

7 Bazy ortonormalne

Zacznę od uzupełnienia dowodu twierdzenia o własnościach sprzężenia operatorów ograniczonych. Przypomnijmy że dla $T \in \mathcal{B}(H), y \in H$ definiujemy wektor T^*y tak, by zachodziła relacja

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad x \in \mathcal{D}(T). \quad (1)$$

Nawet w przypadku ogólniejszym operatorów gęsto określonych ta relacja wyznacza jednoznacznie wektor T^*y . Z tej jednoznaczności wnioskujemy o liniowości T^* . Na przykład, dla $y_1, y_2 \in H$ dodając stronami relacje (1) -otrzymamy

$$\forall_x \langle Tx, y_1 + y_2 \rangle = \langle Tx, y_1 \rangle + \langle Tx, y_2 \rangle = \langle x, T^*y_1 + T^*y_2 \rangle,$$

zaś lewa strona dzięki (1) równa jest $\langle x, T^*(y_1 + y_2) \rangle$, stąd $T^*(y_1 + y_2) = T^*y_1 + T^*y_2$. Analogicznie sprawdzamy jednorodność T^* . Z definicji normy operatora i z dualnego wzoru na normę

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\},$$

podczas, gdy $\|T^*\| = \sup\{|\langle x, T^*y \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$, więc dzięki (1) te normy są równe.

Analogicznie sprawdzamy tezę 2. pamiętając, że skalary wyłączają się przed iloczyn skalarny z prawej strony ze sprzężeniem. Dla dowodu 3. stosujemy dwukrotnie relację (1) -najpierw dla S , później dla T : mamy

$$\langle STx, y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle.$$

Równość $T^* = I$ jest oczywistym wnioskiem z (1). Natomiast $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, T^{**}y \rangle$ Prawa strona jest liczbą sprzężoną do $\langle T^{**}y, x \rangle$, zaś lewa -sprzężoną do $\langle Ty, x \rangle$, co dowodzi równości 4. \square .

Wnioskiem o podstawowym znaczeniu (wynikającym z równości 3. i 4.) jest **samosprzężoność operatora T^*T** . Wkrótce wykażemy, że dla operatorów samosprzężonych ograniczonych (czyli gdy $S^* = S \in \mathcal{B}(H)$) mamy

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Sx, x \rangle.$$

Stosując ten wzór dla $S = T^*T$, otrzymujemy tak zwaną tożsamość C^* :

$$\forall_{T \in \mathcal{B}(H)} \|T\|^2 = \|T^*T\|.$$

Jeśli przestrzeń Banacha ma dodatkowo strukturę algebry z inwolucją $*$ spełniającą warunki 2., 3., 4. i tożsamość C^* oraz $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$, to tak zwana konstrukcja GNS (Gelfanda -Naimarka - Segala) pokazuje, że ta algebra jest izometrycznie i algebraicznie izomorficzna z pewną C^* -podalgebrą w $\mathcal{B}(H)$ dla pewnej przestrzeni Hilberta H . Teoria takich algebr (znana też pod nazwą "niekomutatywna geometria") jest jedną z intensywnie rozwijanych gałęzi teorii operatorów, powiązaną z zastosowaniami w mechanice kwantowej.

Dalsze własności operatorów samosprzężonych (oraz normalnych) poznamy w następnych wykładach.

7.1 Bazy

Pojęcie bazy w algebrze liniowej jest powiązane z jednoznaczną reprezentacją każdego wektora danej przestrzeni w postaci (skończonej!) kombinacji liniowej elementów tej bazy. Niestety, w przestrzeniach Banacha nieskończenie wymiarowych takie bazy algebraiczne (zwane bazami Hamela) są użyteczne jedynie przy konstrukcji kontrprzykładów, bądź funkcjonałów liniowych nieciągłych. Hamel, używając pewnika wyboru, rozwiązał negatywnie problem pochodzący od Cauchy'ego: "czy każdy funkcjonał addytywny na \mathbb{R} jest postaci $t \mapsto \alpha t$ dla pewnej liczby α ?". Takie odwzorowanie musi być też jednorodne względem

skalarów wymiernych. Traktując \mathbb{R} jako przestrzeń wektorową nad ciałem \mathbb{Q} liczb wymiernych Hamel "skonstruował" bazę, na niej dowolne odwzorowanie przedłuża się do odwzorowania liniowego (nad \mathbb{Q}) - i to dało kontrprzykład. Był to funkcjonal nieciągły. W przestrzeni zupełnej X nigdy nie istnieje przeliczalna baza Hamela ($\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$):

Wymiar przestrzeni Banacha, jeśli nie jest skończony, musi być nieprzeliczalny.

Faktycznie, gdyby przeliczalna baza istniała, to X będzie sumą przeliczalną podprzestrzeni $M_n := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, bo każdy jej wektor jest skończoną kombinacją liniową wektorów z bazy. Podprzestrzenie właściwe mają puste wnętrza, podprzestrzenie skończone wymiarowe są domknięte, więc każdy zbiór M_n jest nigdzie-gęsty. Ich suma mnogościowa - na mocy twierdzenia Baire'a - ma puste wnętrza. Nie może być równa X (sprzeczność). Chyba to rozumowanie przedstawiałem na wykładzie. Jeśli teraz X zawiera jakiś przeliczalny podzbiór gęsty D (wystarczy, by jego span był gęsty), to każdy funkcjonal liniowy ciągły będzie zdeterminowany przez swoje wartości na tym zbiorze D , ilość wszystkich możliwych funkcji na D nie przekracza $\aleph_0^{\aleph_0}$ i jest silnie mniejsza od $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Stąd znacznie więcej jest funkcjonałów liniowych nieciągłych na X , niż ciągłych.

Praktyczne znaczenie mają jedynie układy przeliczalne generujące przestrzenie ośrodkowe.

Definicja. Ciąg $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **bazą Schaudera w przestrzeni X** , gdy dla każdego wektora $x \in X$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów α_n taki, że

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \quad (\text{szereg zbieżny w topologii normy}). \quad (2)$$

Schauder (uczeń Banacha) skonstruował bazę w przestrzeni $C[0, 1]$, bazy skonstruowano później też w większości znanych ośrodkowych przestrzeni Banacha. Dopiero w latach 70-tych szwedzki matematyk (i pianista) Per Enflo skonstruował przestrzeń ośrodkową niemającą żadnej bazy Schaudera, rozwiązując tym samym problem S. Mazura z Księgi Szkockiej (nagrodą była żywa gęś, której jednak nie mógł wywieźć z Warszawy, ze względu na przepisy celne). Bardzo łatwo zauważyć, że w każdej z przestrzeni ciągłych ℓ^p , $1 \leq p < \infty$ bazą Schaudera jest ciąg kanoniczny 0-1-kowy, w którym e_n jest ciągiem z jedynym niezerowym wyrazem -jedynką na n -tym miejscu. Wykażemy, że każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta H ma bazę Schaudera- co więcej, istnieje w niej baza ortonormalna. Ponadto odwzorowanie przypisujące wektorowi $x \in H$ jego ciąg współczynników - przyjmuje wartości w ℓ^2 i jest izometrycznym izomorfizmem. W pewnym sensie, jest (z dokładnością do izomorfizmu) tylko jedna ośrodkowa przestrzeń Hilberta.

Definicja. Układ wektorów $\{e_j\}_{j \in J} \subset H$ jest **ortogonalny**, gdy

$$\forall_{j, k \in J} (j \neq k) \Rightarrow e_j \perp e_k.$$

Układ ten jest **ortonormalny**, gdy jest ortogonalny oraz $\forall_j \|e_j\| = 1$. Układ jest **zupełny**, gdy jedynym wektorem prostopadłym do wszystkich e_j jest wektor zerowy. **Bazą ortogonalną (odp. ortonormalną) nazywamy układ zupełny, który jest ortogonalny (odp. ortonormalny).**

Pierwszym krokiem w konstrukcji baz ortonormalnych jest tzw. proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Twierdzenie. (Gram-Schmidt) Jeżeli tylko ciąg wektorów $v_n \in H$ jest liniowo niezależny, to istnieje ciąg ortonormalny złożony z takich wektorów e_n , że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ jest $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$.

Dowód. Oznaczmy przez M podprzestrzeń $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ i skonstruujemy ciąg ortogonalny f_n rekurencyjnie -przyjmując $f_1 = v_1$, mając zaś już określone f_1, \dots, f_k zdefiniujemy $f_{k+1} = v_{k+1} - P_M v_{k+1}$. Ze znanej własności rzutu, $f_{k+1} \perp M$, w szczególności $\forall_{j < k+1} f_{k+1} \perp f_j$. Teraz łatwo zauważyć, (np. metodą indukcji), że $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$. Po "unormowaniu", czyli

definiując $e_n = \frac{1}{\|f_n\|} f_n$ otrzymamy układ ortonormalny spełniający nasze wymagania. \square

Twierdzenie. W każdej przestrzeni Hilberta H istnieje baza ortonormalna.

W przestrzeniach óśrodkowych taką bazę stanowi pewien ciąg wektorów.

Dowód. Rozważmy rodzinę \mathcal{A} wszystkich układów ortonormalnych w H . Aby wykazać, że (w sensie relacji zawierania) istnieje w tej rodzinie element maksymalny, weźmy dowolny łańcuch (czyli liniowo uporządkowany podzbiór $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$). Oczywiście, jego suma: $\bigcup \mathcal{L}$ jest też układem ortonormalnym i jest to majoranta tego łańcucha. Z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieją maksymalne układy ortonormalne. Gdyby taki układ nie był zupełny, pewien wektor niezerowy byłby do niego prostopadły. Po "unormowaniu" tego wektora -jak w procesie grama-Schmidta -otrzymamy większy o 1 element układu ortonormalny, co przeczy maksymalności. Gdy w przestrzeni H mamy nieprzeliczalny układ ortonormalny, to dla $j \neq k$ z tw. Pitagorasa widzimy, że $\|e_j - e_k\|^2 = 2$, więc kule o środkach e_j i promieniach $\frac{1}{2}$ są tu parami rozłączne. To wyklucza óśrodkowość, gdyż podzbiór gęsty musi mieć w każdej z takich kul jakieś swoje punkty. \square

Uwaga. Powyższy dowód ma zastosowanie również w przestrzeniach nie-óśrodkowych -wówczas otrzymujemy bazę ortonormalną $(e_j)_{j \in J}$, gdzie zbiór J jest nieprzeliczalny. Bazy Schaudera definiowaliśmy tylko w przypadku óśrodkowym. Będziemy jednak w stanie przedstawić w przypadku nieóśrodkowym dowolny wektor $x \in H$ w postaci sumy nieskończonej

$$\sum_{j \in J} \alpha_j e_j, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_j = \langle x, e_j \rangle. \quad (3)$$

Okaże się, że $\alpha_j \neq 0$ jedynie dla przeliczalnie wielu $j \in J$ tworzących (zależny od x) zbiór $J_x = \{j_n : n \in \mathbb{N}\}$, zaś suma (3) rozumiana jako granica uogólniona jest równa sumie bezwarunkowo zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{j_n} e_{j_n}$. Przy tym sam ciąg j_n zależy od wyboru rozwijanego wektora x . Może warto w tym miejscu sprecyzować, jak rozumiemy sumy nieskończone typu (3).

Definicja taka jest używana w ogólnej sytuacji abelowych grup topologicznych (w zapisie addytywnym). A więc niech $\mathcal{F}(J)$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru J , jest to rodzina skierowana przez relację zawierania. Dla uproszczenia, w naszej sytuacji zapiszmy $y_j := \alpha_j e_j$. Wówczas sumę nieskończoną $S = \sum_{j \in J} y_j$ definiujemy jako granicę ciągu uogólnionego $(S_K)_{K \in \mathcal{F}}$, gdzie dla $K = \{j_1, \dots, j_m\}$ definiujemy $S_K := \sum_{n=1}^m y_{j_n}$. Ostatnia (skończona) suma nie zależy od sposobu ustawienia zbioru K w powyższy ciąg skończony, dzięki przemienności i łączności dodawania (tu dodawania wektorów w H). Zapis $S = \sum_{j \in J} y_j$ oznacza, że dla dowolnie wybranego otoczenia U punktu S (w rozważanej w danej grupie topologii -tu w topologii normy przestrzeni H) istnieje zbiór skończony $K_U \in \mathcal{F}$ taki, że gdy $K \in \mathcal{F}$ oraz $K_U \subset K$, to $S_K \in U$. Można wykazać, że takie sumy nieskończone nie zależą od permutacji zbioru J i gdy H jest ciałem skalarów, taka zbieżność gwarantuje również sumowalność modułów liczb, ilość niezerowych składników jest wówczas co najwyżej przeliczalna. Wówczas taka nieskończona suma liczb jest równa sumie szeregu (bez względu na to, w jakiej kolejności ustawimy niezerowe składniki). Suma nieskończonej ilości liczb nieujemnych, to kres górny (supremum) zbioru ich sum skończonych. Za chwilę wykażemy nierówność Bessela, $\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, która jest dość prostą konsekwencją twierdzenia Pitagorasa. Daje to właśnie niezerowanie się jedynie przeliczalnej ilości współczynników. Więc do roboty...

Załóżmy obecnie, że $\{e_j\}$ jest układem (jak ktoś woli łatwiej, to ciągiem) ortonormalnym, niekoniecznie zupełnym

Twierdzenie (Nierówność Bessela). Ciąg współczynników $\langle x, e_j \rangle$ wektora $x \in H$ jest sumowalny z kwadratem i jego norma w ℓ^2 nie przekracza $\|x\|$.

Zapis tej nierówności dla dowolnych układów ortonormalnych i dla ciągów - odpowiednio ma postać:

$$\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{odpowiednio, } \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2). \quad (4)$$

Dowód. Niech dla skończonego zbioru indeksów $K \subset J$ (odpowiednio, dla $K = \{1, 2, \dots, k\}$) symbol S_K oznacza "sumę częściową abstrakcyjnego szeregu Fouriera: $S_K := \sum_{j \in K} \langle x, e_j \rangle e_j$ (w drugim przypadku jest to $\sum_{j=1}^k \dots$). Jest to suma wzajemnie prostopadłych wektorów, przy czym S_K jest rzutem ortogonalnym wektora x na podprzestrzeń skończonego wymiaru $M_K := \text{span}\{e_j : j \in K\}$. Faktycznie, $S_K \in M_K$, zaś ortogonalność $x - S_K \perp M_K$ wystarczy sprawdzić tylko dla generatorów M_K , czyli dla wektorów $e_m, m \in K$. To proste przeliczenie: $\langle S_K - x, e_m \rangle = \sum_{j \in K} (\langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_m \rangle) - \langle x, e_m \rangle$. Ale $\langle e_j, e_m \rangle = \delta_{j,m}$ (symbol Kroneckera) i z całej sumy wszystkie składniki z wyjątkiem tego dla $j = m$ zerują się i całą naszą wyrażenie równa się zero. Z twierdzenia Pitagorasa dla rozkładu $x = P_K x + (x - P_K x)$ na sumę dwu wektorów prostopadłych wnioskujemy, że $\|P_K x\|^2 \leq \|x\|^2$. Ale ponownie stosując tw. Pitagorasa do sumy wektorów prostopadłych, mamy

$$\|P_K x\|^2 = \sum_{j \in K} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Lewa strona dowodzonej nierówności, to kres górny takich sum po $j \in K$, więc też jest nie większa, niż $\|x\|^2$. \square

Dowody następnego twierdzenia (i jego wypowiedź) można bez trudu uogólnić na sumy nieskończone, my ograniczymy się do ciągów. Tym razem (w dowodzie) użyjemy oznaczenia P_n dla projekcji ortogonalnej na zbiór $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Twierdzenie. Dla ciągu ortonormalnego $\{e_n; n < \infty\}$ następujące warunki są równoważne:

- (i) Układ ten stanowi bazę przestrzeni H ,
- (ii) w nierówności Bessela mamy równość (tzw. Tożsamość Parsewala):

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \quad (\forall x \in H), \quad (\text{TP})$$

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j\| = 0 \quad (\forall x \in H)$.

Dowód. Warunek (i) oznacza, że podprzestrzeń $M := \overline{\text{span}}\{e_j; n < \infty\}$ jest równa H . W przeciwnym przypadku istniałby wektor $z \in H \ominus M \setminus \{0\}$. Z relacji $z \perp e_j (\forall e_j)$ wynika zerowanie się prawej strony nier. Bessela (oraz (TP)), w odróżnieniu od lewej. Natomiast gdy $M = H \ni x$, to ciąg $P_n x$ jest ciągiem Cauchy'ego, co wynika z nier. Bessela (konkretnie, z sumowalności kwadratów współczynników) stosowanej do $\|P_m x - P_n x\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |\langle x, e_j \rangle|^2$. Jeżeli $y = \lim P_n x$, to $\langle x - y, e_j \rangle = 0 (\forall j)$, skąd wynika równość $x = y$, czyli (iii). Na koniec, z równości (TP) wynika liniowa gęstość zbioru $\{e_j; j < \infty\}$, gdyż jedynym wektorem doń prostopadłym jest 0. \square

Wnioskiem z dotychczas poznanych własności baz jest twierdzenie mówiące, że z dokładnością do unitarnej równoważności jest tylko jedna ośrodkowa przestrzeń Hilberta: ℓ^2 .

Twierdzenie. (Riesz, Fischer). Ustalmy bazę ortonormalną $\{e_n\}$ przestrzeni H .

(i) Jeżeli ciąg skalarów jest sumowalny w kwadracie: $\alpha := \{\alpha_n\} \in \ell^2$, to

$$\Phi(\alpha) := \sum_j \alpha_j e_j$$

jest szeregiem zbieżnym.

(ii) Tak określone odwzorowanie $\Phi : \ell^2 \rightarrow H$ jest izomorfizmem unitarnym¹.

Dowód. Tożsamość Parsewala (a właściwie, twierdzenie Pitagorasa) stosowana do $x = x_m - x_n$, gdzie $x_k = \sum_1^k \alpha_j e_j$ dowodzi, że dla $\alpha \in \ell^2$ ciąg $\{x_n\}_n$ jest ciągiem Cauchy'ego, a jego granicą jest $\Phi(\alpha)$. Izometryczność Φ jest dokładnie tożsamością (TP). Surjektywność można uzyskać zauważając, że dla $h \in H$ ciąg współczynników: $\alpha_j = \langle h, e_j \rangle$ jest „sumowalny z kwadratem”, tzn $\alpha \in \ell^2$ (dzięki nier. Bessela lub (TP)). Ponadto mamy relacje $h - \Phi(\alpha) \perp e_j (\forall j)$, a więc $h = \Phi(\alpha)$. \square

Wynik tej obserwacji, czyli relację $\Phi \circ \Phi^{-1} = Id_H$ zapiszmy w postaci

$$x = \sum_1^\infty \langle x, e_j \rangle e_j \quad (\text{SF})$$

Wzór ten nazywamy **rozwinieciem wektora x w szereg ortogonalny** lub **(abstrakcyjnym) szeregiem Fouriera** wektora x w bazie $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Izometryczność Φ^{-1} jest zarazem równoważna relacji

$$\langle x, y \rangle = \langle \Phi^{-1}x, \Phi^{-1}y \rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle. \quad (\text{TP2})$$

Rzeczywiście, obydwie strony relacji (TP2) są formami liniowymi względem zmiennej x , zaś antyliniowymi względem zmiennej y . Formy te pokrywają się na „przekątnej” zbioru $H \times H$, czyli na zbiorze par (x, y) , dla których $x = y$ (na mocy (TP)). Wzór polaryzacyjny, w którego dowodzie nie korzysta się z relacji $\langle x, x \rangle > 0$ dla $x \neq 0$, dowodzi równości tych dwu form już na zbiorze wszystkich par $(x, y) \in H \times H$.

¹czyli bijekcją liniową, zachowującą iloczyn skalarny