierdzenia i z powyższych rozważań wyciągamy więc następujący:

Wniosek. Dla przestrzeni unitarnej następujące własności są równoważne:

1. Zupełność
2. Zachodzenie twierdzenia o rzucie na domknięte podprzestrzenie (wystarczyo kowymiarze 1)
3. Zachodzenie twierdzenia o rozkładzie ortogonalnym
4. Istnienie dla każdej podprzestrzeni domkniętej M o kowymiarze 1 niezerowego wektora prostopadłego do M.

Zauważmy, że gdy D jest gęstą podprzestrzenią w przestrzeni Hilberta H, to każdy funkcjonał liniowy i ciągły na tej podprzestrzeni ma (i to dokładnie jedno) przedłużenie do funkcjonału liniowego ciągłego na H, jest więc restrykcją do $\phi_z|_D$ do tej podprzestrzeni pewnego funkcjonału mnożenia skalarnego przez jednoznacznie określony wektor $z \in H$. Wykorzystamy to w następującej definicji.

Definicja. Operatorem gęsto określonym w przestrzeni Hilberta H, o wartościach w orzestrzeni Hilberta H_1 nazywamy operator **liniowy** o dziedzinie D -będącej gęstą podprzestrzenią liniową w H. Tę sytuację zapiszemy symbolicznie

$$T : D \subset H \to H_1, \quad \bar{D} = H.$$

Dziedzinę operatora T oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{D}(T)$. Dla operatorów gęsto określonych $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H_1$ zdefiniujmy operator sprzężony T^* wzorem

$$\mathcal{D}(T^*) := \{y \in H_1 : \ \texttt{funkcjonał}\, \phi_y \circ T : \mathcal{D}(T) \ni x \to \langle Tx, y\rangle \ \ \texttt{jest ciągły}\},$$

$$\texttt{dla } y \in D(T^*) \texttt{ definiujemy } T^*y = z \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathcal{D}(T)} \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle.$$

Zauważmy, że gdy $T : D \to H_1$ jest ciągły, gęsto określony w H, to ma on dokładnie jedno przedłużenie do operatora $\tilde{T} \in \mathcal{B}(H, H_1)$ i wówczas $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\tilde{T}^*) = H_1$ oraz $(\tilde{T})^* = T^*$. Faktycznie, zarówno $\phi_y \circ T$, jak i $\phi_y \circ \tilde{T}$ są ciągłe, więc y należy do dziedziny operatora sprzężonego. W przypadku operatorów ograniczonych -definicja jest więc nieco prostsza. Okaże się wkrótce, że dla operatorów nieograniczonych rozszerzenie dziedziny może istotnie zmniejszyć dziedzinę operatora sprzężonego. W każdym przypadku mamy jednak następującą równość mogącą również służyć za definicję:

$$\forall_{x\in\mathcal{D}(T)}\forall_{y\in\mathcal{D}(T^*)} \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

W skrajnym przypadku może się zdarzyć, że $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$. Na ogół badane są jednak operatory, dla których T^* jest również gęsto określony. Można wówczas określić następne sprzężenie: T^{**} i można wykazać, że jest to zawsze operator o dziedzinie przynajmniej tak dużej, jak $\mathcal{D}(T)$, choć inkluzja może być ostra. Operator T^{**} oznaczany też bywa symbolem $\bar{T}$, gdyż jego wykres jest domknięciem (w topologii produktowej) wykresu operatora T. Oznaczmy symbolem $\mathcal{G}(T)$ wykres operatora T, czyli zbiór

$$\mathcal{G}(T) := \{(x, y) \in H \times H_1 : x \in \mathcal{D}(T),\, y = Tx\}.$$

Dla pary operatorów $T_j : D_j \subset H \to H_1$ symbolem $T_1 \subset T_2$ oznaczamy sytuację, gdy $\mathcal{G}(T_1) \subset \mathcal{G}(T_2)$, co jest równoważne koniunkcji warunków: $D_1 \subset D_2$ oraz $T_2|_{D_1} = T_1$, cyli stwierdzeniu, że operator T_2 jest rozszerzeniem (czy też przedłużeniem) operatora T_1.

Liniowość operatora T jest równoważna faktowi, że $\mathcal{G}(T)$ jest podprzestrzenią liniową w $H \times H_1$. Mówimy, że operator T jest domknięty (odpowiednio, domykalny), gdy $\mathcal{G}(T)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $H \times H_1$ (odp. gdy domknięcie jego wykresu jest wykresem pewnego operatora -czyli jest relacją jednoznaczną). Jako proste ćwiczenie proszę sprawdzić, że gdy T jest gęsto określony, to jego sprzężony -operator T^* jest zawsze domknięty. Można wykazać, że wtedy domykalność T jest równoważna gęstości $\mathcal{D}(T^*)$ w przestrzeni H_1. Innym równoważnym warunkiem jest istnienie domkniętego przedłużenia T_2 operatora T -najmniejszym z takich przedłużeń będzie $\bar{T}$. Na ogół będziemy jednak rozważać przypadek, gdy $H_1 = H$, Wówczas mamy dwie bardzo ważde definicje:

Definicja. Operator symetryczny, to taki operator gęsto określony, że $T \subset T^*$, czyli

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad (\forall x, y \in \mathcal{D}(T)).$$

Natomiast operator samosprzężony, to taki operator gęsto określony $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$, że

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T) \quad \texttt{oraz} \quad \forall_{x,y \in \mathcal{D}(T)} \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Mówimy, że operator T jest istotnie samosprzężony, gdy jego domknięcie jest operatorem samosprzężonym.

Oczywiście, w przypadku operatorów o dziedzienie równej H symetria implikuje samosprzężoność (można też wykazać, że implikuje ograniczoność = Twierdzenie Hellingera-Toeplitza). Faktycznie, dla operatora symetrycznego mamy zawsze $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \subset H$. Jeśli już wykażemy proponowane ćwiczenie: "domkniętość T^*" -to teza tego twierdzenia H-T wyniknie z Twierdzenia Banacha o Wykresie Domkniętym -które wkótce wykażemy.

Przykład. Niech T_1 będzie operatorem brania pochodnej z dziedziną $D_0 := C^1_c(0,1) \subset H = L^2[0,1]$. Gdy $f, g \in D_0$, czyli są to funkcje klasy C^1 zerujące się w sąsiedztwie końców przedziału ("funkcje o nośnikach zwartych")- to $T_1 f = \frac{df}{dt} = f'$ i wzór całkowania przez części daje

$$\langle T_1 f, g\rangle = [fg]^1_0 - \langle f, T_1 g\rangle = -\langle f, T_1 g\rangle, \quad f, g \in D_0.$$

Nie jest to symetria, ale iloczynem skalarnym jest tu $\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, więc zastępując T_1 przez $T := iT_1$ i korzystając z relacji $\bar{i} = -i$, otrzymamy symetrię T. Operator $T = i\frac{d}{dt}$ jest symetryczny, gęsto określony, ale nie jest domknięty. Dziedziną T^* jest tu tzw. przestrzeń Sobolewa 1. rzędu, oznaczana przez $W_1[0,1]$ lub przez H_1. (Uwaga: spotyka się -ukryte pod symbolem H^p tak zwane przestrzenie Hardy'ego, np. H^1, która jest przestrzenią Banacha , ale nie Hilberta.)

Równoważny opis przestrzeni Sobolewa jest następujący: $f \in W_1[0,1]$, gdy f jest absolutnie ciągła (wówczas f' istnieje prawie wszędzie) oraz $f' \in L^2[0,1]$. Absolutna ciągłość oznacza, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}$ takie, że suma modułów przyrostów f po odcinkach rozłącznych zawartych w [0,1] o sumie długości $< \delta$ jest mniejsza od ϵ. Klasa funkcji absolutnie ciągłych jest w pewnym sensie najszerszą, w której zachodzi twierdzenie Newtona-Leibniza (a więc i wzór całkowania przez części). A może nasz T jest istotnie samosprzężony? -Niestety, nie! Można wykazać, że jego domknięcie ma dziedzinę $\mathcal{D}(\bar{T}) = \{f \in H_1 : f(0) = 0 = f(1)\}$ i dane jest tym samym wzorem: $i\frac{d}{dt}$ - więc istotnie mniejszą, niż $\mathcal{D}(\bar{T}) = H_1$. Operator $\bar{T}$ jest symetryczny, domknięty, lecz nie samosprzeężony! Co ciekawsze, operator ten ma rozszerzenie samosprzężone. Można wykazać, że operator $i\frac{d}{dt}$ na dziedzinie $\{f \in H_1 : f(0) = f(1)\}$ jest jednym (ale nie jedynym) z takich rozszerzeń.

Nieograniczone operatory samosprzeężone odgrywają kluczową rolę w mechanice kwantowej, jest to najszersza z klas operatorów o widmie rzeczywistym (=zawartym w $\mathbb{R}$), dla których zachodzi twierdzenie spektralne. My jednak skoncentrujemy się na bardziej elementarnej teorii operatorów ograniczonych.

Załóżmy więc, że $T \in \mathcal{B}(H)$.

Twierdzenie. Operacja sprzężenia w $\mathcal{B}(H)$ ma następujące własności:

1. $T^* \in \mathcal{B}(H), \|T^*\| = \|T\|$
2. $(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha}S^* + \bar{\beta}T^*$
3. $(ST)^* = T^*S^*, I^* = I$
4. $T^{**} = T$.

Proste dowody można pozostawić jako ćwiczenie, ale może napiszę je za tydzień.

Przykład. Operatory projekcji ortogonalnych są samosprzężone (por. "własność symetrii"). Operatorem sprzężonym do macierzy rozmiaru $d \times d$ (jako operatora na $\mathbb{C}^d$) jest macierz hermitowsko sprzężona. Operatorem sprzężonym do operatora M_ϕ mnożenia przez funkcję $\phi \in L^\infty(\mu)$ na przestrzeni $L^2(\mu)$ jest operator mnożenia przez funkcję sprzężoną $\bar{\phi}$. Dokładniej, dla $f \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ mamy

$$(M_\phi f)(w) = \phi(\omega)f(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

.